

Caracterización de circuitos RC, RL y RLC alimentados con fuentes de corriente continua y de corriente alterna

Lista de autores

Laboratorio 3°B, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales – UBA.

Resumen

Se estudió el comportamiento transitorio de circuitos RC y RL frente a los flancos de subida y bajada de ondas cuadradas con las que se los alimentaba, y también los fenómenos de resonancia y antirresonancia en circuitos RLC en serie y paralelos en respuesta a corriente alterna de distintas frecuencias. Utilizando los modelos teóricos de los distintos componentes y las leyes de Kirchhoff se realizaron predicciones y se intentó explicar el comportamiento de un presunto circuito RL, que inesperadamente parecía presentar un circuito RLC serie conectado en paralelo a él. Se considera que lo observado es compatible a lo que propone la teoría.

1. Introducción

Para el estudio de circuitos eléctricos con distintas configuraciones y componentes, es necesario mantener el registro de las corrientes y voltajes sobre sus partes. La corriente, denotada por I , es el flujo de carga eléctrica Q a través de un punto, mientras que el voltaje V entre dos puntos esta dado por su diferencia de potencial eléctrico [1].

La corriente I a través de un material conductor suele ser proporcional a la diferencia de voltaje en sus extremos [1]. Por lo tanto, se tiene la siguiente relación:

$$V = IR, \quad (1)$$

conocida como la *ley de Ohm*, donde el factor de proporcionalidad R es la resistencia del material o componente eléctrico [1].

Además, en los circuitos preparados se utilizaron capacitores e inductores. Se tiene que la diferencia de potencial entre los bornes de un capacitor es proporcional a la carga Q acumulada en ellos [2]:

$$V = \frac{Q}{C}, \quad (2)$$

con el factor C conocido como la capacidad del capacitor. Mientras tanto, los inductores son bobinas, donde un cambio en la corriente genera una diferencia de voltaje proporcional [3]:

$$V = L \frac{dI}{dt}. \quad (3)$$

con la constante L la inductancia propia del inductor.

Los circuitos pueden ser alimentados por fuentes de voltaje constantes (llamados de corriente continua o c.c.) o variable (generalmente cíclica y sinusoidal, llamada corriente alterna o c.a.). Distintos componentes presentan comportamientos diferentes en un caso u otro.

1.1. Circuitos de Corriente Continua

En este trabajo se caracterizó la respuesta de distintos circuitos frente a cambios repentinos en sus condiciones: es decir, el cambio abrupto de un valor de tensión constante a otro. En estas situaciones, se produce un periodo de transición, conocido como *régimen transitorio*, antes de finalmente llegar a un *régimen estacionario* [2]. Se estudió el régimen transitorio de circuitos RC (resistencia-capacitor), RL (resistencia-inductancia), y RLC (resistencia-inductancia-capacitor) de corriente continua, ilustrados en la Fig. 1.

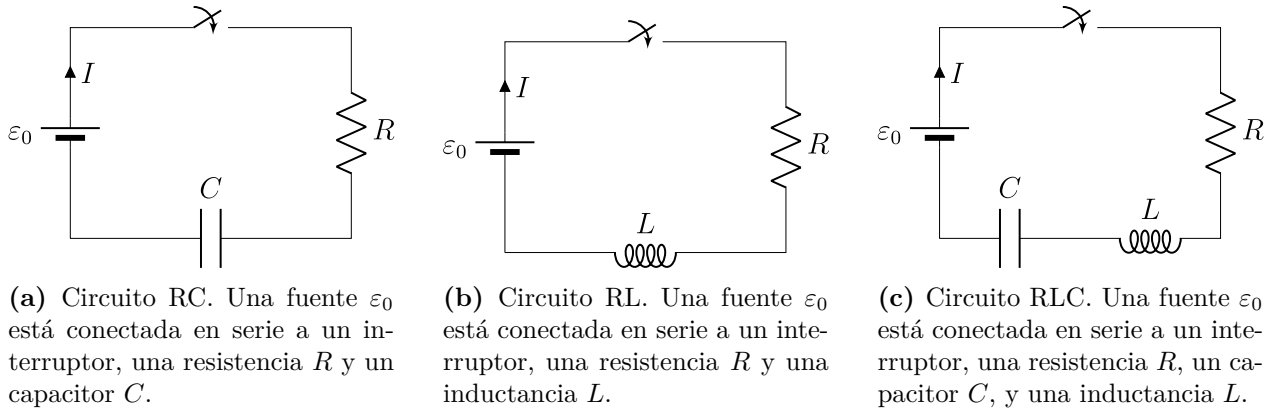


Figura 1

Circuito RC en serie

El esquema del circuito RC en serie se puede ver en la Fig. 1a. Si se tiene que se cierra el interruptor a $t = 0$ con el capacitor descargado, se puede calcular que el voltaje a través del capacitor evoluciona de la siguiente manera [2]:

