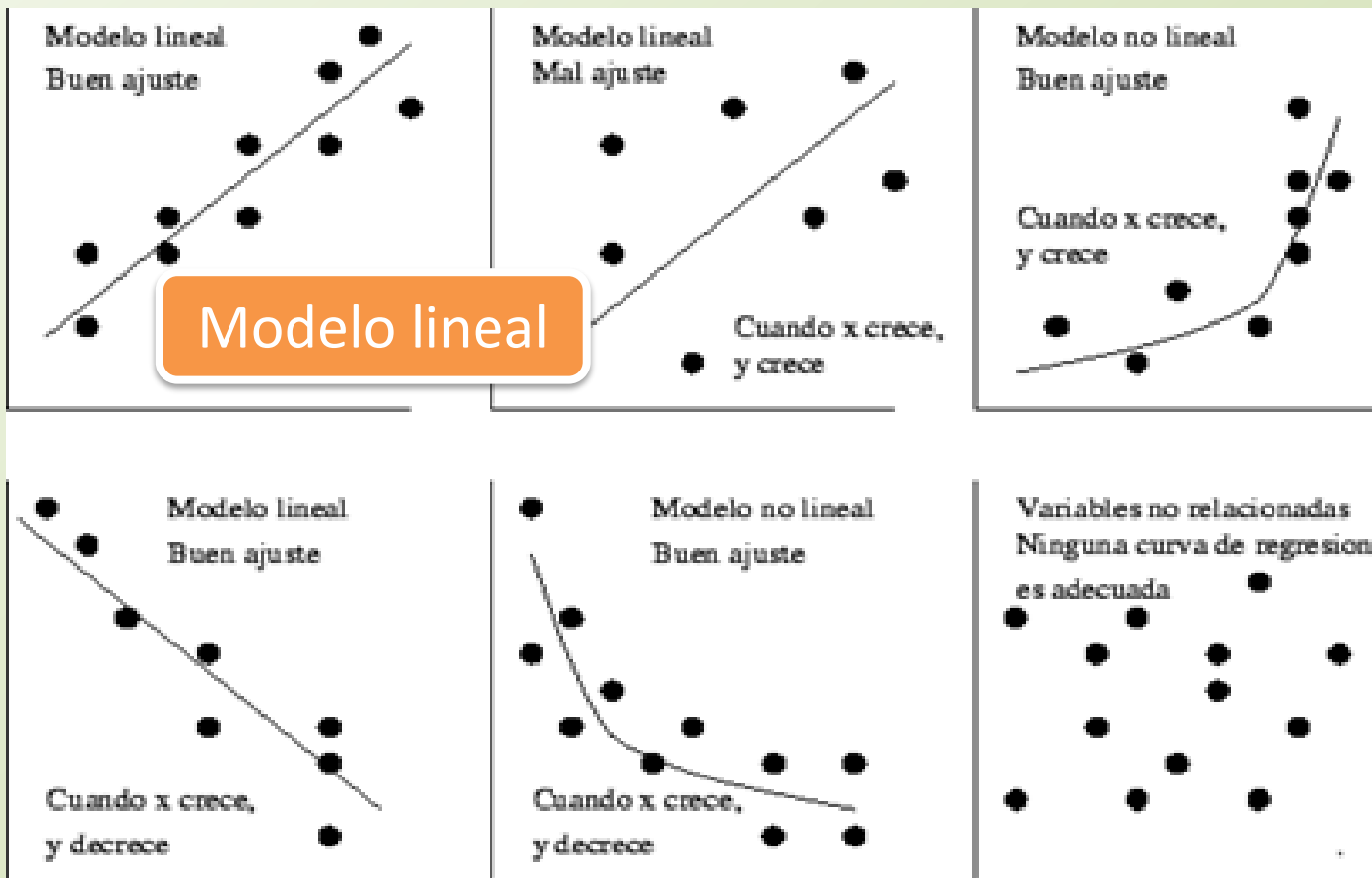


# REPASO DE LA CLASE PASADA ...

## CUADRADOS MÍNIMOS

### Relación entre dos variables: Modelo Matemático



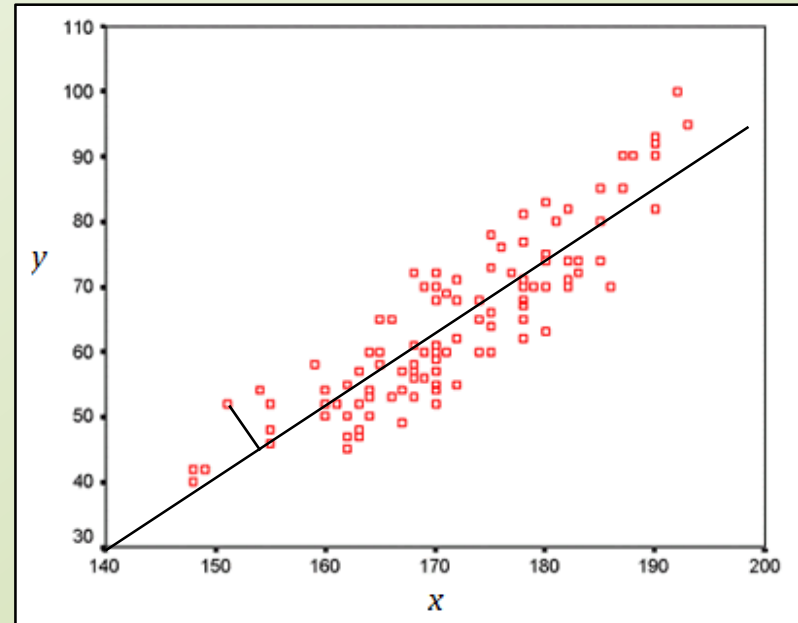
# Caso más sencillo

## Modelo Lineal

Tomamos una serie de medidas  $(x_i, y_i)$

Partamos asumiendo que la relación es:

$$y = mx + b$$



Buscamos encontrar los parámetros  $m$  y  $b$  que minimicen la distancia de los datos al modelo

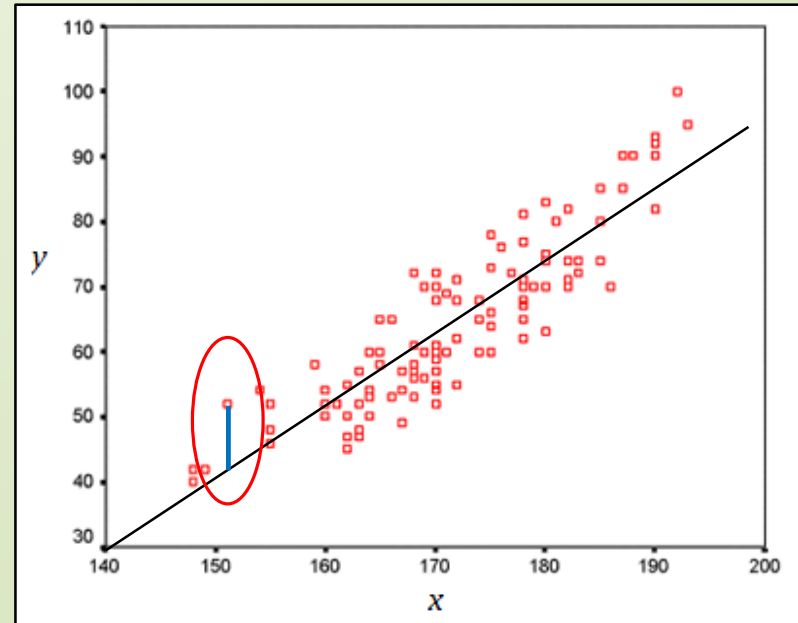
# Caso aún más sencillo

## Modelo Lineal

Tomamos una serie de medidas  $(x_i, y_i)$

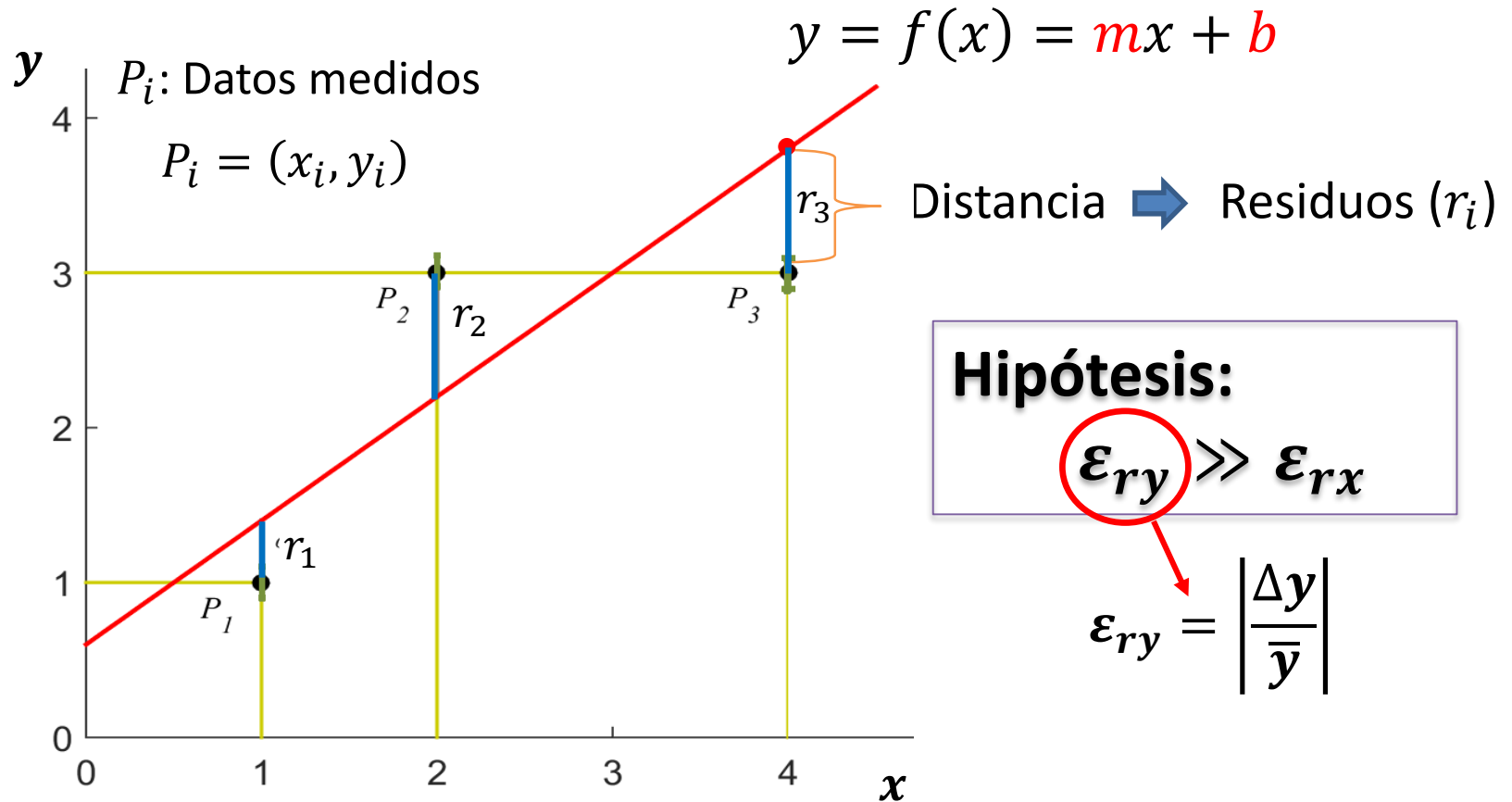
Partamos asumiendo que la relación es:

$$y = mx + b$$

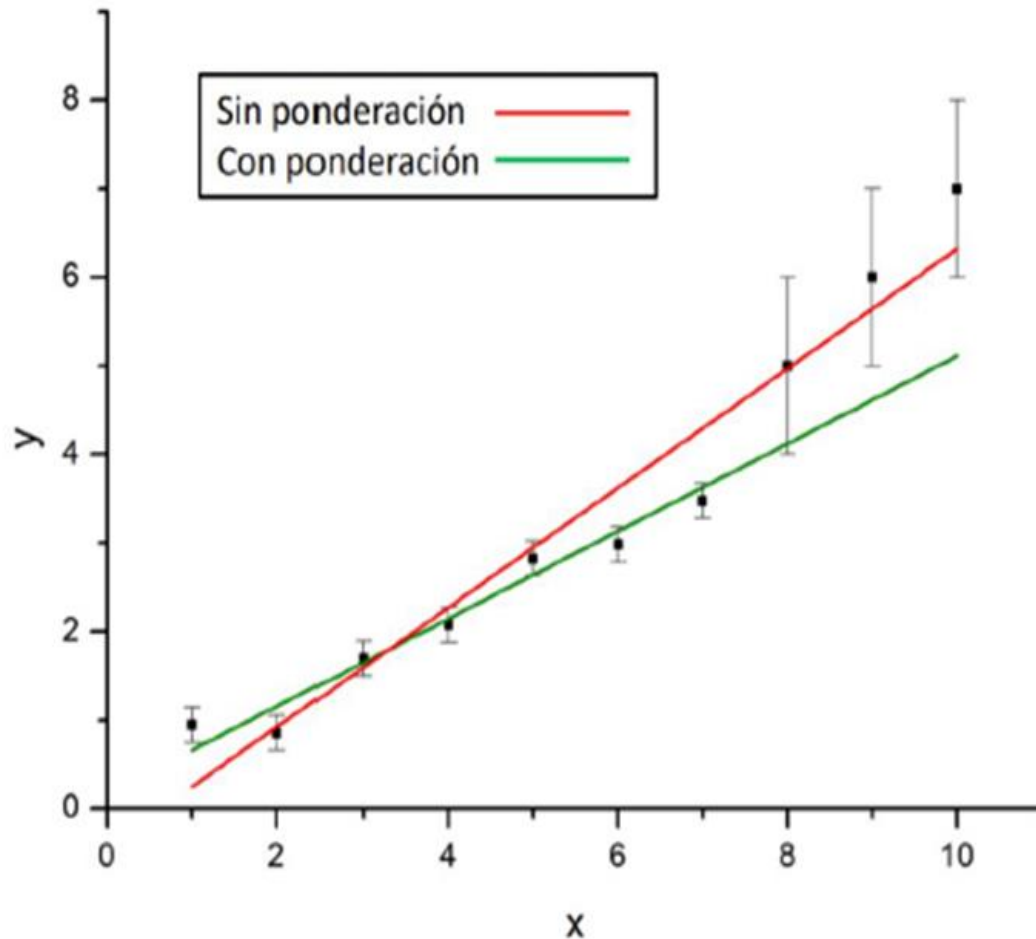


Buscamos encontrar los parámetros  $m$  y  $b$  que minimicen la distancia de los datos al modelo

