Clase 5

Laboratorio I C

Departamento de Física, FCEyN, UBA

1er cuatrimestre 2024

Docentes:
Gabriela Pasquini, Mauro Silberberg,
Luciana Martínez, Federico Szmidt

Página de la materia: https://materias.df.uba.ar/l1c2024c1/

Agradecemos a Lucía Famá y Ángel Marzocca por facilitarnos importante material para la preparación de estas clases.

Clase pasada: Mediciones Indirectas

Valor de una MF determinada en forma indirecta

Asumimos un modelo! → $\boldsymbol{W = f(x, y, z, \dots)}$

$$x = x_0 \pm \Delta x$$
$$y = y_0 \pm \Delta y$$
$$z = z_0 \pm \Delta z$$

x, y, z ... variables independientes, cada una con sus unidades

$$\boxed{W = W_0 \pm \Delta W}$$

Valor más representativo

Error Absoluto

Modelos y parámetros

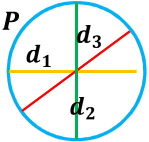
Es válido ese modelo?

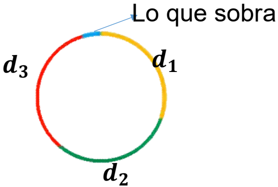
$$W = f(x, y, z, \dots)$$

Ejemplo 1:

Perímetro de un círculo: $P = \pi d$

π es el número de veces que entra ***d*** en ***P***





Objetivo: obtener π experimentalmente y ver si es consistente con el calculado.

Mediciones Indirectas

$$\boxed{P = \pi d}$$

En este caso concreto eso que sería?

Asumimos que es válido el modelo

Confiamos en nuestra metodología experimental

Medimos en forma directa: $P = P_0 \pm \Delta P \qquad d = d_0 \pm \Delta d$

En este caso concreto eso que sería?

$$P = \pi d \Rightarrow \boxed{\pi = \frac{P}{d}} \qquad \boxed{\pi = \pi_0 \pm \Delta\pi}$$

Obtenemos Δπ propagando incertezas

Podemos repetir con muchos círculos, promediar y hallar la incerteza como la desviación de la media

$$P_1 = P_0 \pm \Delta P \qquad d_1 = d_0 \pm \Delta d$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$P_{10} = P_0 \pm \Delta P \qquad d_{10} = d_0 \pm \Delta d$$

Modelos y parámetros

Es válido ese modelo?

Es correcta nuestra metodología experimental?

En el caso de este experimento:

- Es válido suponer que P es proporcional a d? Son circulos?
- Todos los círculos que medimos cumplen con esa relación?
- El parámetro que obtengo es consistente con el π calculado?

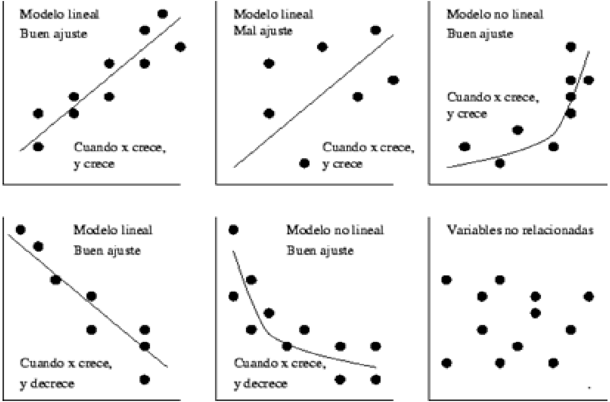
Relación entre dos variables (x, y) a partir de un modelo matemático

El modelo nos predice una funcion $y = f(x)$

Medimos un conjunto de datos experimentales (x_i, y_i)

Nos preguntamos si $f(x)$ es un buen modelo para esos datos

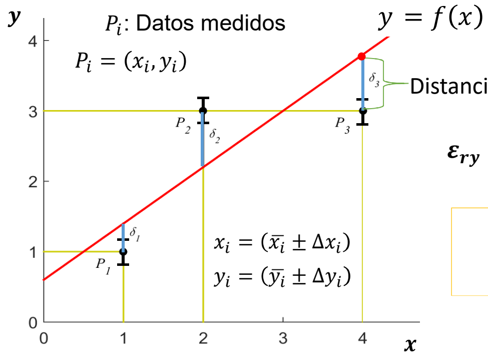
Que podriamos decir “a ojo”



Relación entre dos variables (x, y) a partir de un modelo matemático

Como cuantificar la bondad del modelo?