$$V_C(t) = \varepsilon_0(1 - e^{-t/(RC)}). \quad (4)$$

Cuando $t = RC$, el término no estacionario en la ec. 4 está reducido por un factor de $1/e \approx 37\%$ respecto a su valor inicial. Este tiempo, denominado *tiempo característico*, da un criterio para caracterizar la rapidez con la que un circuito se acerca a un régimen estacionario.

Circuito RL en serie

El esquema del circuito se puede ver en la Fig. 1b. Al cerrar el interruptor a $t = 0$ se obtiene que la variación de voltaje sobre la inductancia es:

$$V(t) = \varepsilon_0 e^{-(R/L)t} \quad (5)$$

En este caso, el tiempo característico está dado por $\frac{R}{L}$.

Circuito RLC en serie

Se pueden diferenciar tres casos dependiendo de la relación entre sus componentes [3].

- Sobreamortiguado: en este caso $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.
- Críticamente amortiguado: donde $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

- Subamortiguado: cuando $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ y la corriente viene dada por:

$$\begin{cases} I(t) = \frac{V_0}{\omega L} e^{-\frac{Rt}{2L}} \text{sen}(\omega t), \\ \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}. \end{cases} \quad (6)$$

Es decir, que se producen oscilaciones de frecuencia angular ω cuya amplitud decae exponencialmente con un tiempo característico $\tau = 2L/R$.

Con todo esto, resulta de interés llamar la atención sobre el circuito de la Fig. 2.

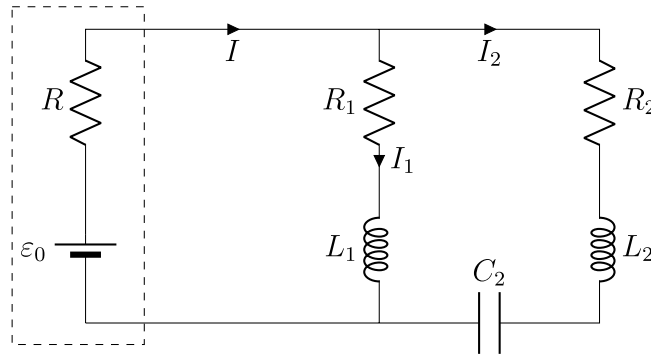


Figura 2: Circuito RL en paralelo a un RLC. Una fuente ε_0 que entrega una corriente I está conectada en paralelo a dos ramas: en la primera, circula una corriente I_1 por una resistencia R_1 en serie con una inductancia L_1 ; en la segunda, una corriente I_2 circula por una resistencia R_2 en serie con una inductancia L_2 y un capacitor C_2 .

En la Fig. 2 se ven dos ramas distintas conectadas en paralelo. Por la *ley de nodos* [1], se tiene que la corriente total I que sale de la fuente ε_0 se divide en I_1 por la primera rama y en I_2 por la segunda. Con ello, sumado a la *ley de mallas* y a las ecs. (1), (2) y (3), se llega a que el sistema de ecuaciones diferenciales que rige a este circuito es:

$$\begin{cases} I = I_1 + I_2 \\ \varepsilon_0 = R(I_1 + I_2) + R_1 I_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} \\ \varepsilon_0 = R(I_1 + I_2) + R_2 I_2 + L_2 \frac{dI_2}{dt} + \int \frac{I_2}{C_2} dt \end{cases} \quad (7)$$

Si se ignora por un momento la segunda rama, se tiene únicamente un circuito RL en serie. Si se ignora la primera, se tiene un RLC en serie. Por lo tanto, resultaría natural proponer soluciones con las mismas formas que las ya vistas en las ecs. (5) y (6):

$$\begin{cases} I_1 = Ae^{-t/\tau_1} \\ I_2 = Be^{-t/\tau_2} \text{sen}(\omega t) \\ I = Ae^{-t/\tau_1} + Be^{-t/\tau_2} \text{sen}(\omega t) \end{cases} \quad (8)$$

Esto puede ser útil al estudiar circuitos en la práctica, donde los cables usados pueden agregar inadvertidamente inductancias y capacitancias en paralelo que de otra manera no serían tenidas en cuenta.

