

# Fenómenos transitorios en circuitos. Resonancia en un RLC.

Lista de autores

Laboratorio 3 B, segundo cuatrimestre 20xx cátedra Pasquini

Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

## Resumen

Se estudiaron circuitos RC y RL en su régimen transitorio. En base a las mediciones de la caída de tensión en la resistencia en función del tiempo, se obtuvieron valores del tiempo característico  $\tau$  del transitorio en función de uno de los parámetros que se variaba ( $C$  en el caso del RC y  $L$  en el RL). Con un ajuste de los valores de  $\tau$ , se logró obtener el valor de la resistencia total del circuito para el RC (que fue de alrededor del 17% mayor a la de la caja de resistencia utilizada) y la inductancia para el RL (que fue similar a la utilizada). Por otra parte, se estudió la resonancia de un circuito RLC haciendo un barrido de frecuencias. Fue posible hacer un ajuste de campana de Lorentz para las mediciones de voltaje en función de la frecuencia y un ajuste de  $\arctan(\phi)$  para la fase en función de la frecuencia. De ambos ajustes fue posible obtener, por un lado, la frecuencia de resonancia del sistema y, por otro, el valor de la resistencia adicional del circuito (aquella que no se debía a la caja de resistencias). Se advirtió que su valor era alrededor del 30% mayor a la debida a la caja de resistencias: este descubrimiento reafirmó la idea de que las resistencias de los demás elementos conectados no resultaban despreciables.

## 1. Introducción

En este trabajo se buscó experimentar con diferentes tipos de circuitos. En particular, se tuvo especial interés por los regímenes transitorios de dichos circuitos. Cuando al menos uno de los componentes de un circuito eléctrico cambia alguna de sus propiedades, se inicia una etapa en la que también se modifican las variables que describen el estado del circuito (corrientes de ramas o mallas, o diferencias de tensión entre nodos), tendiendo hacia un estado de equilibrio compatible con dicho cambio. Mientras las variables eléctricas evolucionan hacia el equilibrio, se dice que el circuito se encuentra en estado o régimen transitorio. Si no ocurren nuevos cambios, finalmente se alcanza el denominado estado, o régimen, estacionario (1, pág. 37). En particular, interesa analizar los transitorios en circuitos RC y RL.

Los circuitos RC serie están compuestos por una fuente de tensión, una resistencia y un capacitor, conectados en serie (ver Figura 1). A partir de la Ley de Mallas es posible obtener la ecuación diferencial que describe el comportamiento del circuito, que, junto a las condiciones iniciales, permiten hallar la evolución de los parámetros durante el régimen transitorio. Será de especial interés el caso de la descarga del capacitor cargado a un voltaje inicial cuando se abre la llave (es decir, se deja de

aplicar tensión). En este caso, la caída de potencial a través de la resistencia es de la forma

$$V_R = V_0 e^{-\frac{t}{R_T C}} \quad (1)$$

donde  $V_0$  es el voltaje inicial,  $R_T$  la resistencia total del circuito y  $C$  la capacitancia.

Se define el tiempo característico  $\tau$  como aquel en que el voltaje disminuye a  $e^{-1} \approx 0,37$ . Para un circuito RC es

$$\tau := R_T C \quad (2)$$

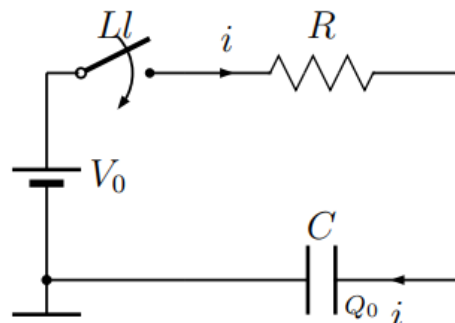


Figura 1: Circuito RC. Presenta una resistencia  $R$ , un capacitor  $C$  con carga inicial  $Q_0$  y una fuente de tensión  $V_0$  conectados en serie. La llave  $Ll$  permite cerrar el circuito en un determinado tiempo, a partir del cual comienza a circular corriente en el régimen transitorio del circuito.

