Universidad de Buenos Aires - Exactas
departamento de física

Laboratorio 1

2do Cuatrimestre 2024

Laboratorio 1C: martes 14-20 hs

Lucía Famá, Mónica Agüero,
Marcos Wappner, Franco Eskinazi,
Román Schiaffino

REPASO DE LA CLASE PASADA ...

NUESTRO OBJETIVO!!!

Obtener una expresión VÁLIDA del ***resultado de una MF***

$$\boxed{x = (\bar{x} \pm \Delta x) \text{ Unidades}}$$

Clase de Medición

$\bar{x}$: Valor más representativo (x_0)

Δx: Incerteza Absoluta

Fuentes de incertezas

REGLA 1bis DE LABORATORIO 1

NUNCA REPORTO UN RESULTADO SIN SU INCERTEZA

Mediciones Directas (MD)

1: Pesa como fuente de incerteza INSTRUMENTAL

JAMÁS MIDO UNA SOLA VEZ UNA MF !!!!

1 - Si los datos son todos iguales

⇨ $\overline{x}$ = número leído en el instrumento

⇨ $\Delta x = \sigma_{ap}$ ⇨ $x = \left(\bar{x} \pm \sigma_{ap}\right) Ud.$

$\boldsymbol{\sigma_{ap} = 0,01\ s}$

$x = (13{,}16 \pm 0{,}01)\ s$

2 - Si hay datos que difieren entre sí

⇨ $$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$\Delta x = ?$

Orienta la Tabla (Clase 1)

$$\boldsymbol{P = \frac{R}{\bar{x}} 100}$$

Mediciones Directas (MD)

Caso Tabla Si $\boldsymbol{P} > \mathbf{8\%}$

2: Pesa como fuente de incerteza ACCIDENTAL

¿Cuál es el valor de T? ⇨ $T = (\bar{T} \pm \Delta T)\ Ud.$

13,10 s	13,19 s	13,16 s
13,14 s	13,15 s	13,11 s
13,20 s	13,21 s	13,16 s

resolución $0{,}01\ s$

$$\bar{T} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} T_i$$

$\boldsymbol{\Delta T} = ???$

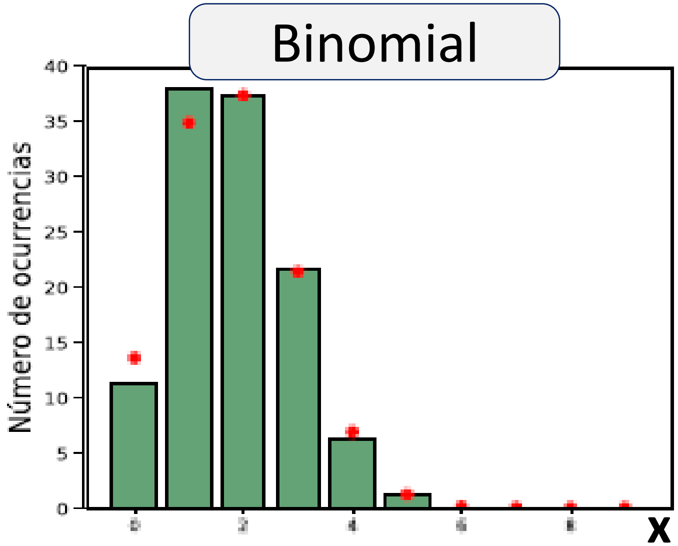
Objetivos de la clase de hoy

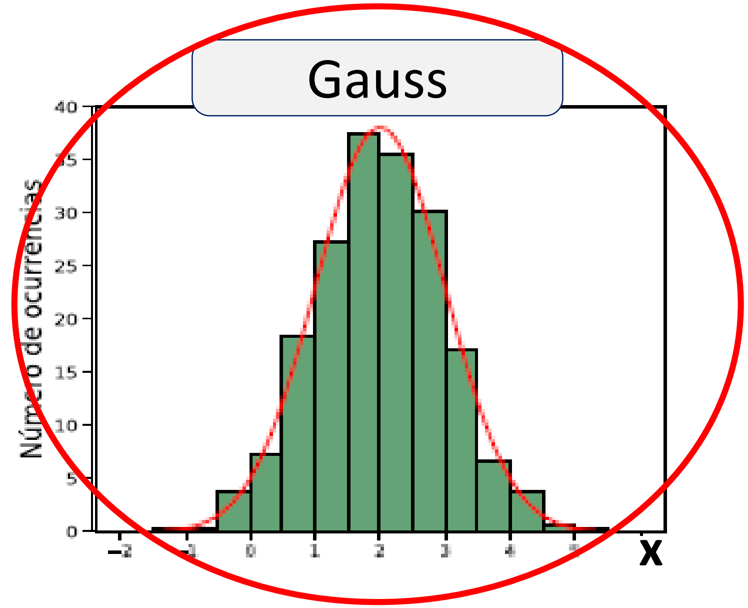
Determinar la incerteza absoluta Δx de medidas aleatorias

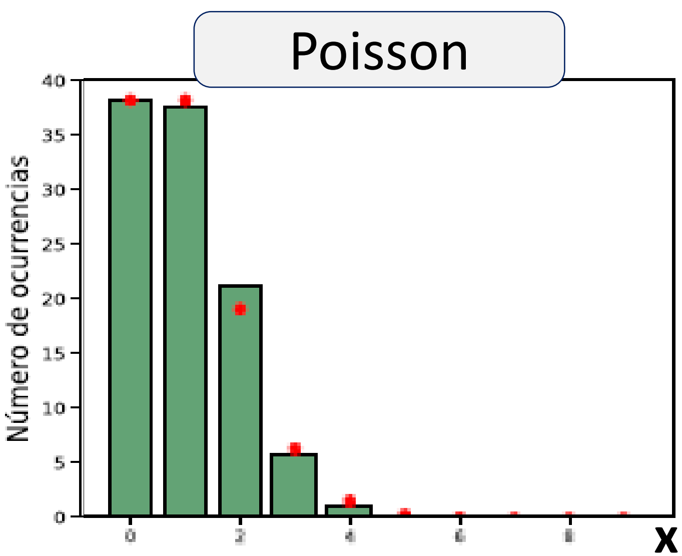
Comprender y visualizar la teoría (estadística) a partir de un experimento de un péndulo simple.

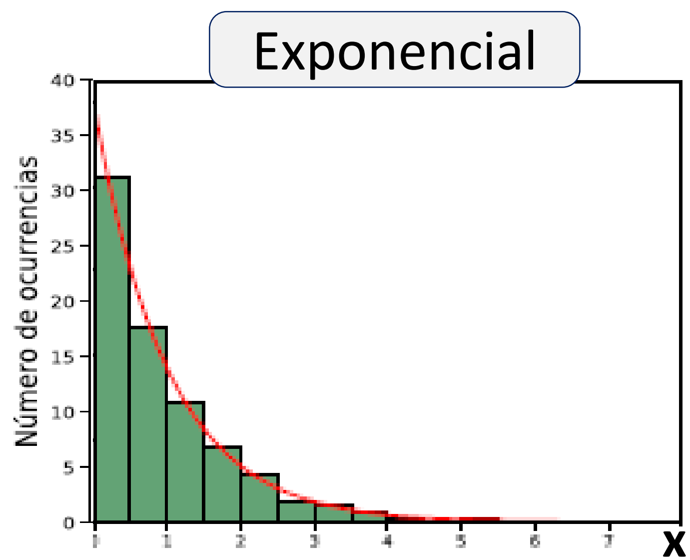
Obtener el resultado del período del péndulo y del período del faro