1.2. Circuitos de Corriente Alterna

Cuando se alimenta un circuito con corriente alterna de frecuencia ω , la caída de tensión sobre los componentes en el estado estacionario depende de ω .

Circuito RLC en serie

En un circuito RLC serie, se tiene que la amplitud de la corriente varia de la siguiente forma en función de la frecuencia de la fuente:

$$|I(\omega)| = \frac{|V|}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}}. \quad (9)$$

De esta expresión, se deduce que $|I|$ es máximo cuando

$$\omega = 1/\sqrt{LC}. \quad (10)$$

que se le dice *frecuencia de resonancia* [2].

Circuito RLC en paralelo

Considérese, en cambio, un circuito con el mismo tipo de componentes, pero conectados en paralelo como en la Fig. 3.

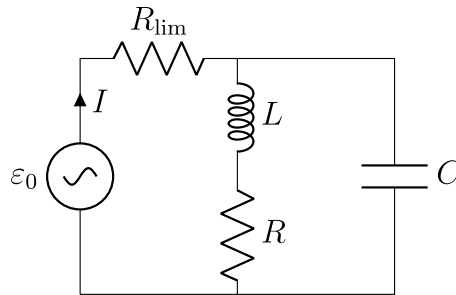


Figura 3: Circuito RLC paralelo. Una fuente ε_0 entrega corriente alterna de frecuencia ω . La corriente total del circuito circula por la resistencia limitadora R_{lim} .

Entonces, en este caso, se da que cuando

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{L}} \quad (11)$$

se minimiza el módulo de la corriente que recorre el circuito. A esta frecuencia se la conoce como frecuencia de antirresonancia [2].

2. Montaje Experimental

Montaje realizado para estudiar el régimen transitorio

Para estudiar el régimen transitorio, se armaron circuitos RC y RL en serie. El montaje de los componentes en los circuitos se puede ver en los esquemas presentados en la Fig. 4.

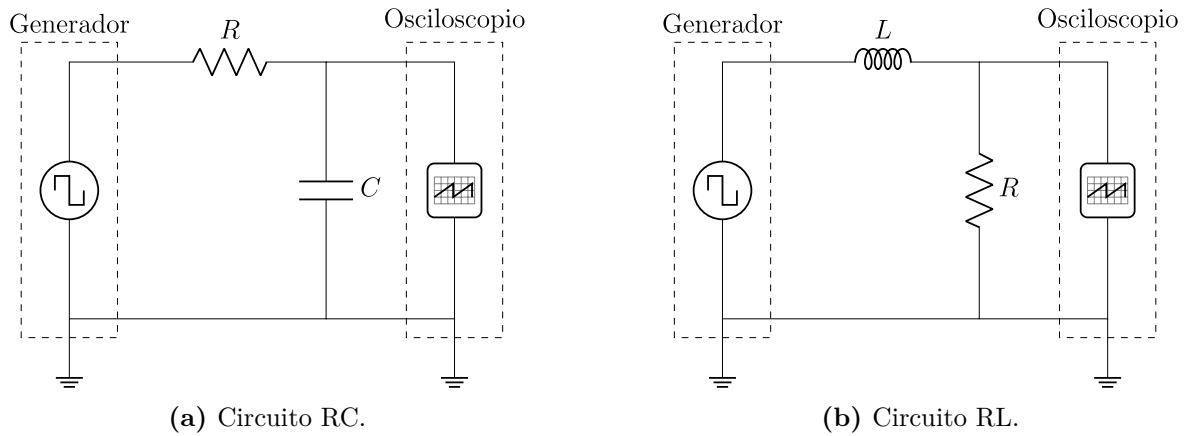


Figura 4: Circuitos montados para realizar las mediciones de comportamientos transitorios. Se utilizó un generador de funciones con una señal cuadrada, que simule la apertura y cierre de una llave, y se tomaron las mediciones con un osciloscopio conectado en paralelo al componente sobre el cual se miden las caídas de tensión.

Para estudiar el comportamiento transitorio, se usaron generadores enviando pulsos cuadrados, que se pueden ver en la Fig. 4. Esto simula una llave cerrándose y abriéndose, manteniendo primero un voltaje constante, y cambiando repentinamente a otro, también constante. El osciloscopio se utilizó para medir el voltaje sobre el componente deseado conectándose en paralelo a éste (para evitar cortocircuitos, se prestó especial atención a las conexiones a tierra del generador y del osciloscopio). Con el trigger del osciloscopio configurado correctamente, se observó de forma estable el régimen transitorio.

