Clase 4

Laboratorio I C

Departamento de Física, FCEyN, UBA

1er cuatrimestre 2024

Docentes:
Gabriela Pasquini, Mauro Silberberg,
Luciana Martínez, Federico Szmidt

Página de la materia: https://materias.df.uba.ar/l1c2024c1/

Agradecemos a Lucía Famá y Ángel Marzocca por facilitarnos importante material para la preparación de estas clases.

Mediciones Indirectas

Directas (MD)

- La medida deseada se obtiene de la lectura del instrumento
- Ej.: medición del tiempo utilizando un cronómetro.

Mediciones Indirectas

Valor de una MF determinada en forma indirecta

$$\boldsymbol{W = f(x, y, z, \dots)}$$

$$x = x_0 \pm \Delta x$$

$$y = y_0 \pm \Delta y$$

$$z = z_0 \pm \Delta z$$

x, y, z ... variables independientes, cada una con sus unidades

$$\boxed{W = W_0 \pm \Delta W}$$

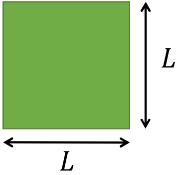
Valor más representativo

Error Absoluto

Mediciones Indirectas

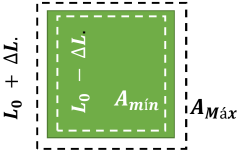
Veamos un ejemplo simple : Área de un cuadrado

$$\boxed{A = L^2}$$



Medimos en forma directa $L = L_0 \pm \Delta L.$

Estimemos un posible valor de A



$$\boxed{A = A_0 \pm \Delta A.}$$

$$A_0 - \Delta A \leq A \leq A_0 + \Delta A$$

$$A_{mín} \leq A \leq A_{Máx}$$

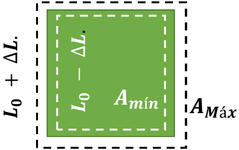
$$A_{Máx} = (L_0 + \Delta L)^2$$

$$A_{mín} = (L_0 - \Delta L)^2$$

Mediciones Indirectas: ejemplo

Medimos en forma directa $L = L_0 \pm \Delta L$.

Queremos: $\boxed{A = (A_0 \pm \Delta A).}$



$$A_{Máx} = (L_0 + \Delta L)^2$$

$$A_{mín} = (L_0 - \Delta L)^2$$

Valor más representativo : $\boxed{A_0 = {L_0}^2}$

Error Absoluto ΔA

$$\Delta A^{+} = A_{Máx} - A_0 = (L_0 + \Delta L)^2 - (L_0)^2 = 2L_0\Delta L + \cancel{\Delta L^2}$$

Los tiro si $\Delta L \ll L_0$

$$\Delta A^{-} = A_0 - A_{Min} = (L_0)^2 - (L_0 - \Delta L)^2 = 2L_0\Delta L - \cancel{\Delta L^2}$$

Entonces:

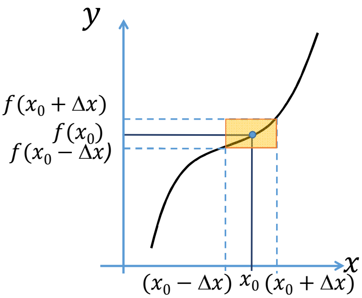
$$\Delta A = \Delta A^{+} = \Delta A^{-} = 2L_0\Delta L$$

$$\boxed{A = {L_0}^2 \pm 2L_0\Delta L}$$

Mediciones Indirectas: caso general de 1 variable

$W = f(x)$ Medimos en forma directa $x = x_0 \pm \Delta x$ $\boxed{W_0 = f(x_0)}$

$\boxed{\text{Incerteza en } W?}$



$$\Delta W^+ = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$$\Delta W^- = f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)$$

Pueden ser distintas!