Por otro lado, los circuitos RL tienen una inductancia conectada en serie en lugar de un capacitor (ver Figura 2). En el caso a analizar en que se abre la llave y se deja de aplicar la tensión inicial, la caída del voltaje a través de la resistencia estará dada por la ecuación

$$V_R = V_0 e^{-\frac{R_T}{L}t} \quad (3)$$

donde  $L$  es la inductancia. En este caso, el tiempo característico viene dado por

$$\tau := \frac{L}{R_T} \quad (4)$$

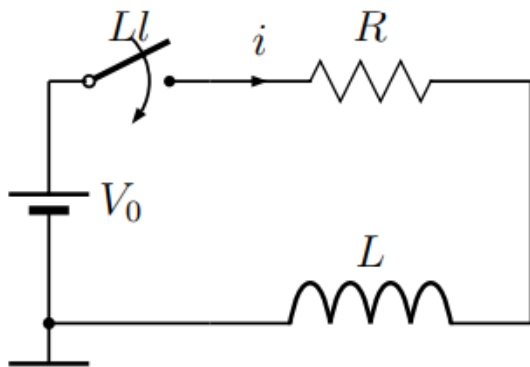


Figura 2: Circuito RL. Presenta una inductancia  $L$  conectada en serie con la fuente y la resistencia.

Finalmente, los circuitos RLC son aquellos que tienen conectados en serie una fuente de tensión, una resistencia, un capacitor y una inductancia (ver Figura 3).

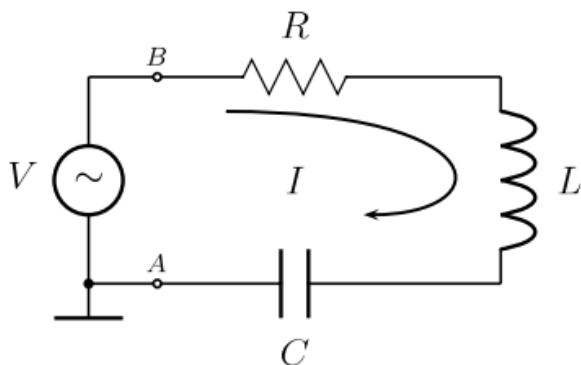


Figura 3: Circuito RLC. Presenta una resistencia  $R$ , una inductancia  $L$ , un capacitor  $C$  con carga inicial  $Q_0$  y una fuente de tensión conectados en serie.

Los regímenes estacionarios de este último tipo de circuitos, al ser alimentados por una fuente de tensión alterna armónica, se caracterizan por tener

una respuesta diferente según la frecuencia de ésta. (2) En particular, a partir de la expresión para la caída de potencial en la resistencia

$$V_R = \frac{V_0 \frac{R_R}{R_T}}{\sqrt{1 + \left(2\pi \frac{L}{R_T} f - \frac{1}{2\pi R_T C f}\right)^2}} \quad (5)$$

donde  $V_0$  es el voltaje de la fuente,  $R_R$  es la resistencia  $R$ ,  $R_T$  la resistencia total del circuito y  $f$  la frecuencia temporal de la fuente; es posible deducir que existirá una campana de resonancia cuyo máximo ocurrirá para la frecuencia natural del sistema, dada por

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (6)$$

Para esta frecuencia, el desfase entre la tensión de entrada y de salida (provocado por las impedancias del capacitor y la inductancia) será nulo. Éste último viene dado por

$$\Delta\varphi = \tan^{-1} \left( \frac{f^2 LC - 1}{2\pi f C R_T} \right) \quad (7)$$

Se puede definir un ancho para la campana de resonancia dado por la banda de frecuencias delimitada por aquellas en las que el voltaje disminuye a la mitad. De esta manera, se tiene que este ancho es de

$$\Delta f = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{R_T}{L} \quad (8)$$

Cabe destacar que los circuitos con los que se trabajó en el laboratorio son reales: sus elementos (como las resistencias, capacitores, inductancias, cables, osciloscopios, etc.) tendrán, entre otras cosas, resistencias y capacidades internas. ¿Serán relevantes las resistencias de dichos elementos en comparación a la de la caja de resistencias que utilizaremos? ¿O resultará adecuado suponer que son despreciables? Estas son algunas de las interrogantes que se explorarán en este trabajo.