Se montaron cuatro circuitos — A, B, C y D — del tipo RC en serie como en la Fig. 4a, todos con un capacitor de (100 ± 20) nF (según el fabricante), pero distintas resistencias. El circuito A contenía una resistencia de $(98,6 \pm 0,1)$ Ω , la del B era de $(1,18 \pm 0,01)$ k Ω , la del C de $(1,78 \pm 0,01)$ k Ω , y la del D de $(46,4 \pm 0,1)$ k Ω . Los circuitos A, B, y C se alimentaron con una señal cuadrada de amplitud 1 Vpp y frecuencia de 1 kHz. En cambio, la frecuencia que se usó en el circuito D fue de 10 kHz, dado que este tenía un tiempo característico considerablemente mayor.

Por otra parte, el circuito RL, visto en la Fig. 4b, estaba conformado por una resistencia de (215 ± 1) Ω y una inductancia de $(10,0 \pm 0,2)$ mH. Nuevamente, se eligió como frecuencia de la onda cuadrada a alguna tal que su período sea mayor al tiempo característico del sistema.

Montaje realizado para estudiar los fenómenos de resonancia y antirresonancia

En estos casos, se hizo un barrido de frecuencias para estudiar la respuesta en voltaje de los circuitos de la Fig. 5 al ser alimentados con corriente alterna.

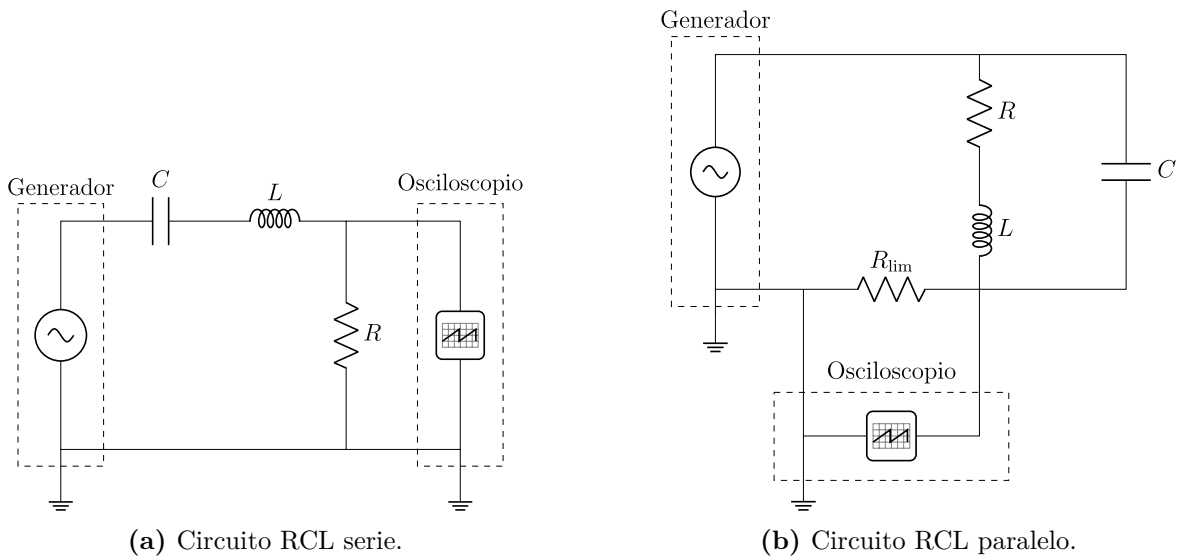


Figura 5: Circuitos montados para realizar las mediciones de resonancia. Se utilizó un generador para enviar una señal sinusoidal, y se tomaron las mediciones con un osciloscopio. En el RLC paralelo, R_{lim} indica una resistencia limitadora sobre la que circula la corriente total del sistema.