Forma más general:

$$\boxed{W = W_0{}^{+\Delta W^+}_{-\Delta W^-}}$$

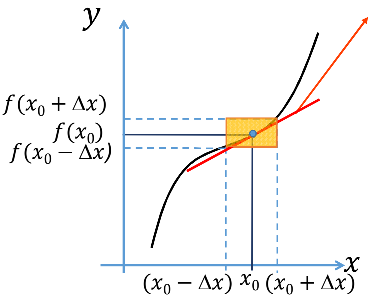
$$\boxed{W = W_0[+\Delta W^+, -\Delta W^-]}$$

Medio incomodo y complicado... Y la mayoria de las veces son muy parecidos

Mediciones Indirectas: caso general de 1 variable

$W = f(x)$ Medimos $x = x_0 \pm \Delta x$ $\boxed{W_0 = f(x_0)}$

$$\boxed{W = W_0 \pm \Delta W.}$$



Recta tangente a $f(x_0)$ La pendiente será: $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x_0}$

Desarrollo de Taylor:

$$W = f(x) \approx f(x_0) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} \overbrace{(x - x_0)}^{\pm\Delta x} + \dots$$

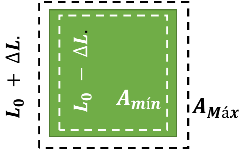
$$\boxed{W_0} \qquad \boxed{\pm\Delta W = \pm \left| \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x_0} \right| \Delta x}$$

Vale para Δx chicos, lejos de una sigularidad de f y si la derivada primera no es nula en x_0

Hace falta haber medido x en forma directa? DISCUTIR

Veamos esto en el ejemplo del area del cuadrado

Medimos en forma directa $L = L_0 \pm \Delta L$.



$$A_{Máx} = (L_0 + \Delta L)^2$$

$$A_{mín} = (L_0 - \Delta L)^2$$

Queremos: $\boxed{A = (A_0 \pm \Delta A).}$

$$\Delta A = \Delta A^{+} = \Delta A^{-} = 2L_0\Delta L$$

$$\Delta A^{+} = A_{Máx} - A_0 = (L_0 + \Delta L)^2 - (L_0)^2 = 2L_0\Delta L + \cancel{\Delta L^2}$$

Los tiro si $\Delta L \ll L_0$

$$\Delta A^{-} = A_0 - A_{Min} = (L_0)^2 - (L_0 - \Delta L)^2 = 2L_0\Delta L - \cancel{\Delta L^2}$$

$$\boxed{A = {L_0}^2 \pm 2L_0\Delta L}$$

VER SI COINCIDE CON DESARROLLO DE TAYLOR Y DISCUTIR

EJEMPLO NUMERICO:

$L = (15.3 \pm 0.1)$cm

CUANTO VALE A?

Qué pasa si las incertezas son estadísticas?

$$W = f(x) \qquad \boldsymbol{\sigma_{est}^2(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2$$

Si las dispersiones son chicas y etc...

$$\boldsymbol{\sigma_{est}^2\big(f(x)\big)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}\sum_{i=1}^{N}\big(f(\bar{x}) - f(x_i)\,\big)^2 \sim \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}\sum_{i=1}^{N}\left(\left.\frac{df}{dx}\right|_{\bar{x}}(x_i - \bar{x})\right)^2 = \left(\left.\frac{df}{dx}\right|_{\bar{x}}\right)^2 \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}\sum_{i=1}^{N}\big((x_i - \bar{x})\big)^2$$

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma_{est}^2\big(f(x)\big)} \sim \left(\left.\frac{df}{dx}\right|_{\bar{x}}\right)^2 \boldsymbol{\sigma_{est}^2(x)}}$$

$$x_0 = \bar{x}$$
$$\Delta x = \boldsymbol{\sigma_{est}(x)}$$
$$\Delta W = \boldsymbol{\sigma_{est}\big(f(x)\big)}$$

$$\boxed{\pm\Delta W = \pm\left|\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x_0}\right|\Delta x}$$

Mediciones Indirectas con dos variables

Veamos un ejemplo simple : Área de un rectangulo

Medimos:

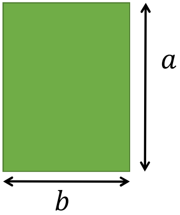
a= $a_0 \pm \Delta a$

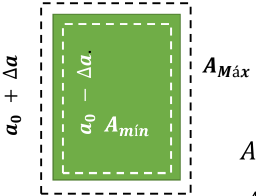
$b = b_0 \pm \Delta b$

$$\boxed{A = ab}$$

$$\boxed{A = A_0 \pm \Delta A..}$$

$$\boxed{A_0 = A(a_0, b_0) = a_0.b_0}$$





$$A_0 - \Delta A \leq A \leq A_0 + \Delta A$$

$$A_{mín} \leq A \leq A_{Máx}$$

$$A_{Máx} = (a_0 + \Delta a)\,(b_0 + \Delta b) = a_0 b_0 + a_0 \Delta b + b_0 \Delta a + \Delta a\, \Delta b$$

$$A_{mín} = (a_0 - \Delta a)\,(b_0 - \Delta b) = a_0 b_0 - a_0 \Delta b - b_0 \Delta a + \Delta a\, \Delta b$$

Mediciones Indirectas con dos variables

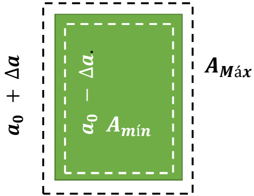
Veamos un ejemplo simple : Área de un rectangulo

$$\boxed{A = A_0 \pm \Delta A.}$$

$$\boxed{A_0 = A(a_0, b_0) = a_0 . b_0}$$

$$A_{Máx} = a_0 b_0 + a_0 \Delta b + b_0 \Delta a + \Delta a \, \Delta b$$

$$A_{mín} = a_0 b_0 - a_0 \Delta b - b_0 \Delta a + \Delta a \, \Delta b$$



$$\Delta A^{+} = A_{Máx} - A_0 = a_0 \Delta b + b_0 \Delta a + \cancel{\Delta a \, \Delta b}$$

$$\Delta A^{-} = A_0 - A_{Min} = a_0 \Delta b + b_0 \Delta a - \cancel{\Delta a \, \Delta b}$$

$$\boxed{A = A_0 \pm (a_0 \Delta b + b_0 \Delta a \,)}$$

Mediciones Indirectas: caso general de 2 variables

$$W = f(x,y)$$

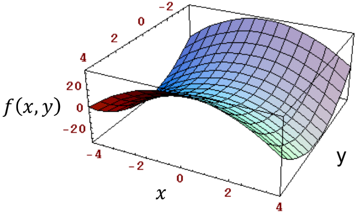
Medimos:

$x = x_0 \pm \Delta x$

$y = y_0 \pm \Delta y$

$$\boxed{W = W_0 \pm \Delta W.}$$

$$\boxed{W_0 = f(x_0, y_0)}$$



Si los errores son chicos y etc...

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) \approx f(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0, y_0} \Delta x$$

$$f(x_0, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x_0, y_0} \Delta y$$

$$\boxed{\Delta W = \left|\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0, y_0}\right| \Delta x + \left|\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x_0, y_0}\right| \Delta y}$$

Esto vale si Δx y Δy son cotas (por ejemplo, resolucion experimental)

Mediciones Indirectas: 2 variables con dispersión estadística

$$W = f(x,y) \qquad \sigma_{est}^2(x) \quad \sigma_{est}^2(y)$$

$$\sigma_{est}^2(f(x,y)) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(f(\bar{x},\bar{y}) - f(x_i,y_i))^2 \sim \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\left.\frac{df}{dx}\right|_{\bar{x}}(x_i-\bar{x}) + \left.\frac{df}{dy}\right|_{\bar{y}}(y_i-\bar{y})\right)^2 \sim$$

x , y independientes

$$\sim \left(\left.\frac{df}{dx}\right|_{\bar{x}}\right)^2 \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}((x_i-\bar{x}))^2 + \left(\left.\frac{df}{dy}\right|_{\bar{y}}\right)^2 \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}((y_i-\bar{y}))^2 + \cancel{2\left(\left.\frac{df}{dx}\right|_{\bar{x}}\right)\left(\left.\frac{df}{dy}\right|_{\bar{y}}\right)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}$$

$$\boxed{\sigma_{est}^2(f(x,y)) \sim \left(\left.\frac{df}{dx}\right|_{\bar{x}}\right)^2 \sigma_{est}^2(x) + \left(\left.\frac{df}{dy}\right|_{\bar{y}}\right)^2 \sigma_{est}^2(y)}$$

$$\boxed{(\Delta W)^2 = \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0,y_0}\right)^2 \Delta x^{\,2} + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x_0,y_0}\right)^2 \Delta y^{\,2}}$$