Considerando la **Distancia en "y"**



Distancia ➡ **Residuos** (δ_i)

$$\varepsilon_{ry} = \left|\frac{\Delta y}{y_o}\right| \qquad \varepsilon_{rx} = \left|\frac{\Delta x}{x_o}\right|$$

Hipótesis:

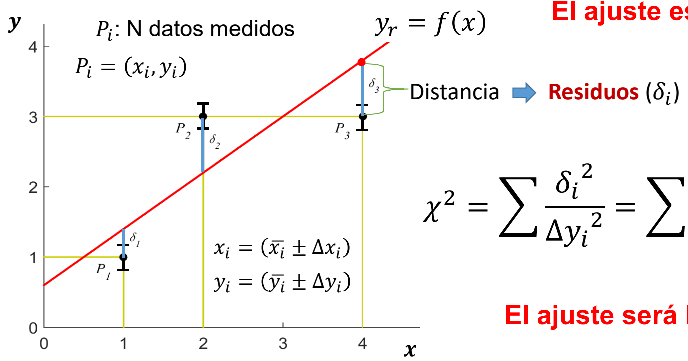
$$\varepsilon_{ry} \gg \varepsilon_{rx}$$

Tengo bien definido experimentalmente el valor de x

El ajuste es bueno si $\delta_i \sim \Delta y_i$

Relación entre dos variables (x, y) a partir de un modelo matemático

Como cuantificar la bondad del modelo?



El ajuste es bueno si $\delta_i \sim \Delta y_i$

$$\chi^2 = \sum \frac{{\delta_i}^2}{{\Delta y_i}^2} = \sum \frac{\left(\overline{y_i} - f(\overline{x_i})\right)^2}{{\Delta y_i}^2}$$

El ajuste será bueno si $\chi^2 \sim N$

Ajuste de funciones a datos experimentales: método de cuadrados mínimos

Qué significa “ajustar” una función a un conjunto de datos?

- En base a nuestro modelo, definimos una función genérica con $\boldsymbol{n}$ **parámetros libres**
  - Buscamos el grupo de valores de los n parámetros que minimice el $\boldsymbol{\chi^2}$

$$\chi^2 = \sum \frac{\left(y_i - y(x_i)\right)^2}{\Delta y_i^{\,2}} \qquad \chi_\nu^2 = \frac{1}{N-n} \sum \frac{\left(y_i - y(x_i)\right)^2}{\Delta y_i^{\,2}}$$

Funciónes lineales

con $n = 2$: $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{mx} + \boldsymbol{b}$

con $n = 1$: $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{mx}$

Funciónes cuadráticas

con $n = 3$: $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{ax^2} + \boldsymbol{mx} + \boldsymbol{b}$

con $n = 1$: $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{ax^2} + \boldsymbol{4}$

Ajuste bueno si

$\boldsymbol{\chi^2 \sim N}$

$\boldsymbol{\chi_\nu^2 \sim 1}$

Ajuste de funciones lineales a datos experimentales: método de cuadrados mínimos

Ejemplo más sencillo:

- Función lineal: $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{mx} + \boldsymbol{b}$
- Todas las incertezas absolutas son iguales: $\Delta y_i = \Delta y$

- Buscamos el grupo de valores de ($\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{b}$) que minimice el $\boldsymbol{\chi^2}$

$$\chi^2 = \sum \frac{\left(y_i - y(x_i)\right)^2}{\Delta {y_i}^2} = \frac{1}{\Delta y^2} \sum (y_i - \boldsymbol{m}x_i + \boldsymbol{b})^2$$

Minimizar $\mathrm{M}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{b}) = \sum (y_i - \boldsymbol{m}x_i + \boldsymbol{b})^2$

Ajuste de funciones lineales a datos experimentales: método de cuadrados mínimos

universidad de buenos aires - exactas
departamento de Física

Minimizar $\mathrm{M}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{b}) = \sum(y_i - \boldsymbol{m}x_i + \boldsymbol{b}\ )^2$

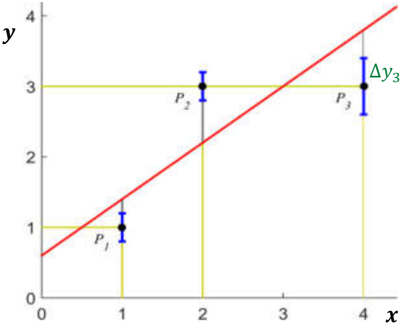
$$M(a,b) = \sum_i {y_i}^2 + a^2 \sum_i {x_i}^2 + N b^2 + 2ab \sum_i x_i - 2a \sum_i x_i y_i - 2b \sum_i y_i$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial a} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial M}{\partial b} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a \sum_i {x_i}^2 + 2b \sum_i x_i - 2 \sum_i x_i y_i = 0 \\[2ex] 2Nb + 2a \sum_i x_i - 2 \sum_i y_i = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{m = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}} \qquad \boxed{b = \frac{\sum {x_i}^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}}$$