Para el montaje de ambos circuitos se utilizaron los mismos componentes: una resistencia de $(753 \pm 1) \Omega$ (haciendo el papel de R en 5a y de R_{lim} en 5b), una inductancia de $(10,0 \pm 0,2) \text{ mH}$ y una capacidad de $(100 \pm 20) \text{ nF}$. La resistencia R en 5b es la resistencia interna de la inductancia, de $(12,8 \pm 0,1) \Omega$

Para tomar mediciones se utilizó principalmente un osciloscopio digital Tektronix TBS1052B-EDU en modo acoplamiento C.C., registrando sus lecturas en una computadora con el software OpenChoice. Los circuitos estaban conformados por un generador de funciones Tektronix AFG102, un protoboard y diversas resistencias, inductancias y condensadores. Se usó un multímetro UNI-T UT55 para medir los valores de las resistencias e inductancias elegidas¹. Es relevante que los generadores, conectados en serie al circuito de interés, cuentan con una resistencia propia de aproximadamente $(48 \pm 5) \Omega$ (dependiendo del generador). Esta resistencia interna se tuvo en cuenta al interpretar los datos.

3. Resultados y discusión

3.1. Régimen transitorio

En la Fig. 6 se presentan las mediciones de la caída de tensión en el capacitor cuando el circuito es excitado por el flanco de subida de una onda cuadrada. Se observa cómo el capacitor toma más tiempo en cargarse según aumenta la resistencia. Además, al acercarse al régimen estacionario su voltaje tiende al voltaje de la fuente, 1 Vpp , como predice la teoría. Dado que el voltaje medido parece tener el comportamiento exponencial que presenta la ec. 4, se realizaron ajustes en Python utilizándola de modelo.

¹Los capacitores no pudieron ser medidos de manera directa con el multímetro.

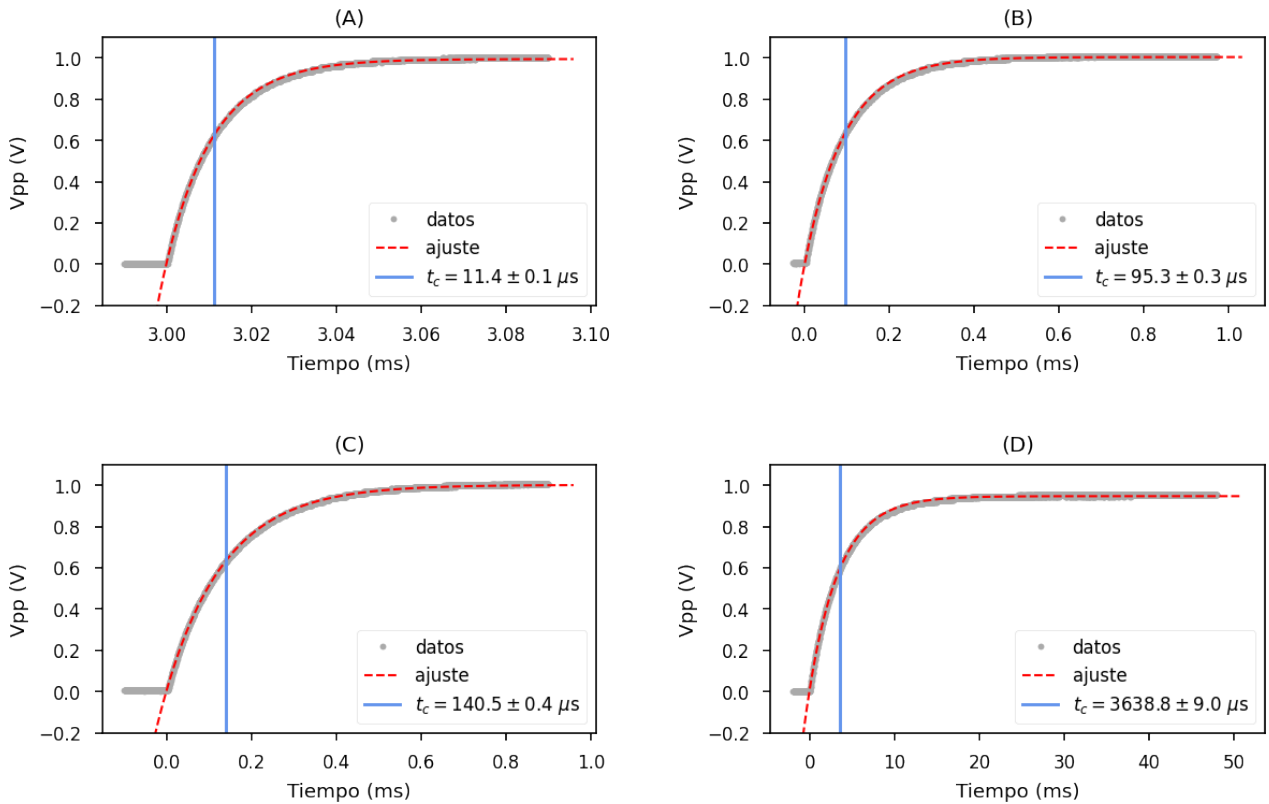


Figura 6: Mediciones de la etapa transitoria del circuito RC para $C = 100$ nF (nominal) y distintas resistencias. En (A), $R = (98,6 \pm 0,1) \Omega$, (B) $R = (1,18 \pm 0,01) \text{ k}\Omega$, (C) $R = (1,78 \pm 0,01) \text{ k}\Omega$, y (D) $R = (46,4 \pm 0,1) \text{ k}\Omega$.