Ejemplo: area de un rectángulo

$$\boxed{\boldsymbol{A = a.b}}$$

$$a = (10 \pm 1)\ m$$
$$b = (50 \pm 2)\ m$$

$$\boxed{A_0 = A(a_0, b_0) = a_0.b_0}$$

$$A_0 = 500\ m^2$$

$$\frac{\partial A(a,b)}{\partial a} = b$$

$$\frac{\partial A(a,b)}{\partial b} = a$$

Si las incertezas son cotas:

$$\boxed{\Delta A = \left| \left.\frac{\partial A(a,b)}{\partial a}\right|_{a_0,b_0} \right| \Delta a + \left| \left.\frac{\partial A(a,b)}{\partial b}\right|_{a_0,b_0} \right| \Delta b}$$

$$\Delta A = a_0 \Delta b + b_0 \Delta a \qquad (50\,.1\ + 10\,.\,2\,)m^2 = 70m^2$$

Si las incertezas son estadisticas:

$$\boxed{\Delta A = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial A(a,b)}{\partial a}\right|_{a_0,b_0} \right)^2 \Delta a^2 + \left(\left.\frac{\partial A(a,b)}{\partial b}\right|_{a_0,b_0} \right)^2 \Delta b^2}}$$

$$\Delta A = \sqrt{{b_0}^2 \Delta a^2 + {a_0}^2 \Delta b^2} \qquad \sqrt{50^2.1^2 + 10^2.\,2^2}\ m^2 = 53{,}85\ m^2$$

$$\boxed{\boldsymbol{A = (500 \pm 70)\ m^2}} \qquad \boxed{\boldsymbol{A = (500 \pm 54)\ m^2}}$$

Mediciones Indirectas: caso general de N variables

$$W = f(x, y, z, \ldots) \qquad \boxed{W_0 = f(x_0, y_0, z_0, \ldots)}$$

Medimos:

$x = x_0 \pm \Delta x$

$y = y_0 \pm \Delta y$

$\mathrm{z} = z_0 \pm \Delta z$

......

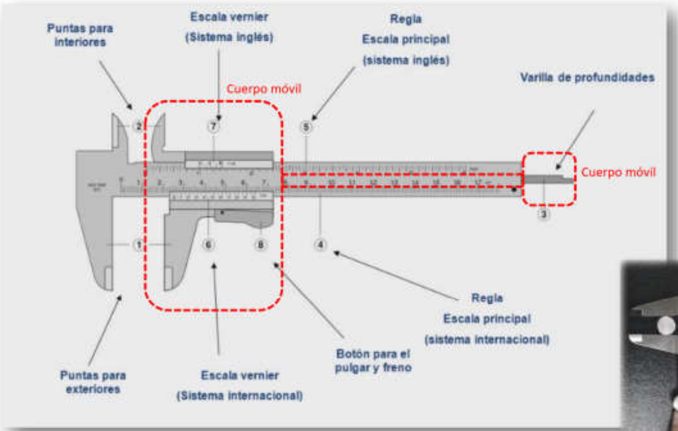
N variables con resolucion acotada:

$$\Delta W = \left| \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x_0, y_0, z_0} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{x_0, y_0, z_0} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_{x_0, y_0, z_0} \right| \Delta z + \cdots$$

N variables con dispersión estadística independientes:

$$(\Delta W)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x_0, y_0, z_0} \right)^2 \Delta x^{\,2} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{x_0, y_0, z_0} \right)^2 \Delta y^{\,2} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_{x_0, y_0, z_0} \right)^2 \Delta z^{\,2} + \cdots$$

El calibre


Puntas para interiores
Escala vernier (Sistema inglés)
Regla Escala principal (sistema inglés)
Cuerpo móvil
Varilla de profundidades
Cuerpo móvil
Regla Escala principal (sistema internacional)
Botón para el pulgar y freno
Escala vernier (Sistema internacional)
Puntas para exteriores

https://www.youtube.com/watch?v=RFhelsCKC9w

¿ Cómo se lee en un calibre ?