En la Sección 2 se describen los detalles experimentales, divididos en la Sección 2.1 de transitorios para RC y RL, y la Sección 2.2 de resonancia en un circuito RLC. En la Sección 3 se exponen los resultados de cada experiencia y su discusión, transitorios en la Sección 3.1 y resonancia en la Sección 3.2. Finalmente, en la Sección 4 se encuentran las conclusiones del trabajo.

## 2. Detalle experimental

Para esta serie de experiencias se utilizó el siguiente instrumental: un Osciloscopio Tektronix

TBS1052B-EDUMultímetro LINI-T UT55, un generador de funciones Tektronix AFG1022, una caja de resistencias (de hasta 10 M $\Omega$ ), una caja de resistencias (de hasta 10 k $\Omega$ ), una caja capacitor DK4A, una caja de inductancia Decade Inductor type DI3A y un Multímetro LINI-T UT55.

## 2.1. Circuitos en estado transitorio

En esta serie de experiencias se tuvo como objetivo estudiar el régimen transitorio de dos tipos de circuitos: un RC y un RL. En particular, se buscó medir el tiempo característico a través de la medición de la caída de potencial a través de la resistencia conectada al circuito.

Para llevar a cabo el estudio experimental de fenómenos transitorios de un circuito eléctrico resultaba conveniente alimentarlo con una onda cuadrada, que se comportaba como una fuente de tensión (continua) que alternativamente toma los valores  $V_0$  y 0. Esto evitaba la necesidad de accionar manualmente una llave eléctrica. Para que esto no influya en los regímenes transitorios fue necesario elegir un período mucho menor que el tiempo característico del sistema. En todos los casos se generó una onda cuadrada de 20 Hz y 5,2 Vpp.

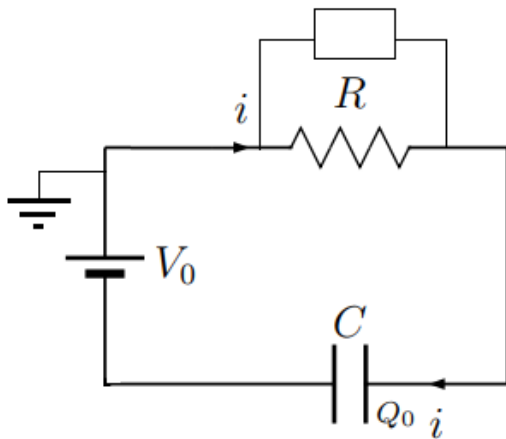


Figura 4: Circuito RC. Conectados en serie, una caja de resistencias de valor fijo  $R$  (de hasta 10 k $\Omega$ ), una caja capacitadora con capacidad fijo  $C$  y un generador de funciones que emite una señal de voltaje  $V_0$ . El cable que conecta el generador a la resistencia está a su vez conectado a tierra. Además, se conecta en paralelo a la resistencia un osciloscopio que permite medir la caída de voltaje allí.

Se armó un circuito RC como en la Figura 4. Se conectó en serie un generador de funciones, una caja capacitadora y una caja de resistencias. A la vez, se conectó el osciloscopio en paralelo a la resistencia

para medir la caída del potencial. Una vez en funcionamiento, se procedió a medir dejando el valor de la resistencia fijo y variando la capacidad  $C$ . Se hicieron entonces 5 mediciones con  $R = 10$  k $\Omega$  de la caja de resistencias constante, variando la capacitancia  $C$  en un rango de entre 0,2 y 0,8  $\mu$ F.