# Buscamos encontrar los parámetros $m$ y $b$ que minimicen la distancia de los datos al modelo



# SIN Ponderación vs CON Ponderación



SIN

$$M = \sum_1^N [y_i - (mx_i + b)]^2$$

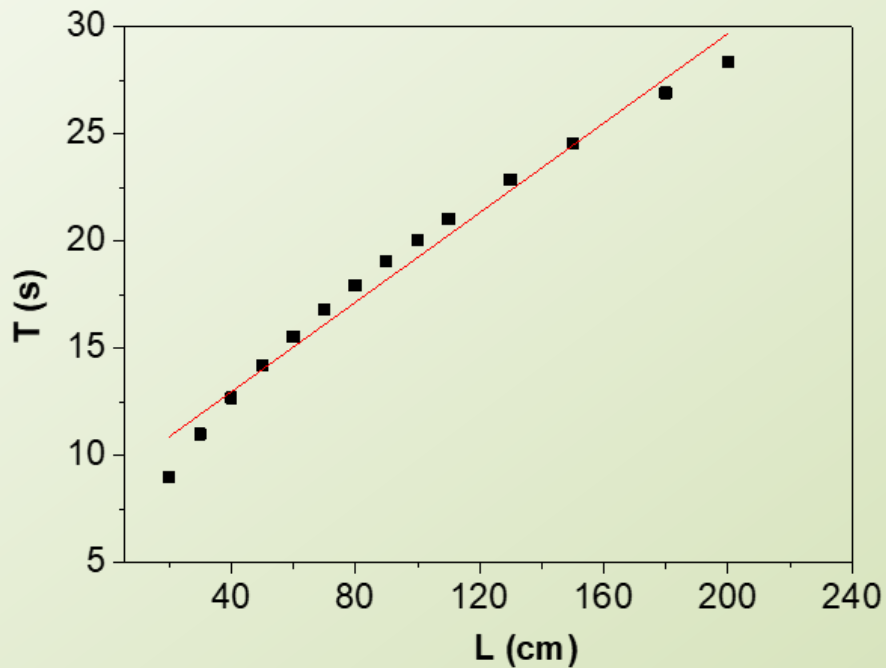
CON

$$\chi^2 = \sum_1^N \left[ \frac{y_i - (mx_i + b)}{\Delta y_i} \right]^2$$

*Al ponderar, considera más relevantes a las medidas más precisas*

# ¿Qué podemos discutir sobre un ajuste?

*Está bien usar el modelo lineal en este caso?*



Parámetros que nos servirán de ayuda



Coeficiente de Determinación ( $R^2$ )

Chi-cuadrado ( $\chi^2$ )

Gráfico de Residuos

Miren lo que obtengo aplicando el modelo lineal a  $T$  en función de  $l$ !!

$$R^2 = 0,988 \quad \chi^2 = 10,4$$

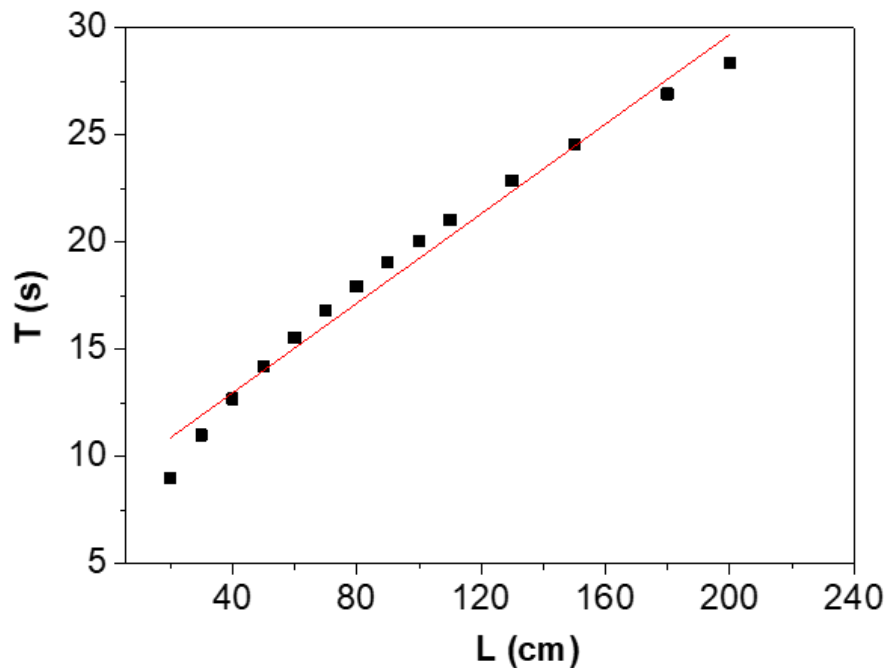
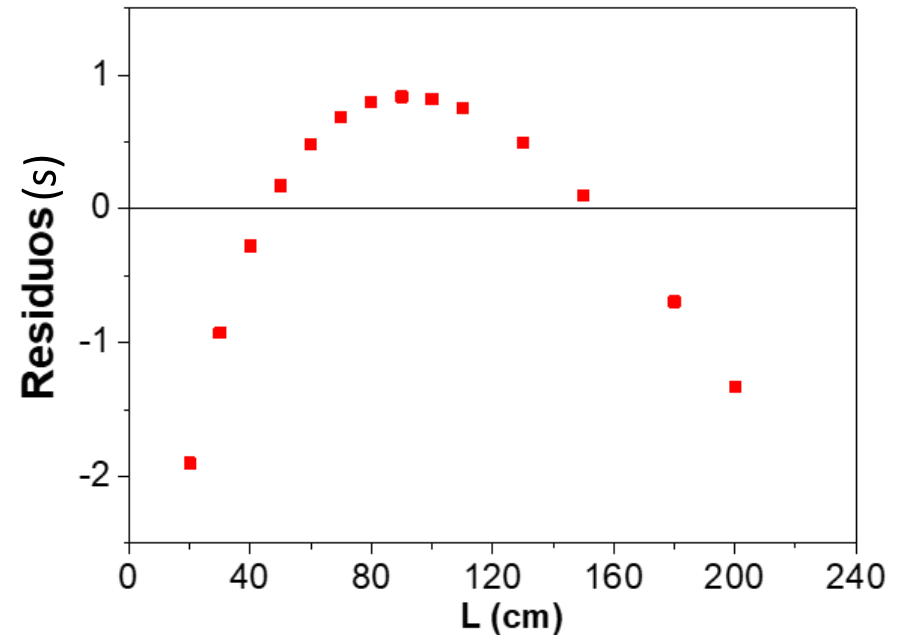