A simple vista se puede ver que los ajustes reproducen la tendencia de las mediciones, como era esperado. Mas aún, los R^2 que se calcularon son cercanos a 1 (presentan una diferencia del 1 menor a 10^{-2}). Considerando que los ajustes son de buena calidad, se analizaron los tiempos característicos obtenidos. La ec. 4 predice que el tiempo característico del circuito RC varía de forma lineal en función de la resistencia con la pendiente dada por la capacidad, por lo que se realizó un ajuste de cuadrados mínimos sobre los puntos, visto en la Fig. 7.

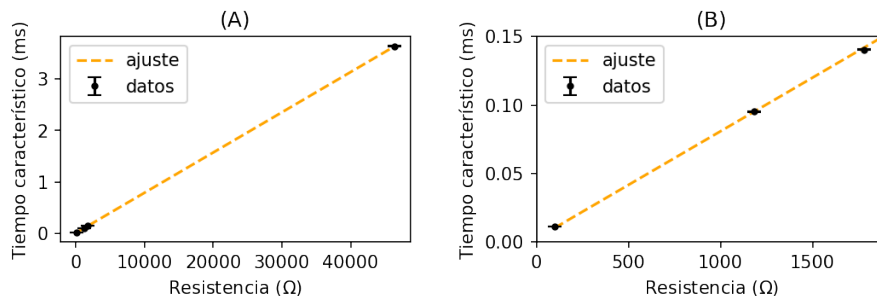


Figura 7: Los tiempos característicos obtenidos en función de las resistencias que les corresponden. De la pendiente del ajuste lineal se obtuvo una medición de la capacidad. En (A) se muestran los cuatro puntos, mientras que en (B) se amplía el sector con los primeros tres puntos.

En la Fig. 7 se grafica el ajuste junto a los puntos de t_c en función de R . De la pendiente del ajuste se obtiene una medición de la capacidad del sistema, $(78,37 \pm 0,04)$ nF. Este valor presenta diferencias significativas con el esperado, de (100 ± 20) nF, pero ligeras (aproximada-

mente un 2% del valor esperado).

En la Fig. 8 se tienen los resultados del transitorio del circuito RL.

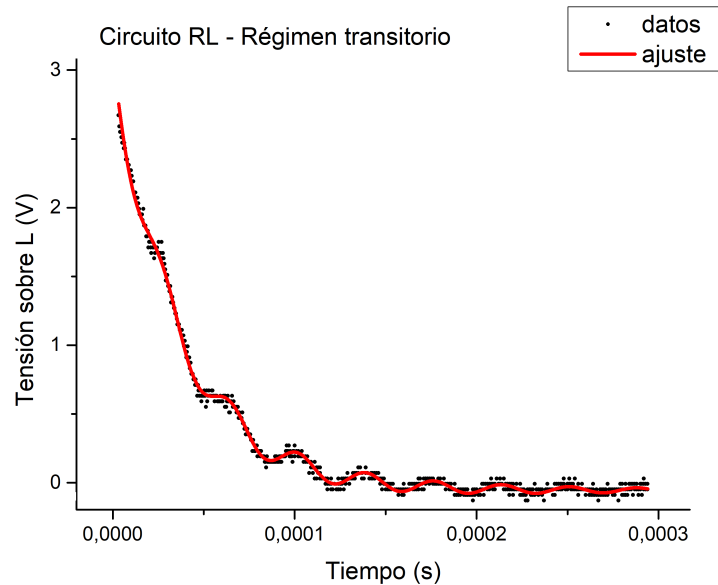


Figura 8: Mediciones de la etapa transitoria del circuito RL para $R = (265 \pm 8) \Omega$ y $L = (0,01 \pm 0,00) \text{ H}$. El tiempo característico del ajuste es $(36,6 \pm 0,2) \mu\text{s}$, mientras que el teórico para estos valores es $(37,7 \pm 1,1) \mu\text{s}$. Sorprendentemente, se ve acoplada una oscilación de frecuencia angular $\omega = (169005 \pm 402) \text{ 1/s}$