Ejemplos de distribuciones

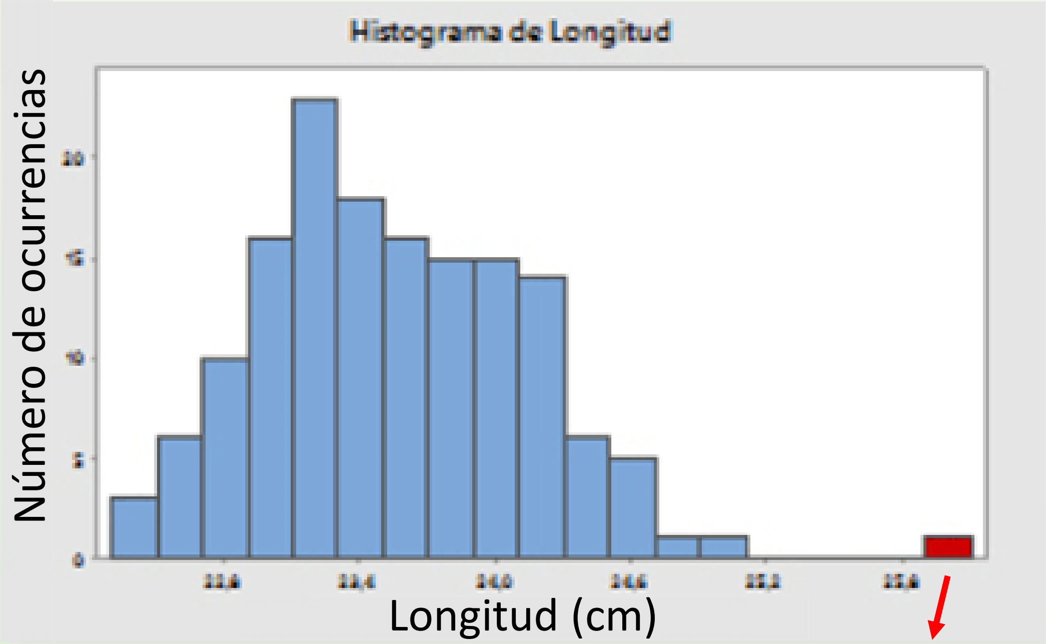








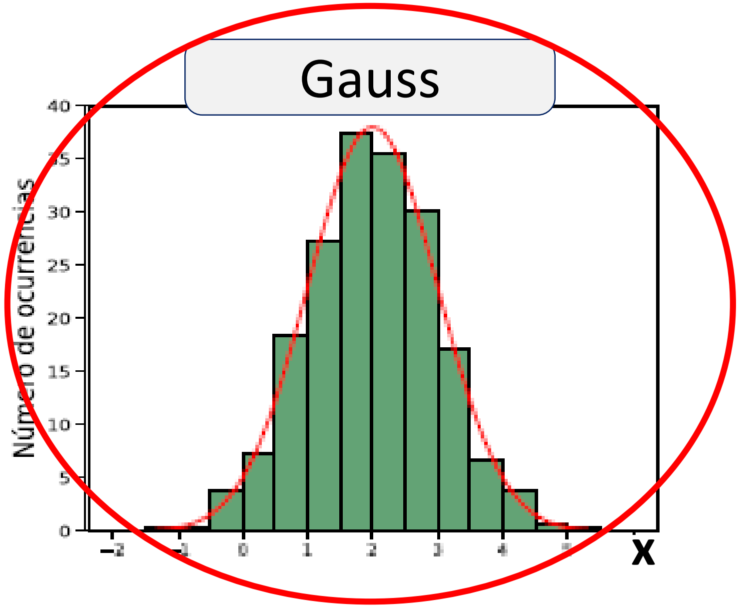
Cuánta info me da un Histograma!



Medida "raras"

Asumimos distribución Gaussiana

- Número total de medidas: ***N***
- Bins (N° de columnas): ***C***
- Clases (ancho de columna): ***a***



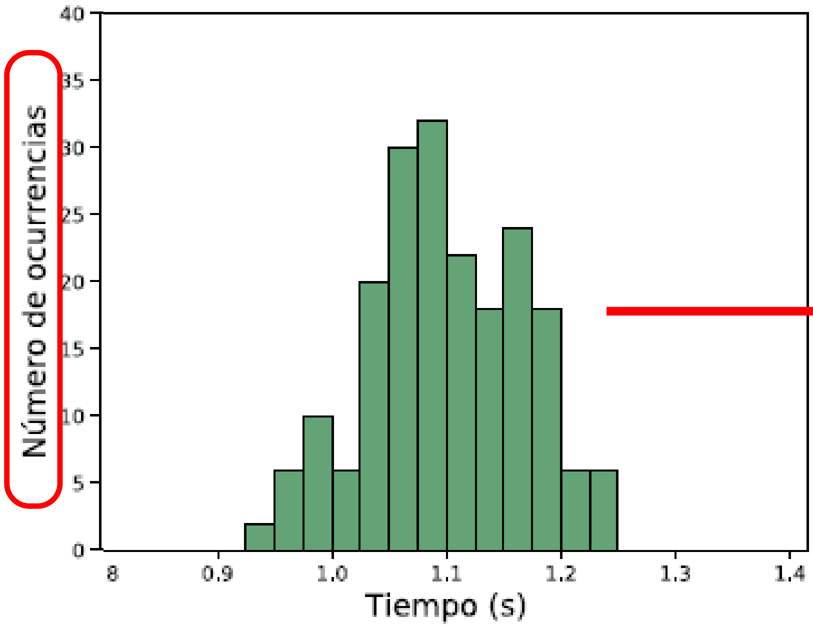
Regla de Sturges:

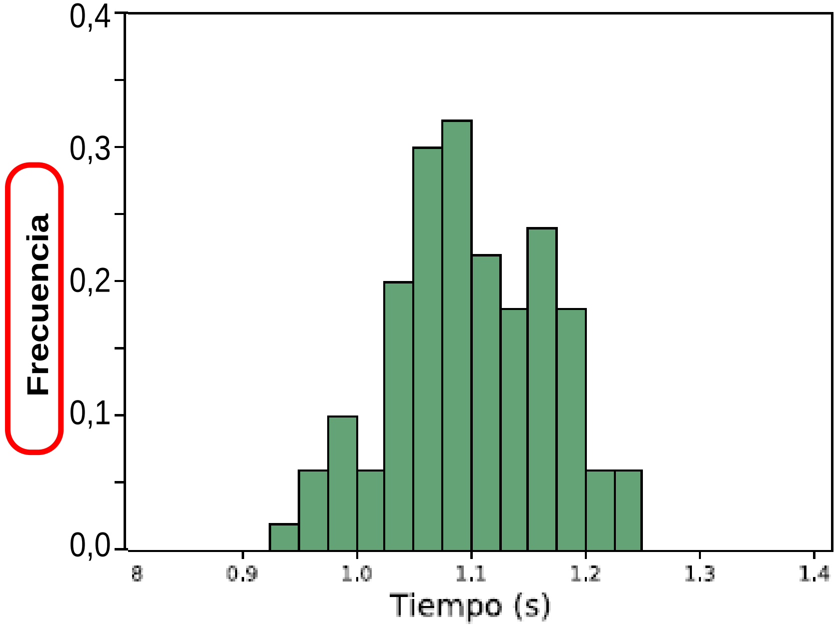
$$\boxed{C = 1 + 3{,}3322\, log(N)}$$

¿Cómo se comporta un Histograma según el número de mediciones *N* realizadas?

Para poder comparar Histogramas

$$\frac{N^{\underline{o}}\ Ocurrencias}{N} = Frecuencia$$





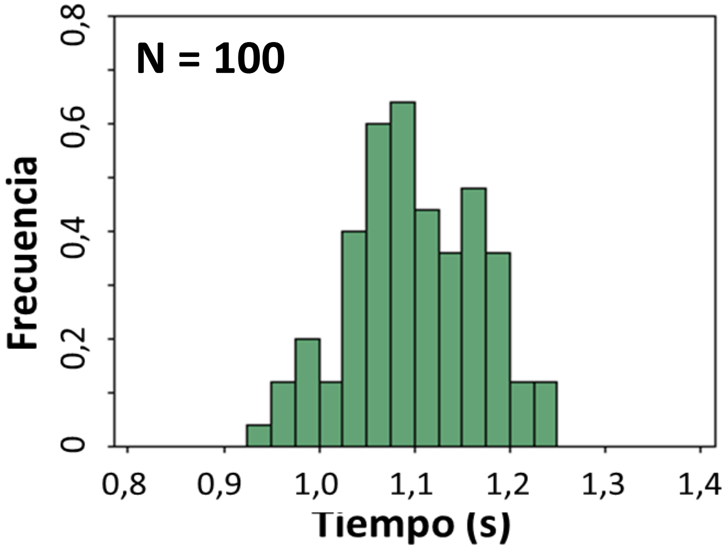
Condición de Normalización

$$\sum_j Número\ de\ ocurrencias_j = N$$

$$\sum_j F_j = 1$$

¿Si aumenta N?