Gráfico de Residuos



**Figura 1.** Período del péndulo ( $T$ ) para diferentes ( $l$ ) longitudes y gráfico de residuos. Los errores están incorporados pero son menores al tamaño de punto.

# OBTENER EL PERÍODO DEL PÉNDULO EMPLEANDO UN PHOTOGATE Y DETERMINARLA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD ( $g$ )

## ACTIVIDAD

- Determinar el período del péndulo ( $T$ ) para 10 longitudes ( $l$ ) diferentes en el rango 30-150 cm (o lo máximo que pueda).
- Graficar  $T$  en función de  $l$  (gráfico de puntos con incertezas).  
*Discutir: ¿Qué forma parece tener la función graficada?*
- Obtener  $g = (\bar{g} \pm \Delta g) Ud.$  a partir del uso de un modelo lineal del método de cuadrados mínimos.



- Graficar  $T$  en función de  $l$  (gráfico de puntos con incertezas).  
Discutir: *¿Qué forma parece tener la función graficada?*

1

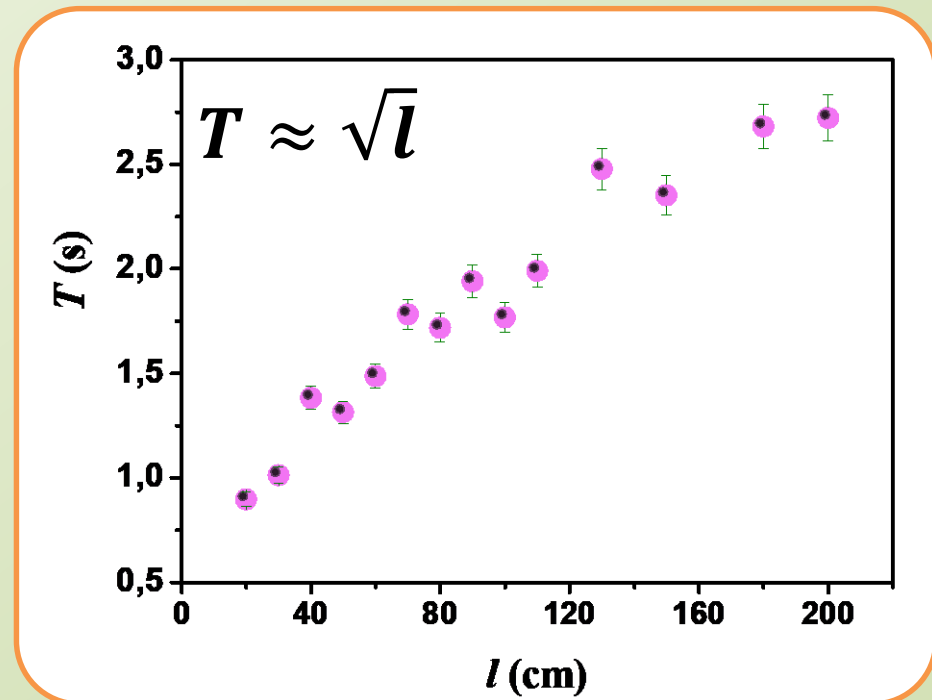
¿Cómo se relacionan  $T$  y  $l$  en el modelo del péndulo simple?