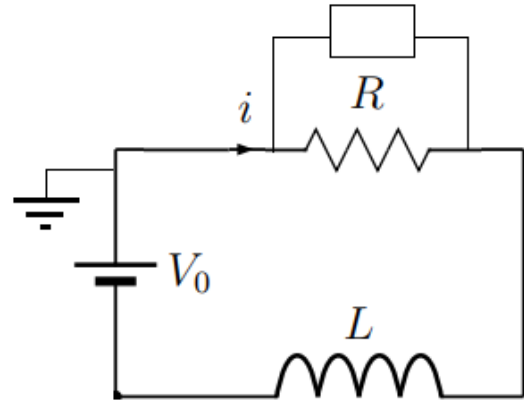


Figura 5: Circuito RL. Conectados en serie, una caja de resistencias de valor fijo  $R$  (de hasta 10 k $\Omega$ ), una caja de inductancias con  $L$  fijo y un generador de funciones que emite una señal de voltaje  $V_0$ . El cable que conecta el generador a la resistencia está a su vez conectado a tierra. Además, se conecta en paralelo a la resistencia un osciloscopio que permite medir la caída de voltaje allí.

Por otra parte, se armó un circuito RL (ver fig. (5)) similar al anterior: solamente se reemplazó la caja capacitadora por una caja de inductancia. Una vez en funcionamiento, se tomaron 5 mediciones, con un valor de inductancia  $L = (1,00100,0001)$  H constante, variando la resistencia  $R_R$  entre 2 y 10 k $\Omega$ .

## 2.2. Resonancia en un circuito RLC

Se armó un circuito RLC en el que se conectó en serie un generador de funciones, una caja capacitadora, una caja de inductancias y una caja de resistencias (ver Figura 6). Se usaron los siguientes valores en las cajas:  $R = (1000 \pm 1)$  ohm,  $C = (25,015 \pm 0,005)$  nF,  $L = (1,0010 \pm 0,0001)$  H, medidos con un medidor lcr Tecpel LCR 612. Se buscó que dichos valores fueran tal que la campana fuera razonablemente angosta. Se envió entonces con el generador una señal de  $(1,000 \pm 0,010)$  Vpp armónica y frecuencia  $f$  variable.

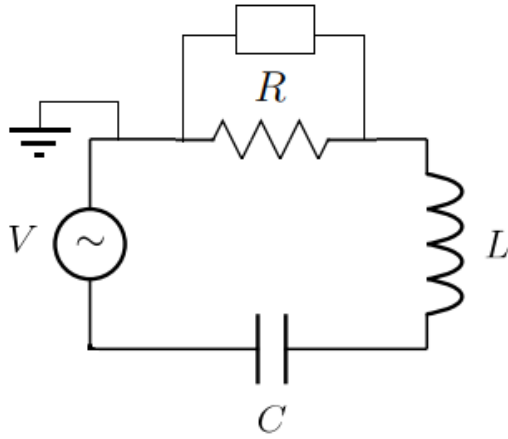


Figura 6: Circuito RLC. Conectados en serie, una caja de resistencias de valor fijo  $R$  (de hasta  $10\text{ k}\Omega$ ), una caja de inductancias con  $L$  fijo, una caja capacitadora con  $C$  fijo y un generador de funciones que emite una señal de voltaje  $V_0$ . El cable que conecta el generador a la resistencia está a su vez conectado a tierra. Además, se conecta en paralelo a la resistencia un osciloscopio que permite medir la caída de voltaje allí.

### 3. Resultados y discusión

#### 3.1. Circuitos en estado transitorio

En la Figura (7) se muestran los valores del tiempo característico  $\tau$  según el valor de la capacidad para el circuito RC, en el que el valor elegido para la resistencia (de la caja) se dejaba fijo en un valor de  $(10 \pm 0,001)\text{ k}\Omega$ . Cada valor de  $\tau$  fue obtenido a partir de un ajuste de la caída del voltaje en la resistencia en función del tiempo, dado por la ecuación (1). Luego, se hizo un ajuste lineal sabiendo que  $\tau$  responde a la ecuación (2), a partir del cual se obtuvo la resistencia adicional del circuito, es decir, aquella no contemplada por la resistencia  $R_R$  de la caja, sino provocada por otros elementos del circuito. Dicho valor fue de  $R = (1,652 \pm 0,059)\text{ k}\Omega$ . Éste presenta un valor de  $\chi^2$  un orden mayor que 1 y la presencia de lo que pareciera ser un *outlier* para  $C = 0,6\mu\text{F}$ , indicadores de que el ajuste es pobre. El valor de la resistencia adicional no es despreciable frente a la resistencia total, sino que representa un  $(16,52 \pm 0,59)\%$  de ella. Este hecho se explica con el aporte de resistencia de los demás elementos del circuito, como la caja de inductancias.