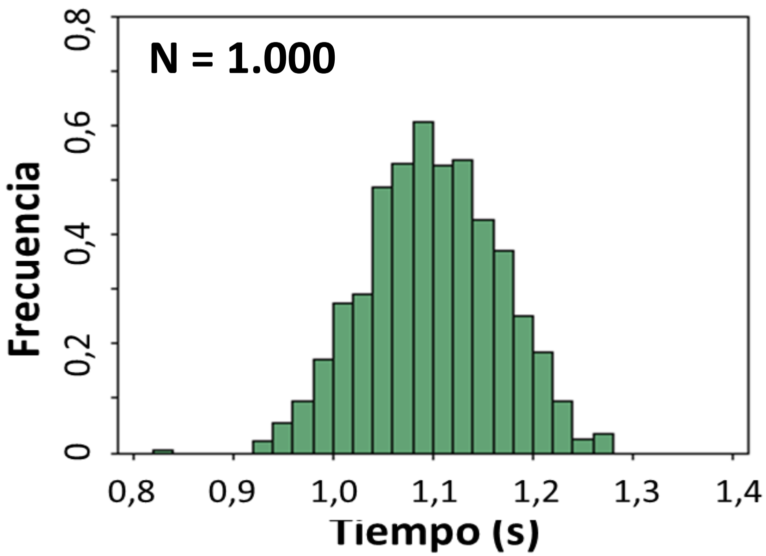
[Regla de Sturges]() $C = 1 + 3{,}322\log(N)$

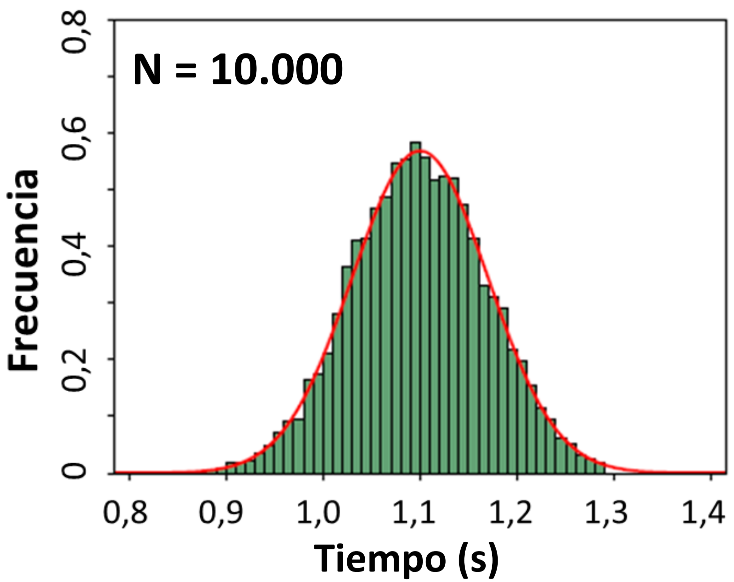


↑ **N**

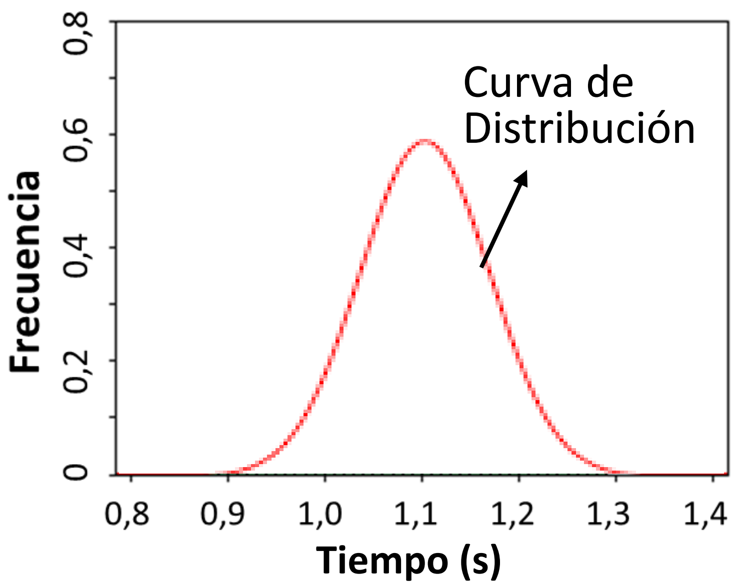
↑ **C**

↓ ***a***

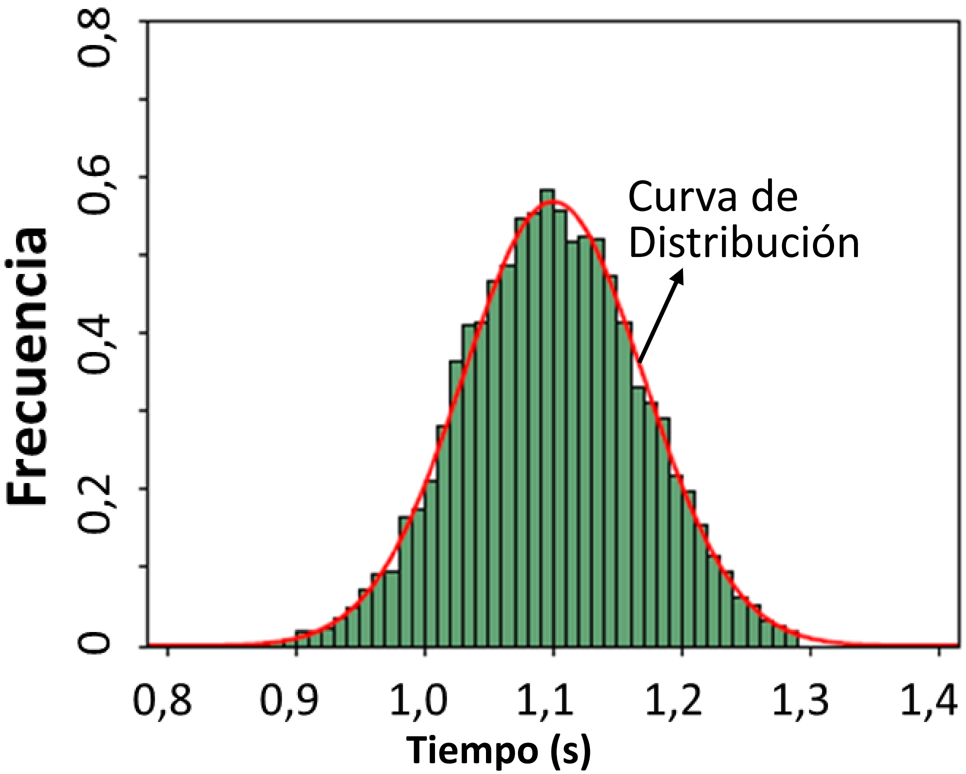




$$N \rightarrow \infty$$
$$a \rightarrow dt$$



¿Si aumenta N?