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

*Para la Figura 1:*

$$T = \bar{T} \pm \Delta T$$

$$l = \bar{l} \pm \Delta l$$

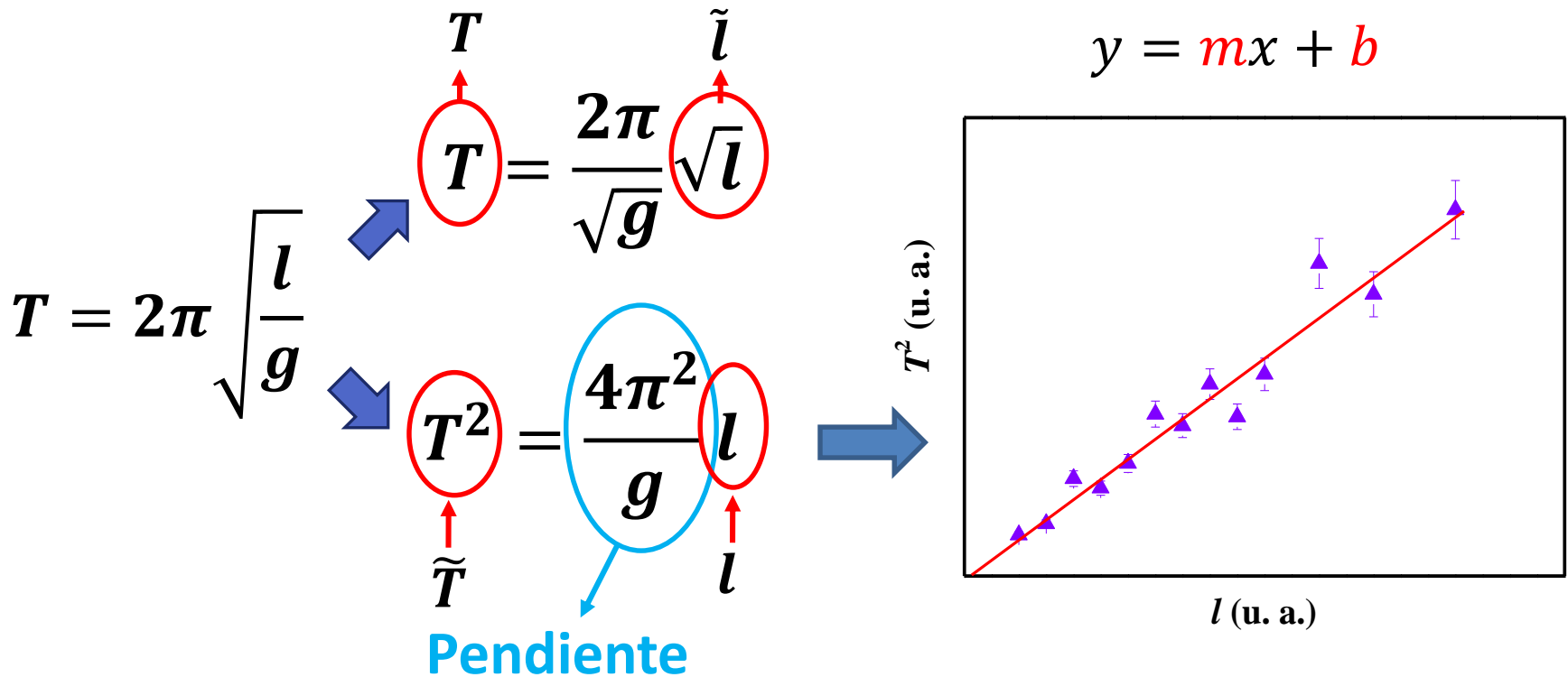


**Figura 1.** Período del péndulo ( $T$ ) para diferentes ( $l$ ) longitudes.

- Obtener  $g = (\bar{g} \pm \Delta g) Ud.$  a partir del uso de un modelo lineal del método de cuadrados mínimos.

2

¿Cómo utilizo el modelo lineal en una relación NO lineal?



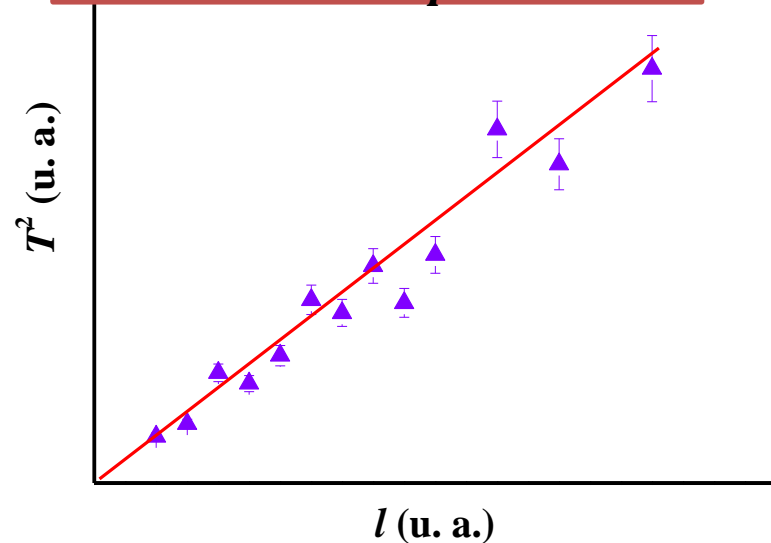
# AYUDA

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l$$

Diagram showing the equation  $T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l$ . The variable  $T^2$  is circled in red and labeled 'y' with an upward arrow. The variable  $l$  is also circled in red and labeled 'x' with an upward arrow. The fraction  $\frac{4\pi^2}{g}$  is circled in blue, with a blue arrow pointing to the text 'Pendiente  $m = \bar{m} + \Delta m$ ' below it.