Ajuste de funciones lineales a datos experimentales: cuadrados mínimos ponderado

$$y = f(x) = mx + b$$



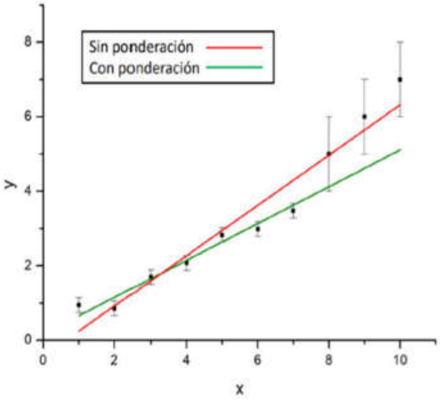
Considera la incerteza de cada dato

$$\boxed{\chi^2 = \sum_1^N \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{\Delta y_i}\right]^2}$$

las medidas más precisas son las más relevantes

La expresión es más complicada...

Ajuste de funciones lineales a datos experimentales: cuadrados mínimos ponderado



SIN ponderacion mnimiza

$$M = \sum_{1}^{N} [y_i - (mx_i + b)]^2$$

CON ponderacion minimiza

$$\chi^2 = \sum_{1}^{N} \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{\Delta y_i}\right]^2$$

Pueden dar resultados distintos

Método de cuadrados mínimos

¿ Y si el error en x no es despreciable ?

Hay métodos generales para errores en ambas variables, pero son más complicados.

Lo habitual es elegir como x la variable con menor error, y despreciarlo.

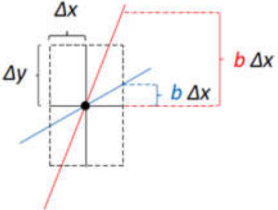
¿ Qué criterio se puede tomar ?

$$\Delta x \leq \Delta y$$

¿Y si x e y no son la misma magnitud?

$$\frac{\Delta x}{x} \leq \frac{\Delta y}{y}$$

Mejor ¿pero no depende de más nada?



Lo mejor es elegir x e y, aplicar cuadrados mínimos para estimar b, y chequear que se satisfaga: $b\,\Delta x \leq \Delta y$

Si no se cumple, hay que invertir los ejes, y aplicar el método para encontrar otros parámetros:

$$x = c + m\,y$$

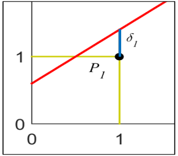
Pero queremos $y = a + b\,x \quad \Rightarrow \quad b = \dfrac{1}{m} \quad a = -\dfrac{c}{m}$

Método de cuadrados mínimos

- **¿Cómo encontramos Δm y Δb?**

$$m = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2} \qquad b = \frac{\sum {x_i}^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}$$

Propagación de errores!!



Recordemos que asumimos que Δx_i es despreciable y Δy cte.
Supongamos ademas que son de naturaleza estadistica

$$\boxed{\Delta m = \Delta y \sqrt{\frac{N}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}}} \qquad \boxed{\Delta b = \Delta y \sqrt{\frac{\sum {x_i}^2}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}}}$$

OJO! ESTO ES LO QUE HACEN LOS PROGRAMAS POR DEFAULT!

Qué incerteza adjudicamos a los parámetros si no conocemos la incerteza Δy? $\Delta y \sim \sqrt{\frac{\sum {\delta_i}^2}{N-2}}$

Otros estimadores de bondad de ajuste

Coeficiente de determinación

RESIDUOS δ_i

$$R^2 = \frac{\sum\left(y(x_i) - \frac{1}{N}\sum y_i\right)^2}{\sum\left(y_i - \frac{1}{N}\sum y_i\right)^2} = 1 - \frac{\sum(y(x_i) - y_i)^2}{\sum\left(y_i - \frac{1}{N}\sum y_i\right)^2}$$

tiende a 1 cuando el ajuste es bueno

Otros estimadores de utilidad

Coeficiente de correlación lineal de Pearson

Asociado a la correlación lineal entre las variables X e Y

$$\boxed{r = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var(x)Var(y)}} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y}}$$