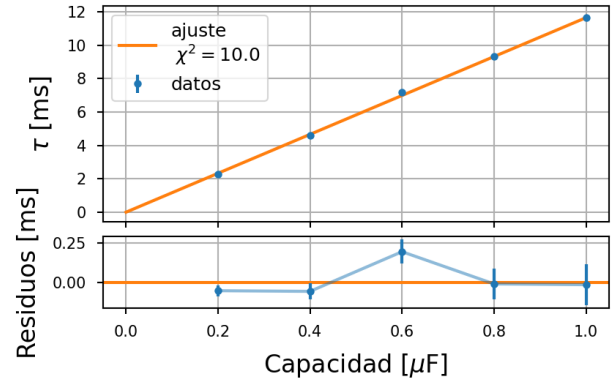


Figura 7: Tiempo característico  $\tau$  en función de la capacidad para un circuito RC, junto con un ajuste lineal y sus residuos.

Por otra parte, en la Figura (8) se muestran los valores de  $\tau$  según el valor de la resistencia (de la caja) para el circuito RL, en el que el valor elegido para la inductancia se dejaba fija en un valor de  $(1,0010 \pm 0,0001)\text{ H}$ . Cada valor de  $\tau$  fue obtenido a partir de un ajuste de la caída del voltaje en la resistencia en función del tiempo, dado por la ecuación (3). Luego, se hizo un ajuste sabiendo que  $\tau$  responde a la ecuación (4), a partir del cual se obtuvo como parámetro la inductancia total del circuito,  $(0,983 \pm 0,006)\text{ H}$ , valor que se encuentra a 3,1 sigmas de distancia del medido en la caja de inductancias aproximadamente. El  $\chi^2$  arrojado, siendo menor que 1, podría indicar una sobreestimación de los errores o un sobreajuste; pero al no diferir tanto podría afirmarse que se trata de un buen ajuste. Para realizar el ajuste se tuvo en cuenta que la resistencia involucrada en la ec. (4) es la total del circuito, por lo que se agregó un parámetro que representa la resistencia adicional, cuyo valor arrojado es de  $(0,282 \pm 0,015)\text{ k}\Omega$ . Este orden es lógicamente atribuible a alguna resistencia parásita del circuito real.

#### 3.2. Resonancia en un circuito RLC

Se realizó un gráfico con el barrido de frecuencias obtenido para la caída de potencial en la resistencia de un circuito RLC (ver fig. 9). En él se puede observar la campana de resonancia característica del circuito. Se realizó un ajuste con una campana de Lorentz cuyos residuos no presentan estructura, además de arrojar un  $\chi^2$  cuadrado algo menor que 1 (de 0,48 aproximadamente). Por estos indicadores se consideró adecuado dicho ajuste para los datos recolectados. La campana presenta un máximo en  $(1583,0 \pm 21,0)\text{ Hz}$ , que corresponde a la frecuencia de resonancia del circuito, y un ancho de

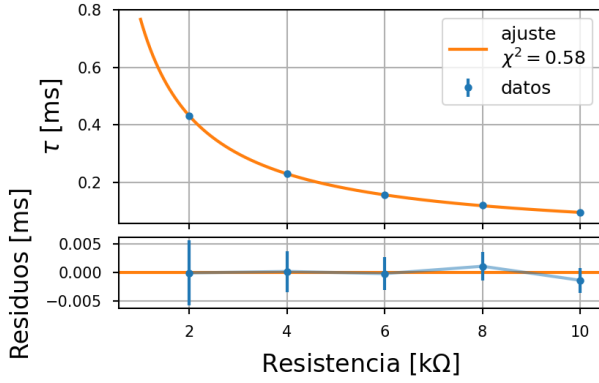


Figura 8: Tiempo característico  $\tau$  en función de la resistencia para un circuito RL, junto con un ajuste y sus residuos.