$$N \to \infty$$

$$a \to dt$$

$$F_i \to f(t)dt$$

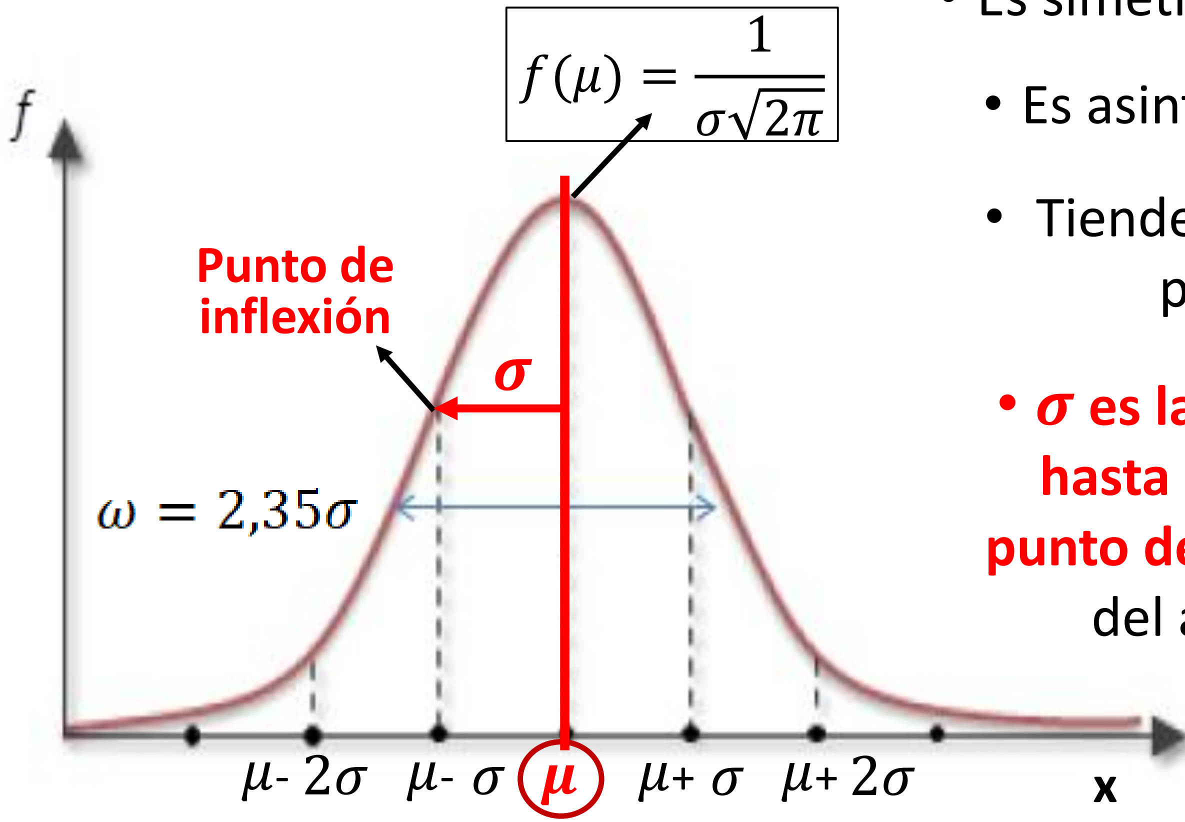
$f(t)$: *Función de distribución de probabilidades*

Condición de Normalización

$$\sum_i F_i = 1 \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dx = 1$$

Función de distribución: Gauss

$$f(x) = \frac{1}{\boldsymbol{\sigma}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\boldsymbol{\mu})^2}{2\boldsymbol{\sigma}^2}\right)$$



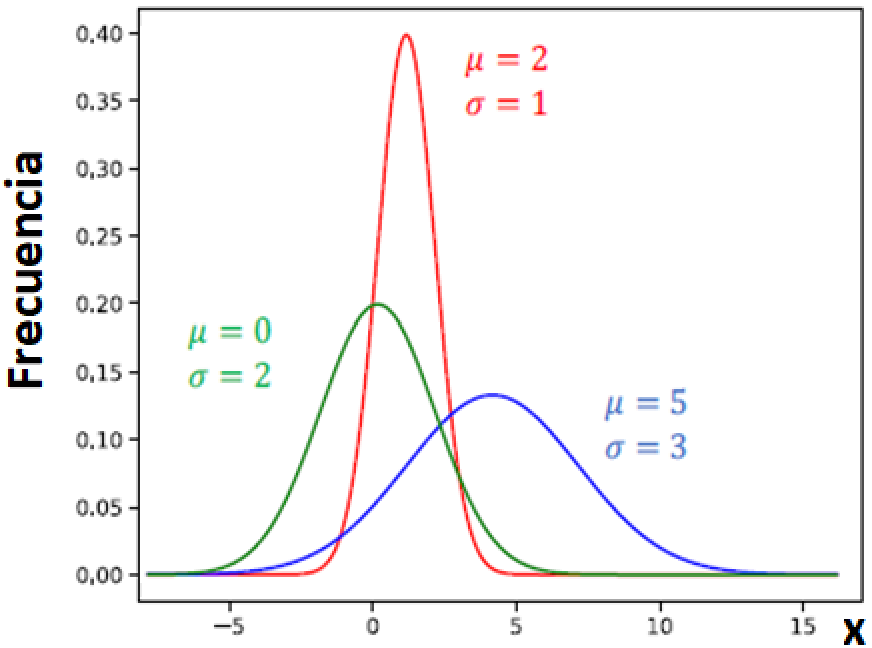
Algunas Propiedades

- **Está centrada en $x = \mu$.**
- Es simétrica respecto de su media
- Es asintótica al eje de abscisas
- Tiende exponencialmente a 0 para $|x-\mu| \gg \sigma$.
- **σ es la distancia de la media hasta la curva a la altura del punto de inflexión**, y da una idea del ancho de la curva de distribución.

Función de distribución: Gauss

$$f(x) = \frac{1}{\boldsymbol{\sigma}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\boldsymbol{\mu})^2}{2\boldsymbol{\sigma}^2}\right)$$

Función de distribución de 3 Muestras



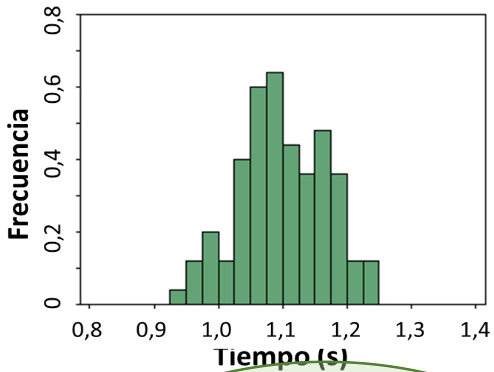
$\boldsymbol{\mu}$ Corrimiento en x hacia la derecha

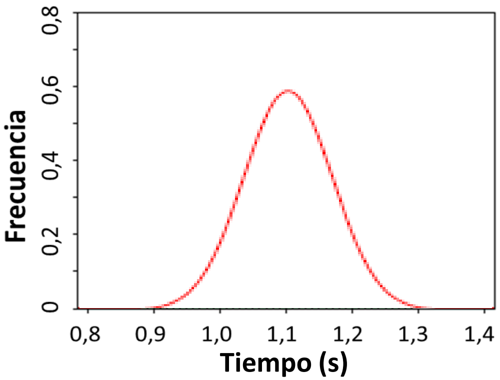
$\boldsymbol{\sigma}$ Aumento del ancho de la distribución. **Mayor dispersión de datos**

1 Serie de mediciones

Parámetros de la distribución

$N \to \infty$





$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

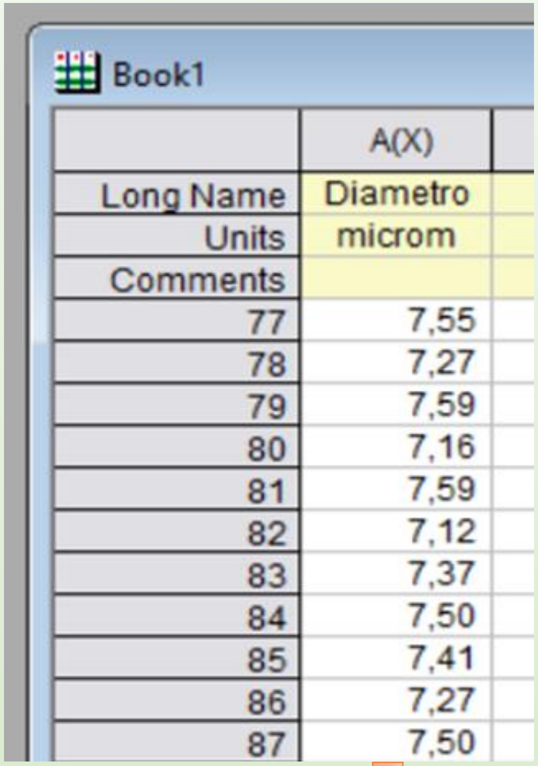
$$S = Desviación\ Estándar$$

$$\sigma$$

Análisis de estadístico

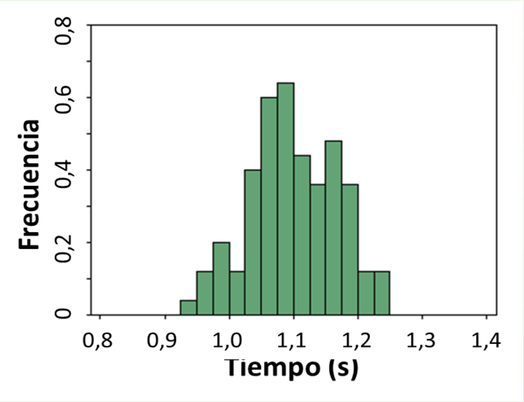
Tomamos N mediciones de una variable aleatoria:

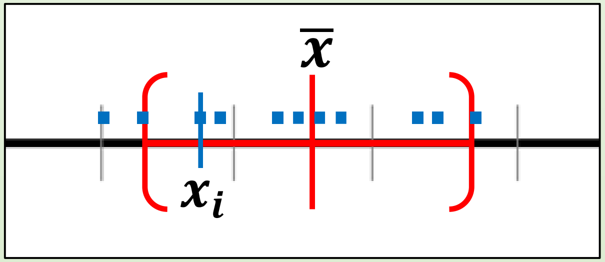
$$N = \{x_1, x_2, \dots, xi, \dots, x_N\}$$



	A(X)
Long Name	Diametro
Units	microm
Comments	
77	7,55
78	7,27
79	7,59
80	7,16
81	7,59
82	7,12
83	7,37
84	7,50
85	7,41
86	7,27
87	7,50

$$\bar{x} = 7,29\ \mu m$$





Análisis de estadístico

Tomamos N mediciones de una variable aleatoria:

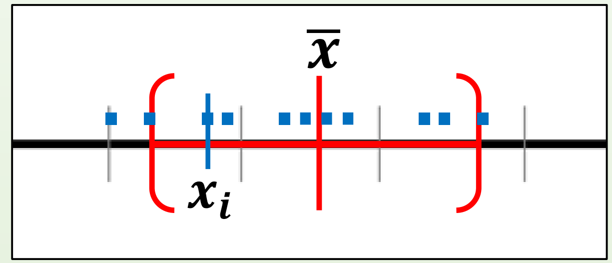
$$N = \{x_1, x_2, \dots, xi, \dots, x_N\}$$

$\bar{x} - x_i$ $\quad (\bar{x} - x_i)^2$

Book1

	A(X)	B(Y)	C(Y)
Long Name	Diametro	X-Xmedia	(X-Xmedia)^2
Units	microm	microm	microm^2
Comments			
77	7,55	0,26	0,07
78	7,27	-0,02	0,00
79	7,59	0,30	0,09
80	7,16	-0,13	0,02
81	7,59	0,30	0,09
82	7,12	-0,17	0,03
83	7,37	0,08	0,01
84	7,50	0,21	0,05
85	7,41	0,12	0,01
86	7,27	-0,02	0,00
87	7,50	0,21	0,04

$$\bar{x} = 7,29\ \mu m$$



VARIANZA: Dispersión cuadrática de los datos respecto del valor promedio

$$VAR\,(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N} (\bar{x} - x_i)^2}{N}$$

Desviación Estándar (S)

Error cuadrático medio

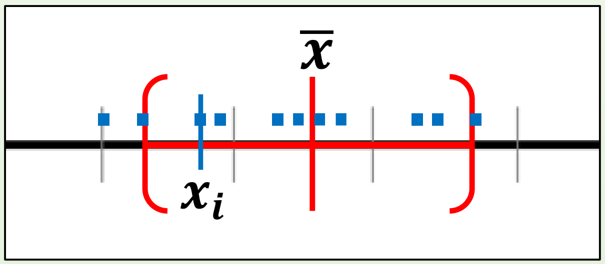
$$S = \sqrt{Var\,(x)}$$

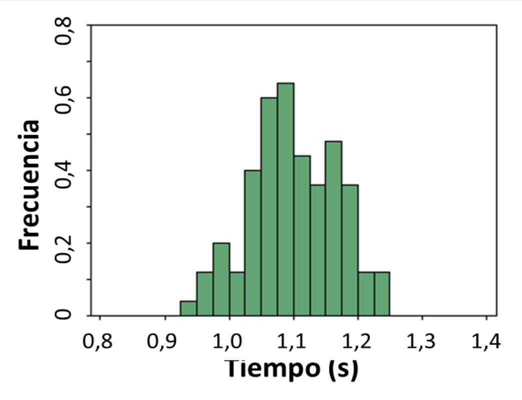
$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

Análisis de estadístico

Tomamos N mediciones de una variable aleatoria:

$$N = \{x_1, x_2, \dots, xi, \dots, x_N\}$$





Valor más representativo: Promedio de los datos: $\bar{x}$

```
X = np.mean(x)
print("El valor medio es =", X, "s")
```

```
El valor medio es = 32.54231578947369 s
```

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Análisis de estadístico

Tomamos N mediciones de una variable aleatoria:

$$N = \{x_1, x_2, \ldots, xi, \ldots, x_N\}$$

VARIANZA: Dispersión cuadrática de los datos respecto del valor promedio

$$VAR\,(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N} (\bar{x} - x_i)^2}{N}$$

```
C=np.var(x)
print("La varianza es =", C)
```

```
La varianza es = 0.010171163434903046
```

Desviación Estándar (S)

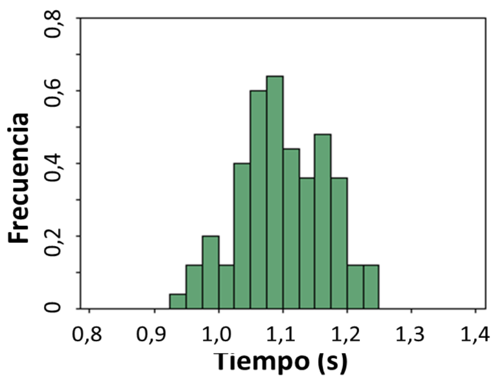
$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

```
S=np.std(x)
print("La desviación estándar es S =", S, "s")
```

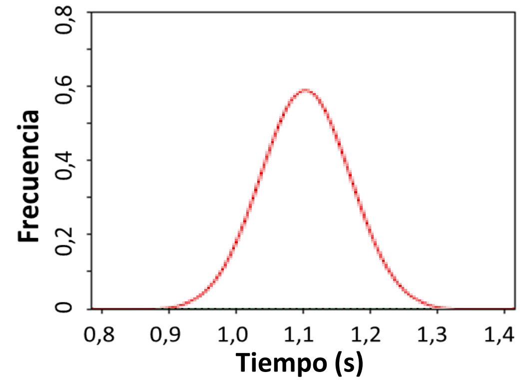
```
La desviación estándar es S = 0.10085218606903396 s
```

1 **Serie** de mediciones

Parámetros de la distribución



$N \to \infty$



$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad \longleftrightarrow \quad \mu = \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

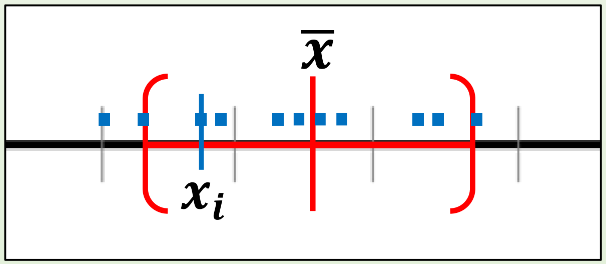
$$\text{VAR (x)} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N} \quad \longleftrightarrow \quad \text{VAR (x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx$$

$$S = \sqrt{VAR\ (x)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}} \quad \longleftrightarrow \quad \sigma = \sqrt{VAR\ (x)}$$

Análisis estadístico… hasta ahora

Tomamos N mediciones de una variable aleatoria:

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_N\}$$



Promedio

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

VARIANZA

$$VAR\,(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}$$

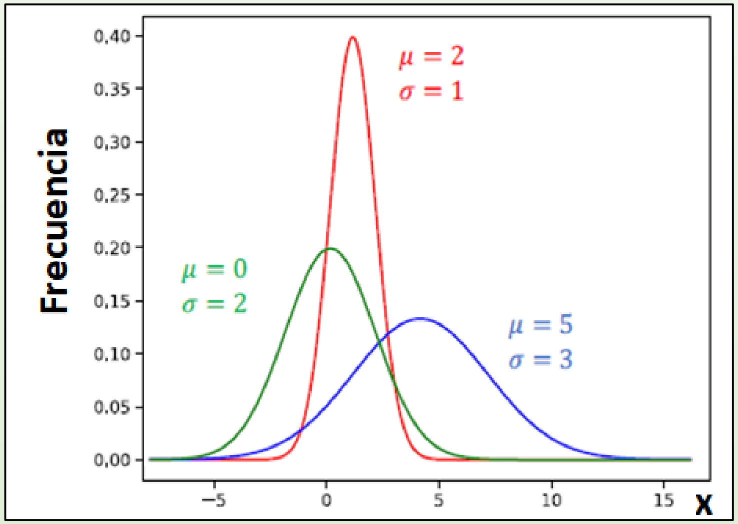
Desviación Estándar (S): Error cuadrático medio de una serie

$$S = \sqrt{Var\,(x)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

Desviación estándar y sus usos ….

Comparación: ¿Quién mide en forma más precisa?

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$



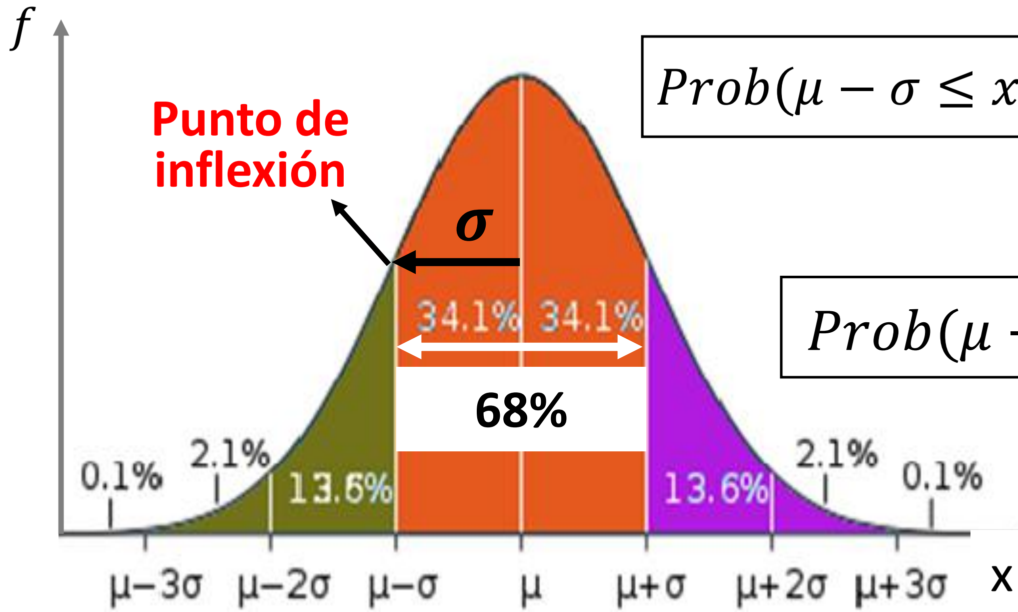
Un MENOR valor de *S* representa MAYOR PRECISIÓN EN LA FORMA DE MEDIR

Desviación estándar y sus usos ….

Si tomamos 1 NUEVA MEDIDA x_i, ésta tendrá una probabilidad de encontrarse en el intervalo de confianza $[\bar{x} - S, \bar{x} + S]$ con ~ 68%

¿Por qué? Volviendo a Guass …

$$Prob(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} dx$$



$$Prob(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) \cong \mathbf{0,6827}$$

~ 68%

$$Prob(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) \cong \mathbf{0{,}95}$$

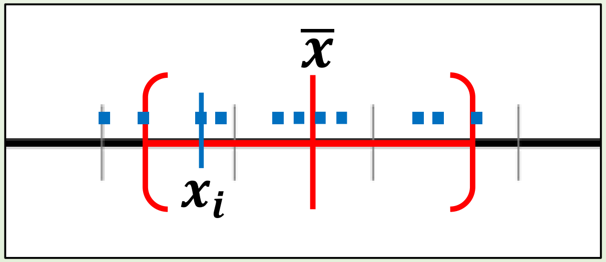
Mayor a 3σ (o 3S para nosotros) es muy baja la probabilidad!!!

$$Prob(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) \cong \mathbf{0{,}99}$$

Análisis estadístico… hasta ahora

Tomamos N mediciones de una variable aleatoria:

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_N\}$$



Promedio

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

VARIANZA

$$VAR\,(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}$$

Desviación Estándar (S): Error cuadrático medio de una serie

$$S = \sqrt{Var\,(x)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

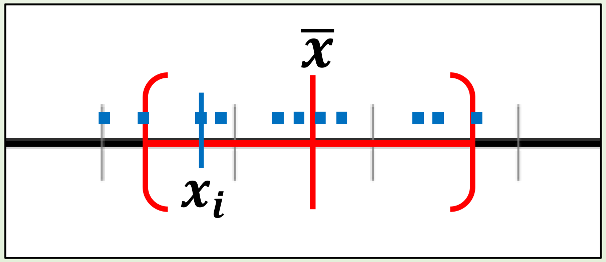
$$x = (\bar{x} \pm \Delta x) \text{ Unidades}$$

¿Y Cómo calculamos Δx?

Análisis estadístico

Tomamos N mediciones de una variable aleatoria:

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_N\}$$



Promedio

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

VARIANZA

$$VAR\,(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}$$

Desviación Estándar (S): Error cuadrático medio de una serie

$$S = \sqrt{Var\,(x)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

Error Estadístico (σ_e): Error cuadrático medio del Promedio

$$\Delta x = \sigma_e = \frac{S}{\sqrt{N}}$$

¿Por qué usar el error estadístico?

Varias Series de mediciones

Teorema del Límite Central (TLC)

- ✓ Si el numero de datos es suficientemente grande, como para tener definido el proceso estadístico, entonces