$$Var(x) = {S_x}^2 = \frac{1}{N}\sum (x_i - \bar{x})^2$$

$$Var(y) = {S_y}^2 = \frac{1}{N}\sum (y_i - \bar{y})^2$$

$$\boxed{-1 \le r \le 1}$$

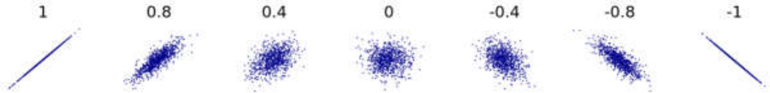
$$Cov(x,y) = S_{xy} = \frac{1}{N}\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Si la correlacion lineal es alta $|r| \sim 1$

$$r^2 = \frac{\left(\Sigma\left(y_i - \frac{1}{N}\Sigma y_i\right)\left(x_i - \frac{1}{N}\Sigma x_i\right)\right)^2}{\Sigma\left(y_i - \frac{1}{N}\Sigma y_i\right)^2 \Sigma\left(x_i - \frac{1}{N}\Sigma x_i\right)^2}$$

OJO: r NO NOS HABLA DEL AJUSTE,
NOS DICE SI HAY DEPENDENCIA LINEAL

Coeficiente de Correlación de Pearson (r)



•**Si r = 1:** Correlación positiva perfecta. El índice refleja la dependencia LINEAL entre ambas dos variables, la que se denomina relación directa: cuando una de las variables aumenta, la otra variable aumenta en proporción constante.

•**Si 0 < r < 1:** Refleja que se da una correlación positiva.

•**Si r = 0:** En este caso no hay una relación lineal. Aunque no significa que las variables sean independientes, puede haber relaciones no lineales entre ambas.

•**Si -1 < r < 0:** Indica que existe una correlación negativa.

•**Si r = -1:** Indica una **correlación negativa perfecta** y una dependencia lineal entre ambas variables lo que se conoce como **"relación inversa"**, que es cuando una de las variables aumenta, la otra variable disminuye en proporción constante.

Recordemos: estimador de bondad de ajuste

Chi cuadrado reducido (χ_ν^2)

Dimensiona cuánto difieren los datos experimentales de los predichos por el modelo, considerando las incertezas experimentales.
A partir de test estadísticos permite estimar la probabilidad de que los datos NO cumplan con las hipótesis del modelo. PARA MAS ADELANTE!

$$\boxed{\chi^2 = \sum_1^N \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{\Delta y_i}\right]^2}$$

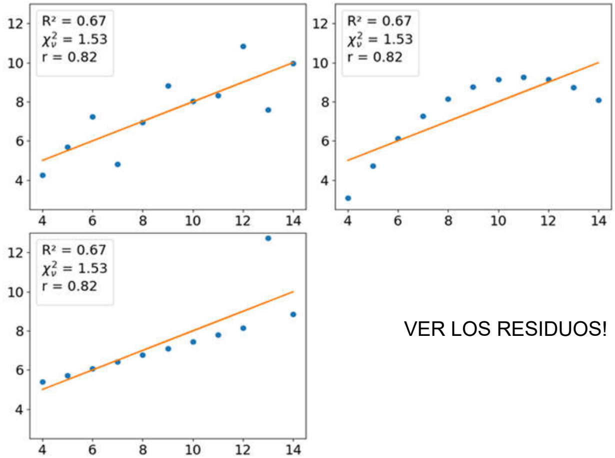
Caso lineal:
N = número de datos
2: numero de parametros libres

Chi cuadrado reducido $\Rightarrow$ $\chi_\nu^2 = \dfrac{\chi^2}{N-2}$

Se espera que χ_ν^2

$$\begin{cases} \chi_\nu^2 \sim 1 & ✓ \\ \chi_\nu^2 \ll 1 & ✗ \\ \chi_\nu^2 \gg 1 & ✗ \end{cases}$$

Pero **OJO!** Estos casos tienen igual valor de r (malo) y χ_ν^2 (bueno)



VER LOS RESIDUOS!