( $375,5 \pm 6,9$ ) Hz. Ambos parámetros coinciden apreciablemente (0,33 y 0,61 sigmas de distancia respectivamente) con los esperados según las mediciones directas aplicadas al modelo teórico (ver ecuación 6 y ecuación 8), que son de ( $1589,56 \pm 0,40$ ) Hz y de ( $370,7 \pm 3,9$ ) Hz respectivamente.

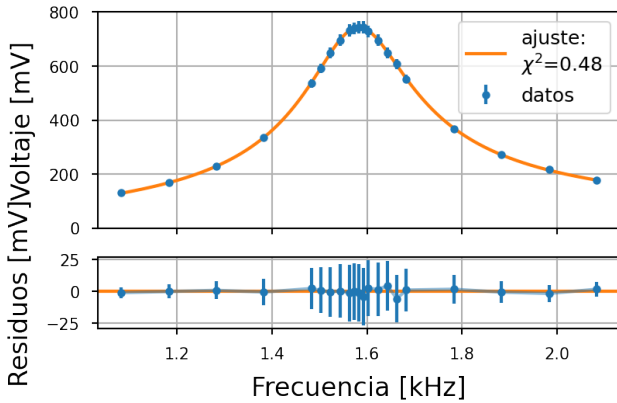


Figura 9: Campana de resonancia obtenida para el voltaje en la resistencia en un circuito RLC. El ajuste de los datos se hizo con la función de la ec.(5). Se observa que los residuos no tienen estructura y que el valor del  $\chi^2$  ronda el 1,7, por lo que se lo considera un ajuste adecuado.

Se confeccionó a su vez un gráfico de la diferencia de fase entre el voltaje de la fuente y el de la resistencia en función de la frecuencia. Se observó que los datos pueden ajustarse por la forma funcional predicha por la teoría (ver ecuación 7) realizándose un ajuste por ésta que presenta un  $\chi^2$  de aproximadamente 0,48 y unos residuos sin estructura. Además, a partir de este ajuste se determinó que la diferencia de fases se anula para una frecuencia de ( $1581,9 \pm 1,3$ ) Hz, que sin embargo no coincide con

la frecuencia de resonancia predicha por la teoría (5,8 sigmas de distancia). Esto podría deberse a la alta precisión del resultado producto de haber subestimado los errores.

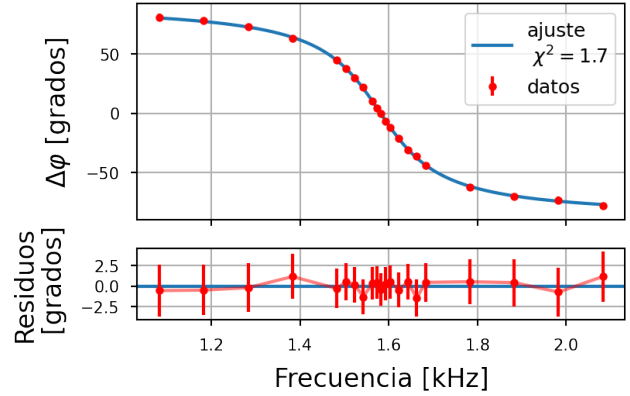


Figura 10: Diferencia de fase entre los voltajes de la fuente y la resistencia en función de la frecuencia, en un circuito RLC. Se ajustó con la función (7). Se ve que los residuos no tienen estructura y el  $\chi^2$  es aproximadamente 1.7, por lo cual se considera adecuado este ajuste.