$$\boldsymbol{S_{x1} \cong S_{x2} \cong S}$$

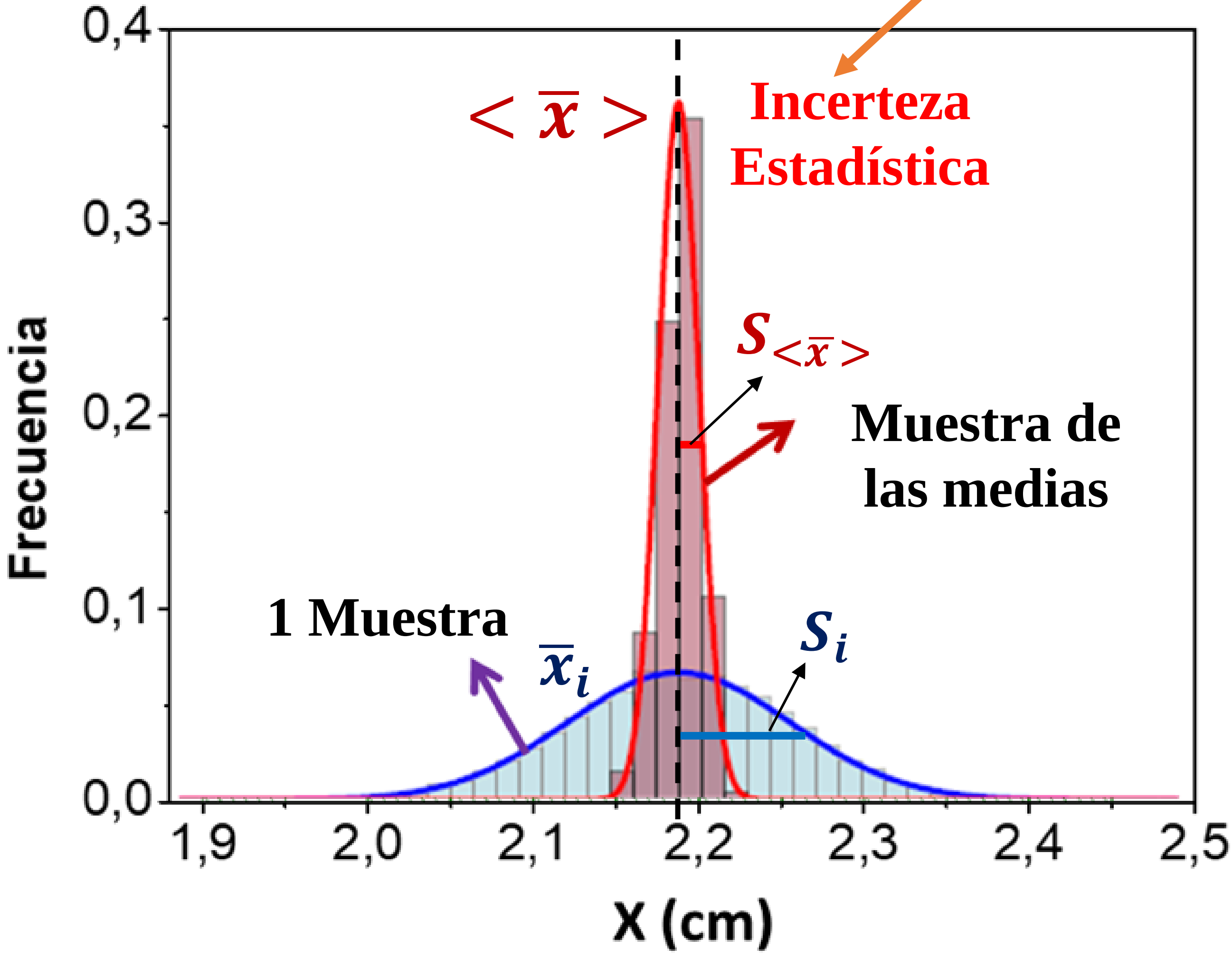
- ✓ **Los valores promedios $\bar{x}_i$ de las diferentes muestras de N datos** cada una, **van a seguir una distribución gaussiana,** centrada en: $< \bar{x} >$

$$\boxed{S_{<\bar{x}>} = \frac{S}{\sqrt{N}} = \sigma_e}$$

Teorema del Límite Central (TLC)

$$\boldsymbol{S_{x1} \cong S_{x2} \cong S}$$

$$S_{<\bar{x}>} = \frac{S}{\sqrt{N}} = \sigma_e$$



En general se toma una única muestra de N medidas …

Se **toma como hipótesis** que bajo las mismas condiciones experimentales, aunque se tome 1 serie de mediciones, se cumple TLC. Entonces:

Valor más representativo

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Desviación Estándar

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

Error del promedio

$$\sigma_e = \frac{S}{\sqrt{N}}$$

$$x = (\bar{x} \pm \Delta x) \text{ Unidades}$$

Si tomo N medidas:

Δx *será igual al que resulte mayor entre* σ_e *y* σ_{ap}

Si realizamos 1 NUEVA SERIE DE MEDIDAS, la probabilidad de encontrar el valor más representativo $\overline{x_i}$ de la nueva serie en el intervalo de confianza $[\bar{x} - \sigma_e, \bar{x} + \sigma_e]$ será de ~ 68%

Desviación estándar y sus usos ….

<u>¿Cuál va a ser el error de cada medida de la muestra general?</u>

13,10 s	13,19 s	13,16 s
13,14 s	13,15 s	13,11 s
13,20 s	13,21 s	13,16 s

~~resolución 0,01 s~~

El error de cada medida es S, no $\boldsymbol{\sigma_{ap}}$

Si tomamos una nueva medición x_i, la incerteza de ese nuevo dato será S

El error del promedio

$$\sigma_e = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

que en la práctica es:

$$\sigma_e = \frac{S}{\sqrt{N}}$$

Está en todos los libros de estadística.

```
Dx=S/np.sqrt(len(x))
print("El error del promedio es Dx =", Dx, "s")
```

```
El error del promedio es Dx = 0.023137078279477 87 s
```

Expresión del resultado $\boxed{T = (\bar{T} \pm \sigma_e)\, Ud.}$

```
print("El resultado de la medición fue: T =", f'({X:.3f} ± {Dx:.3f}) s')
```

```
El resultado de la medición fue: T = (32.542 ± 0.023) s
```

En general se toma una única muestra de N medidas …

Valor más representativo	Desviación Estándar Error de una medida	Error del promedio
$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$	$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$	$\sigma_e = \frac{S}{\sqrt{N}}$

$$x = (\bar{x} \pm \Delta x) \text{ Unidades}$$

Si tomo N medidas:

$\boldsymbol{\Delta x}$ ***será igual al que resulte mayor entre*** $\boldsymbol{\sigma_e}$ ***y*** $\boldsymbol{\sigma_{ap}}$

- Si tomamos 1 NUEVA MEDIDA, la probabilidad de encontrarla en el intervalo de confianza $[\bar{x} - S, \bar{x} + S]$ será de ~ 68%

- Si realizamos 1 NUEVA SERIE DE MEDIDAS, la probabilidad de encontrar el valor más representativo $\bar{x_i}$ de la nueva serie en el intervalo de confianza confianza $[\bar{x} - \sigma_e, \bar{x} + \sigma_e]$ será de ~ 68%

Ejemplo de problema completo

Mido **N = 81** períodos de un péndulo con un cronómetro de resolución 0.01 s. Obtengo los siguientes resultados:

$$\boldsymbol{\overline{T} = 2.251\ s} \qquad \boldsymbol{S = 0.279\ s} \qquad \boldsymbol{\sigma_e} = \frac{S}{\sqrt{N}} = \boldsymbol{0.031\ s}$$

a) **Asumiendo TLC, el RESULTADO del período** es $\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{\overline{T}} \pm \boldsymbol{\sigma_e})$
Expresado con 2 cifras significativas, resulta $\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{2.251} \pm \boldsymbol{0.031})\ \boldsymbol{s}$

b) Si tomo **una nueva medida** del períodos de un péndulo y obtengo $T = \boldsymbol{2.230\ s}$. El error de la nueva medida será igual al del resto de las medidas, y valdrá: $\boldsymbol{S = 0.279\ s}$

c) **La expresión del resultado de la nueva medida** es $\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{2,230} \pm \boldsymbol{0,279})\ \boldsymbol{s}$

d) La nueva medida tendrá ~ **68% de probabilidades** de encontrarse en el intervalo de confianza $[\boldsymbol{\overline{T}} - \boldsymbol{S}, \boldsymbol{\overline{T}} + \boldsymbol{S}]$, es decir $[\boldsymbol{1.972}, \boldsymbol{2.530}]$

e) Si mido **una nueva serie**, $\overline{\boldsymbol{T_{nuevo}}} = \boldsymbol{2.38\ s}$, este nuevo dato tendrá ~ **68% de probabilidades** de encontrarse en el intervalo de confianza $[\boldsymbol{\overline{T}} - \boldsymbol{\sigma_e}, \boldsymbol{\overline{T}} + \boldsymbol{\sigma_e}]$, es decir $[\boldsymbol{2.220}, \boldsymbol{2.286}]$

ACTIVIDAD 1

EXPERIMENTO

Exp. 2

Período de un Péndulo de (50,0 ± 0,1) cm de longitud

- Tomen **30 medidas** del período del péndulo (**N = 30**) ($\theta < 10°$) **con un cronómetro.** Observan una tendencia a la disminución en los valores del tiempo? ¿Se está frenando el péndulo?