Pendiente  $m = \bar{m} + \Delta m$

Ejemplo Si  $\epsilon_{r_{T^2}} \gg \epsilon_{rl}$



$$m = \frac{4\pi^2}{g} \rightarrow g = \frac{4\pi^2}{m}$$



$$\bar{g} = \frac{4\pi^2}{\bar{m}}$$

¿ $\Delta g$ ? Propago!!

$$\Delta g = \sqrt{\left(-\frac{4\pi^2}{m^2}\right)^2 \Delta m^2 + \left(\frac{8\pi}{m}\right)^2 \Delta \pi^2}$$

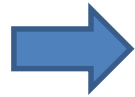
¿Puedo despreciar el término de  $\pi$ ?

# AYUDA

¿ Si  $\varepsilon_{r_{T^2}} \ll \varepsilon_{r_l}$  ?

SE DEBE GRAFICAR  $l$  en función de  $T^2$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l$$



$$l = \frac{g}{4\pi^2} T^2$$

The diagram shows the equation  $l = \frac{g}{4\pi^2} T^2$  with annotations: a blue oval around the fraction  $\frac{g}{4\pi^2}$ , a red oval around  $l$ , and a red oval around  $T^2$ . A red arrow points from the  $l$  oval to the label  $y$  below it. A red arrow points from the  $T^2$  oval to the label  $x$  below it. A blue arrow points from the blue oval to the text below.

Pendiente  $m = \bar{m} + \Delta m$

$$m = \frac{g}{4\pi^2} \rightarrow g = 4\pi^2 m$$

¿  $\Delta g$  ?

Propago!!

## RESUMEN ÚTIL

- Si utiliza  $\tilde{T} = T^2$  (1) y  $l = l$ :
  - 1- Obtenga  $\Delta\tilde{T}$  (error absolutos de  $\tilde{T}$ ) y  $\Delta l$
  - 2- Obtenga los errores relativos de  $\tilde{T}$  y  $l$  ( $\varepsilon_{r\tilde{T}}$  y  $\varepsilon_{rl}$ ) y compárelos
- Graficar  $\tilde{T}$  en función de  $l$  con las incertezas (o  $l$  en función de  $\tilde{T}$  dependiendo de los  $\varepsilon_{r\tilde{T}}$  y  $\varepsilon_{rl}$ ). Colocar las incertezas absolutas de la variable que estará en el eje “y” y agregar el ajuste por un modelo lineal. Graficar los residuos. *¿Utilizaría el modelo ponderado o no para el ajuste?*
- Obtener  $g = (\bar{g} \pm \Delta g)$  Ud. a partir de los resultados del ajuste.
- Graficar  $l$  en función de  $\tilde{T}$  con el fin de realizar un ajuste lineal para obtener el valor de  $b$ . *¿Tiene sentido físico  $b \neq 0$ ? A qué podría deberse?*

## DETERMINAR LA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD ( $g$ ) A PARTIR DE EXPERIMENTOS CON UN PÉNDULO

### ACTIVIDAD 1: USANDO CM

- Graficar  $T$  en función de  $l$  (gráfico de puntos con incertezas).  
*Discutir: ¿Qué forma parece tener la función graficada?*
- Obtener  $g = (\bar{g} \pm \Delta g) Ud.$  a partir del uso de un modelo lineal del método de cuadrados mínimos.
- Graficar  $l$  en función de  $T^2$  (gráfico de puntos con incertezas).  
Hacer un ajuste lineal y reportar el valor de la ordenada al origen ( $b$ ).  
*¿Resultó  $b \neq 0$ ? Discutir en qué posición del péndulo midió y qué distancia representaría  $b$ .*

¿Cuál es el resultado esperable de **b**, qué representa ?