Bondad de ajuste: residuos

Distancia de los puntos experimentales al modelo

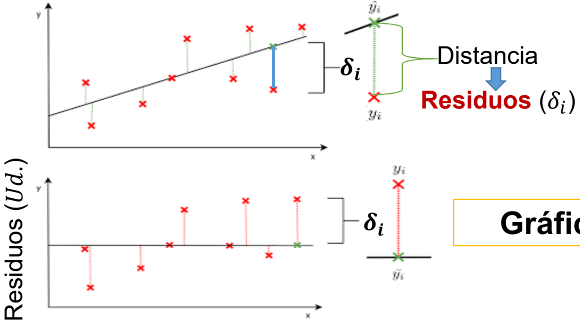
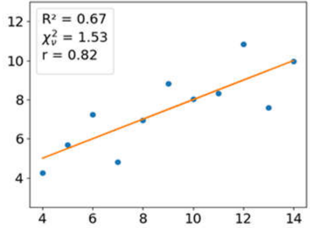
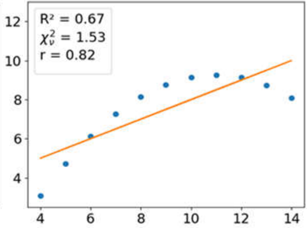
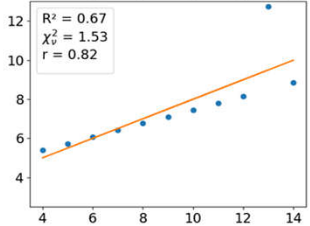


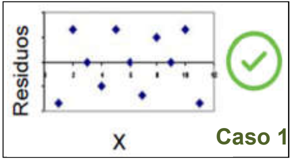
Gráfico de Residuos

Bondad de ajuste: residuos

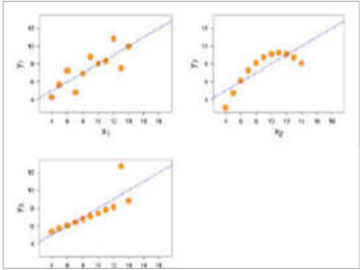








NO tiene estructura



Modelos y parámetros

Es válido ese modelo?

Es correcta nuestra metodología experimental?

En el caso de este experimento:

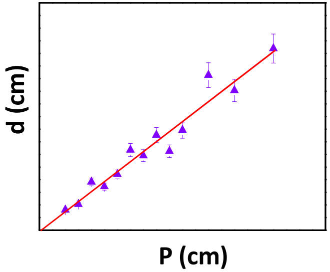
- Es válido suponer que P es proporcional a d?
- El parámetro que obtengo es consistente con el π calculado?

$$\boxed{\boldsymbol{P = \pi d}}$$

$\varepsilon_{rd} > \varepsilon_{rP}$

EXPERIMENTO 1

$$P = \pi d$$



1 parámetro (ordenada nula)

$$d = \frac{P}{\pi} \Rightarrow d = \frac{1}{\pi} P$$

y x

Pendiente $m = \bar{m} + \Delta m$

$$m = \frac{1}{\pi} \qquad \boxed{\pi = \frac{1}{m}} \rightarrow \bar{\pi} = \frac{1}{\bar{m}} \qquad ¿\Delta\pi?$$

O 2 parámetros: $$d = \frac{1}{\pi} P + b$$

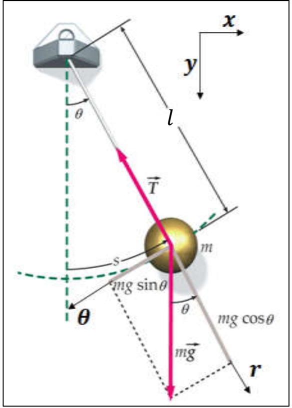
DISCUTIR

Ejemplo 2:

Modelos y parámetros

Período de un péndulo en pequeñas oscilaciones

Diagrama de cuerpo libre



Resolviendo la Ecuación de 2do orden

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} sen\theta = 0}$$

$$\theta \ll 1 \Rightarrow sen\theta \approx \theta$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0}$$

LO VAMOS A REPASAR
EN DETALLE EN
LAS PROXIMAS CLASES

Solución: $\theta(t) = \theta_0 \cos(wt + \varphi)$

donde $w = \sqrt{\frac{g}{l}}$ $\quad \mathrm{f} = \frac{w}{2\pi}$ $\quad \mathrm{T} = \frac{2\pi}{w}$

Período de un péndulo de longitud *l*

$$\boxed{\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}}$$

EXPERIMENTO 2

1 parámetro (ordenada nula)

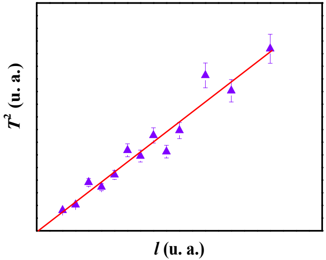
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow \boxed{T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l$$

y x

Pendiente $m = \bar{m} + \Delta m$

$$m = \frac{4\pi^2}{g} \qquad \boxed{g = \frac{4\pi^2}{m}} \rightarrow ¿\Delta g?$$



O 2 parámetros: $T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l + b$

DISCUTIR