Con los ajustes de los gráficos antes mencionados (fig. 9 y fig. 10) se obtuvieron mediciones para la resistencia total del circuito RLC, a partir de los parámetros de ajuste y de las mediciones directas de los componentes del circuito. Se observó que todas éstas coincidían apreciablemente, siendo la mayor de las distancias de aproximadamente 1,5 sigmas de distancia. El valor promedio de ésta sin embargo, ( $1,349 \pm 0,052$ ) k $\Omega$ , difiere considerablemente del valor de la resistencia  $R_R$  cuya caída de potencial fue medida. Siendo que la resistencia total obtenida representa un ( $134,9 \pm 5,2$ ) % respecto de la resistencia  $R_R$ , se concluyó que existe alguna otra contribución relevante a la resistencia total del circuito. Ésta podría deberse a la inductancia o al capacitor, sumada también a la del generador de funciones ( $\sim 50\Omega$ ).

## 4. Conclusiones

Por una parte, para los circuitos transitorios RC y RL fue posible, primeramente, observar la caída de voltaje en la resistencia para los regímenes transitorios y medir el tiempo característico. Variando uno de los parámetros se observó la dependencia de éste último. Asimismo se logró obtener el valor de la resistencia total del circuito RC, que resultó alrededor de un 17% mayor a la debida a la caja de resistencias. Este resultado da indicio de que las

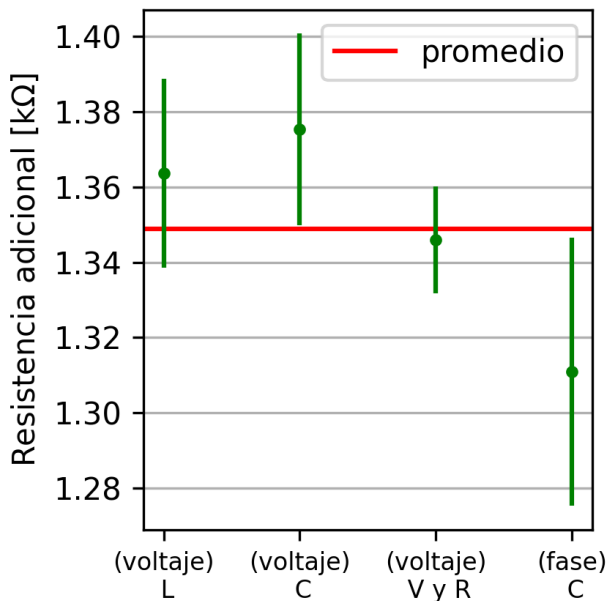


Figura 11: Resistencia total de un circuito RLC obtenidas a partir de mediciones directas de diferentes componentes y de los parámetros de los ajustes de dos barridos de frecuencia: voltaje (fig. 9); fase (fig. 10).

resistencias de los demás elementos del circuito no son despreciables. Con respecto a la resonancia del circuito RLC, se midió tanto la campana de resonancia para el voltaje como el desfase de la resistencia con respecto a la fuente mediante barridos de frecuencia; y se les hizo ajustes que se consideraron adecuados. Estas mediciones permitieron obtener valores de la frecuencia de resonancia del sistema que, en el caso de la campana de voltajes, coincidió apreciablemente, aunque no tanto para el de las diferencias de fase (posiblemente haya habido una subestimación de las fuentes de error). Además, se obtuvieron tres mediciones (uno por el parámetro  $L$ , otra por  $C$  y otra por  $V_0$  y  $R_R$ ) para el valor de la resistencia total del circuito a partir de los parámetros del ajuste de los voltajes, y otra medición a partir del ajuste de las fases. El valor promedio obtenido representa alrededor del 135 % de la resistencia total del circuito. Se concluyó entonces que el modelo ideal del circuito no es adecuado para describir el sistema, ya que no los aportes del resto de componentes a la resistencia total no es despreciable.

## Referencias

- [1] MORENO, CÉSAR, *Fenómenos transitorios eléctricos*, Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universi-

dad de Buenos Aires, Buenos Aires (2019). <http://materias.df.uba.ar/13b2022c2/files/2012/07/transitorios.pdf>

- [2] MORENO, CESAR, *Resonancia*, Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires. <http://materias.df.uba.ar/lab3ba2014c2/files/2014/08/Resonancia-Cesar-Moreno-comentado.pdf>