¿Si **b**  $\neq$  0?

$$y = mx + b$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l$$

$$l = \frac{g}{4\pi^2} T^2$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l + b$$

$$l = \frac{g}{4\pi^2} T^2 + b$$

Unidades  
de longitud

$$l - b = \frac{g}{4\pi^2} T^2$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{g} l + b}$$

$$\frac{4\pi^2}{g} (l - b) = T^2 \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{g} (l - b)}$$

*b: corrección  
de la longitud*

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l - b}{g}}$$

**DETERMINAR LA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD ( $g$ ) A PARTIR DE EXPERIMENTOS CON UN PÉNDULO****ACTIVIDAD 2: USANDO MEDICIONES INDIRECTAS**

- Obtener  $g = (\bar{g} \pm \Delta g)$  Ud. usando  $T$  obtenido para **N=120** con el péndulo de **1 m** de la **Clase 2** y **Eq. 1**.
- Obtener  $g = (\bar{g} \pm \Delta g)$  Ud. usando  $T$  obtenido por **uno de los integrantes** del grupo en **Clase 2** para **N=40** con un **cronómetro** (péndulo de **1 m**).

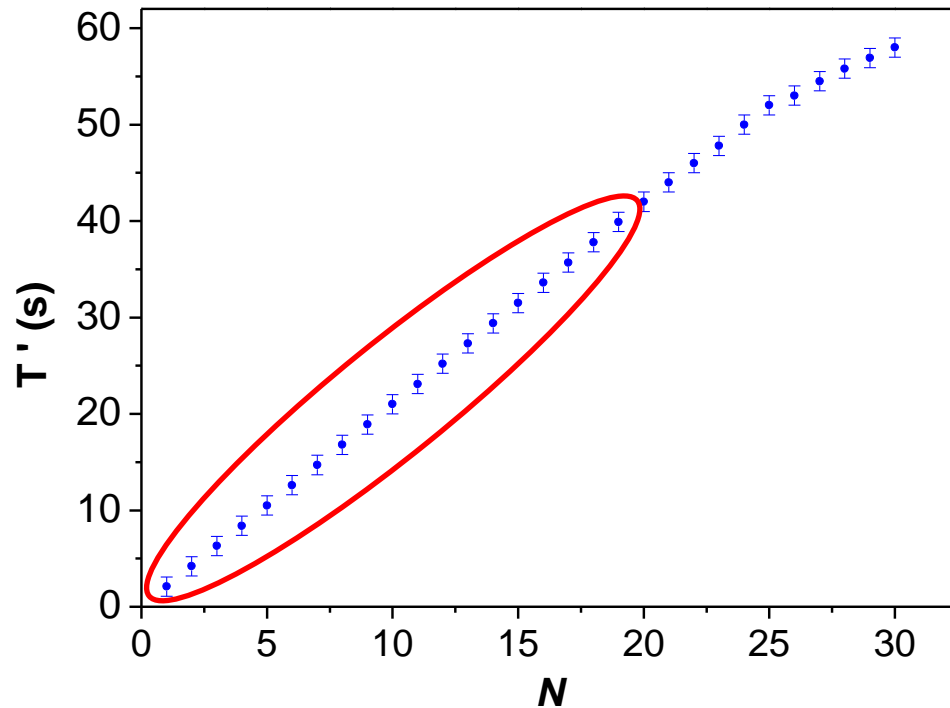
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (1)$$



**ACTIVIDAD 3**

- Armar un **péndulo de 1 m**. El **mismo integrante** que que midió la Clase 2, mida el período con un cronómetro de la siguiente manera:
  - Midan 1 período sólo ( $n=1$ )
  - Midan 2 período juntos ( $n=2$ )
  - Midan 3 período juntos ( $n=3$ )
  - ... y así hasta tener 40 juntos ( $n=40$ )
- Graficar  $T$  en función de  $n$  (gráfico de puntos **con incertezas**).  
Discutir: *¿Parece tener una forma lineal? ¿Qué esperarías?*
- Obtener  $T$  a partir del modelo lineal del método de CM. Hacer el gráfico de residuos y discutir.
- Calcular  $g = (\bar{g} \pm \Delta g) \text{ Ud}$ . Usando  $T$  de este experimento y Eq. 1.

Qué observamos en el gráfico del tiempo trascurrido en función del número de períodos...



Para un dado  $N$  la respuesta es lineal

**Puedo concluir que podría medir 1 sola vez  $N$  períodos juntos en lugar de medir  $N$  veces cada período**

## ACTIVIDAD 4: COMPARACIÓN DE RESULTADOS

- Comparara  $g$  de todas las Actividades empleando un gráfico comparativo y discutir:
  - ✓ *¿Presenta los resultados de  $g$  diferencias significativas entre sí?*
  - ✓ *¿Qué resultado fue más preciso?*
  - ✓ *¿Cuál el más exacto? Puede usar el valor de  $g$  medido en el Laboratorio  $g = 9.79688239 \text{ m/s}^2$*
  - ✓ *A cuántos  $\sigma$  quedó el resultado más exacto y el menos exacto del valor esperado de  $g$*
  - ✓ *¿Qué resultado de  $g$  considera que puede ser el más representativo de su sistema experimental?*

# ACTIVIDAD: ENTREGA 29-9 HASTA LAS 8 HS

## EN EL CAMPUS EN FORMATO PDF

- Gráfico de  $T$  en función de  $n$  con el ajuste lineal y el resultado de  $T$  expresado con 2 cifras significativas.
- Gráfico de  $g$  Comparativo (Actividad 4 completa, con las discusiones)