En principio, se aprecia el decaimiento exponencial esperado para esta configuración, según dicta la ec. (5). Pero también se ven claras oscilaciones (de frecuencia angular $\omega = (169005 \pm 402) \text{ 1/s}$), propias del modelo del RL en paralelo al RLC. Es por eso que, en cambio, se ajustaron los datos por medio de la ec. (8). El tiempo característico τ_1 del término puramente exponencial es de $(36,6 \pm 0,2) \mu\text{s}$, mientras que el teórico para estos valores según la ec. (5) sería $(37,7 \pm 1,1) \mu\text{s}$. Es decir, el sistema presenta el decaimiento exponencial esperado para un circuito RL con los componentes usados. Si a los datos se les resta el término únicamente exponencial del ajuste, se obtienen los puntos de la Fig. 9.

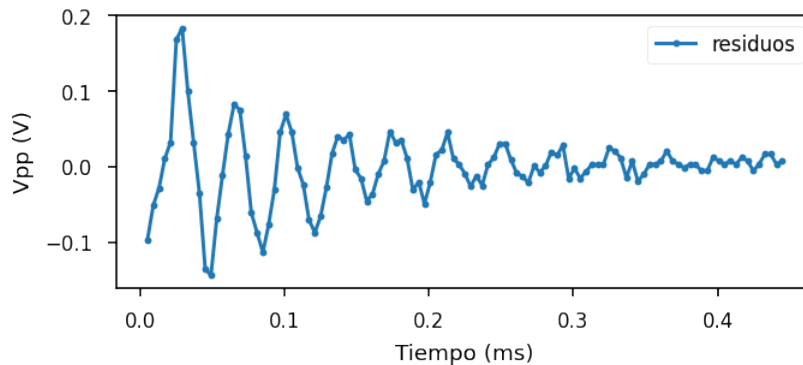


Figura 9: Oscilaciones subamortiguadas del voltaje sobre L de un supuesto circuito RL al no considerarse el decaimiento exponencial.

En la Fig. 9 se encuentra que la parte que no es netamente exponencial de los datos sigue

el comportamiento de una oscilación subamortiguada, como si de la ec. (6) de un circuito RLC en serie se tratase. Como sea, al estudiar la ec. (6), se ve que el factor ω es una combinación de R , L y C . Al no conocer ninguno de estos datos, no se pueden sacar mayores conclusiones sobre qué combinación específica de estos valores da lugar al ω observado.

Todo esto parece indicar fuertemente que, efectivamente, el sistema medido no era un RL como se pretendía, sino que tenía un circuito RLC serie conectado en paralelo. Esto bien pudo haber sido a causa de capacitancias e inductancias dentro de los cables que fueron inducidas inesperadamente.

3.2. Resonancia y antirresonancia

En la Fig. 10 se ve la respuesta en voltaje del circuito RLC al ser alimentado por corriente alterna de distintas frecuencias.

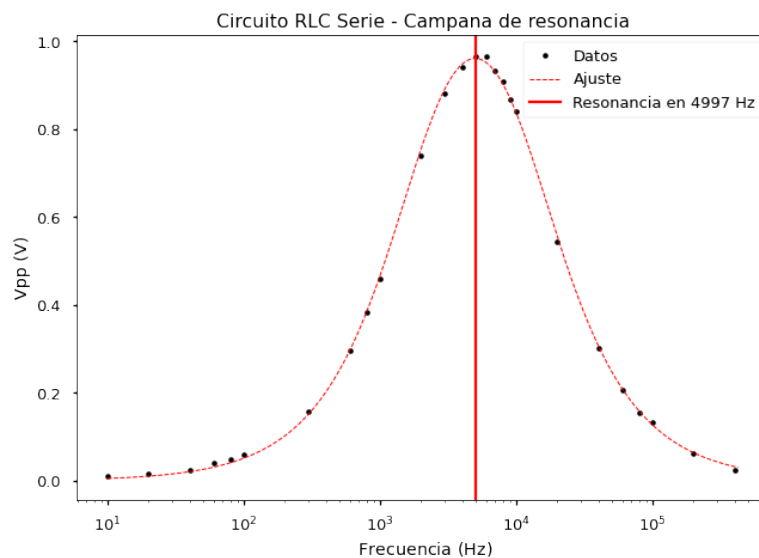


Figura 10: Mediciones de la respuesta del circuito RLC serie sobre un intervalo de frecuencias. Se realizó el ajuste graficado teniendo en cuenta que se observa una campana de resonancia.