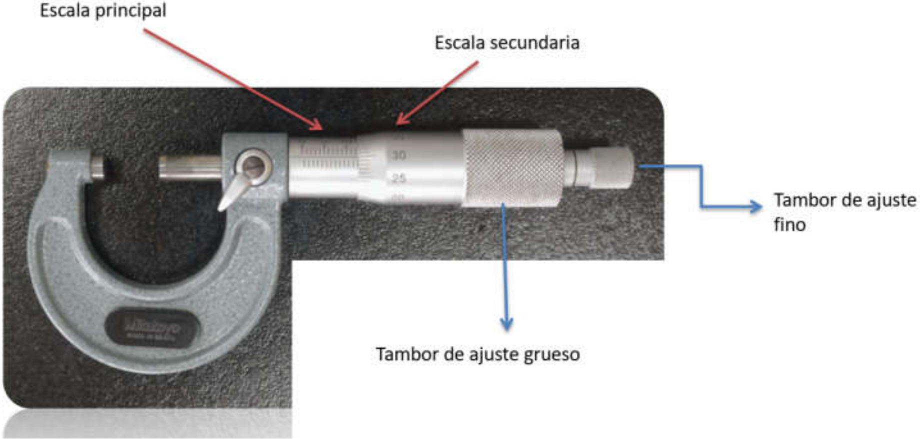
- El 0 (cero) de la parte móvil marca el intervalo de medida en el cual se encuentra el valor a determinar. Se toma límite inferior de ese intervalo con el entero (en la escala del calibre).
- Se busca en la regla móvil la concordancia entre divisiones de la regla móvil y la del cuerpo fijo. El valor correspondiente en la regla móvil indica la fracción de la medición.

El calibre

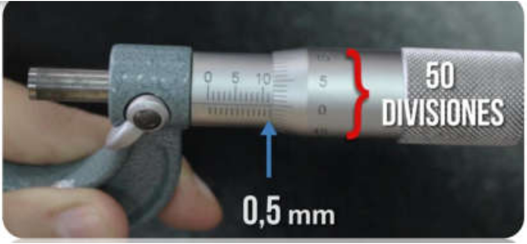
La medición está entre 12 y 13 mm.
Se fija como entero 12 mm

La concordancia está en 5,5 (la línea número 11) y cada mínima división es 0,05 mm, por lo tanto son 0,55 mm que se agregan a los 12 mm

El micrómetro



El micrómetro



Una vuelta de tambor es 0,5 mm
Cada división del tambor es de 0,01 mm
La incertidumbre es de 0,005 mm

Supongamos la medición del diámetro de un cilindro de metal

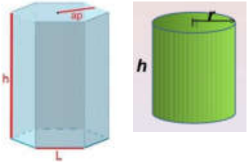
El micrómetro

16

ACTIVIDAD 1

Medir el volumen de un objeto con diferentes métodos y comparar los resultados.

1) Medir sus dimensiones y calcular el volumen.



2) Pesarlo y calcular el volumen a partir de una densidad conocida

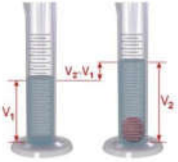
$$\rho = \frac{m}{V}$$

masa

volumen

- La densidad del Al (20°C) = 2,7 g/cm^3

3) Sumergirlo en un fluido y medir el volumen desplazado



ACTIVIDAD 2

Medir el diámetro de un alambre de manera directa (micrómetro) e indirecta (calibre y/o balanza). Comparar y discutir.