- Obtengan **150 medidas más** tomando 5 series de 30 mediciones cada una. Tendrá un **total de N = 180.**

- Realicen 4 Histograma manteniendo el rango del eje X y del eje Y para 1) N = 30, 2) N = 60, 3) N = 120, 4) N = 180. Comparación *¿Depende de N la forma, el centro, y/o el ancho de los histogramas? ¿Presentan una forma similar a la de una distribución Gaussiana?*
- Hagan una Figura superponiendo los histogramas de N = 30 y N =180. Así verán claramente las diferencias!

ACTIVIDAD 1

EXPERIMENTO

Exp. 2

Período de un Péndulo de (50,0 ± 0,1) cm de longitud

- Utilicen grupos con: N = 20, 30, 40, …, 180 calculen el valor más representatico $\overline{T}$ y la desviación estándar S de cada caso. *¿Parece depender* $\overline{T}$ *o* S *de* ***N****?*
- Intenten hacer un gráfico de puntos de $\overline{T}$ en función de ***N*** y otro de S en función de ***N***. ¿Observan una clara dependencia?

- **Calculen el RESULTADO del período del péndulo:** $T = (\overline{T} \pm \Delta T)\ Ud$ considerando que **N = 180** es representativo para su experimento. Exprese el resultado con **2 cifras significativas**. *¿Qué hipótesis se debe cumplir para poder decir que* $\Delta T = \sigma_e$*? ¿Creen que la cumplieron?*

- *Calculen la probabilidad de encontrar un nuevo valor de* ***T en el intervalo de confianza dado por*** $[\overline{T} - S, \overline{T} + S]$, cuánto difiere respecto del teórico?

ACTIVIDAD 2

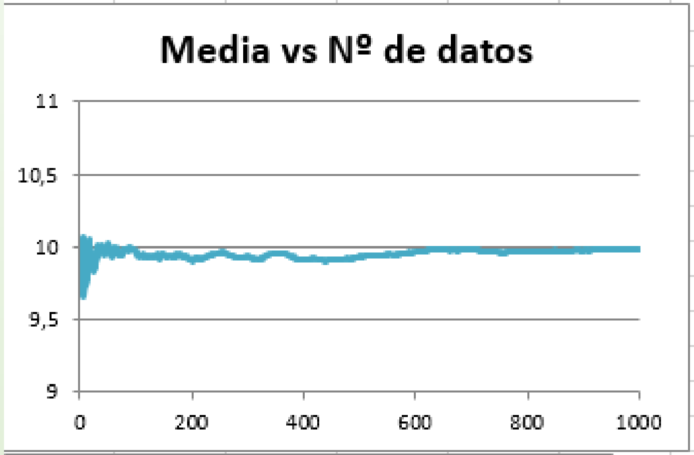
EXPERIMENTO

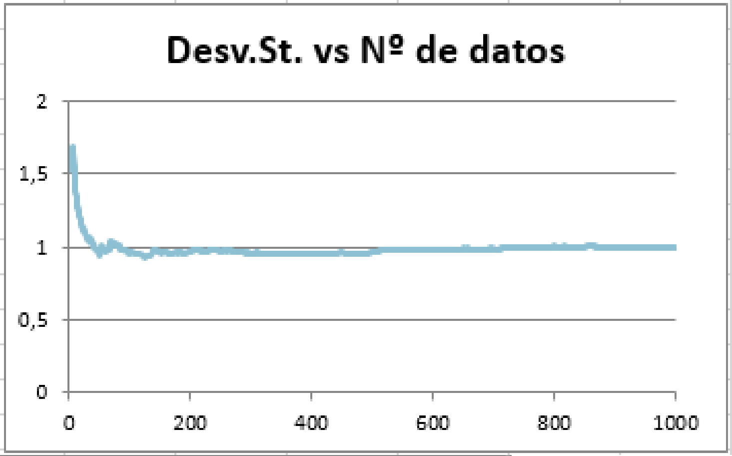
Exp. 2

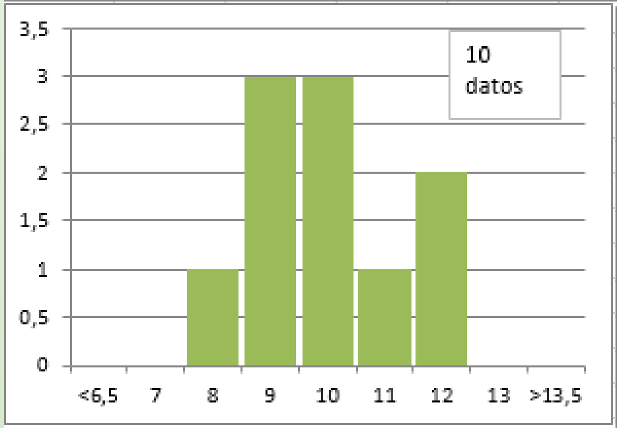
Datos del período del faro de la Clase 1

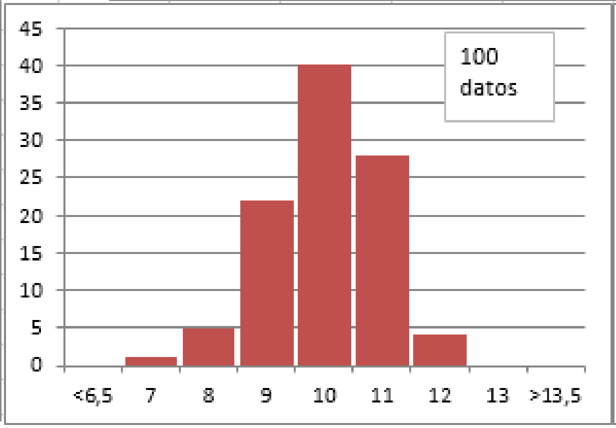
- *Calculen el valor de* $\boldsymbol{S}$ *de los diferentes integrantes del grupo ¿Quién fue más preciso al medir?*

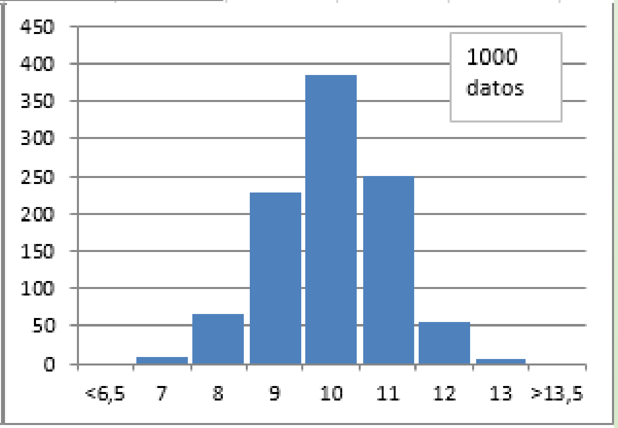
Cómo dependen el valor más representativo y la desviación estándar del número de mediciones











ENTREGA MARTES 03 DEL 9 HASTA LAS 12 H

- Título y Autores siguiendo la Plantilla de Informe.
- Antes de mostrar las Figuras, describan brevemente el experimento realizado. Luego digan qué muestran, citando la Figura que muestran.

1

Figura 1: Los 4 Histogramas de N = 30, 60, 120, 180.
Discutir: *¿depende de N la forma, el centro, el ancho de los histogramas?*

- **Figura 2:** Los Histogramas superpuestos de N = 30 y N = 180.

- **Figura 3:** Resultados de $\boldsymbol{S}$ en función de N para N = 20, 30, 40, …, 180.
  Figura 4: Resultados de $\overline{\boldsymbol{T}}$ en función de N.
- **Discutir las Figuras 3 y 4:** *¿dependen de N estos dos parámetros estadísticos? A partir de qué valor de N puede considerar que cumple con el teorema central del límite?*

- **Expresión del resultado del período del péndulo T (usando N=180) con 2 cifras significativas**. *Discutir si consideran que se cumplió con la hipótesis para expresarlo así.* **Reportar la probabilidad** de encontrar una nueva medida de *T* **en el intervalo de confianza** $[\overline{\boldsymbol{T}} - \boldsymbol{S}, \overline{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{S}]$**.**

ENTREGA MARTES 03 DEL 9 HASTA LAS 12 H

- Antes de mostrar los resultados, describan brevemente el experimento realizado.

2

- Resultados de S del Faro (usen 2 decimales). Discutir quién midió en forma más..