Los datos de la Fig. 10 fueron ajustados correctamente por la campana de resonancia de la ec. (9). De este ajuste se obtiene una frecuencia de resonancia en (4997 ± 48) Hz, que coincide sin diferencias significativas con la esperada teóricamente para estos componentes según la ec. (10), de (5033 ± 56) Hz. Además, del ajuste se tiene que la resistencia del circuito es $R = (796 \pm 1) \Omega$, es decir, unos 43Ω más grande que la carga utilizada de $R = (753 \pm 1) \Omega$; esta es, entonces, una medición de la resistencia interna del generador usado en este circuito.

Finalmente, en la Fig. 11 se ve la respuesta en frecuencia del circuito RCL paralelo, que presenta un claro comportamiento de antirresonancia. Por lo tanto, los datos se ajustaron por un pico de antirresonancia, y tal y como predecía la ec. (11) para estos componentes, se encuentra un mínimo de respuesta alrededor de los 5000 Hz ((5029 ± 53) Hz teóricamente y (4080 ± 52) Hz según el ajuste).

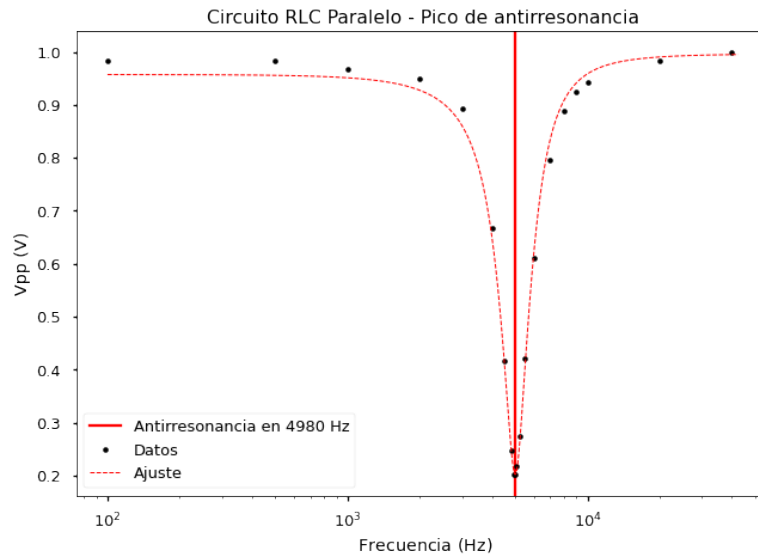


Figura 11: Mediciones de la respuesta del circuito RLC paralelo sobre un intervalo de frecuencias. Se realizó el ajuste para verificar que su distribución coincidía con una campana antirresonante.

4. Conclusiones

Para los diferentes circuitos de corriente continua estudiados, los valores de los tiempos característicos esperados por el modelo teórico coincidieron correctamente con los datos experimentales. Pero un caso de consideración especial fue el del RL. En vez de comportarse como se esperaba, parecía tener un circuito RLC serie conectado en paralelo a él, añadiendo oscilaciones subamortiguadas al decaimiento. El motivo de ello es desconocido, aunque se presume que los cables presentaban ligeras inductancias y capacitancias inesperadas. Aun así, se pudo encontrar un modelo teórico que satisfactoriamente se ajustó al fenómeno observado, encontrándose que se podía explicar el comportamiento separándolo en un término de decaimiento exponencial a causa de la rama del RL, y otro término de oscilaciones subamortiguadas a causa de la rama del RLC.

Para el estudio de la frecuencia de resonancia de los circuitos RLC de corriente alterna, también los valores experimentales fueron, dentro del rango de error, los esperados por la teoría.

Por lo tanto, se concluyó que los modelos teóricos se ajustan a las experiencias y son eficaces al momento de estudiar los diferentes circuitos propuestos.

Referencias

- [1] P. Horowitz y W. Hill. «The Art of Electronics». En: 3.^a ed. Cambridge University Press, 2016. Cap. 1.
- [2] Joseph A. Edminister. «Teoría y Problemas de Circuitos Eléctricos». En: Serie Shaum. McGraw Hill. Cap. 1, 8, y 16.
- [3] D. J. Irwin y R. M. Nelms. «Basic Engineering Circuit Analysis». En: 10.^a ed. John Wiley & Sons, Inc., 2011. Cap. 6, 7, y 8.