Universidad de Buenos Aires - Exactas
departamento de física

Laboratorio 1

2do Cuatrimestre 2024

Laboratorio 1C: martes 14-20 hs

Lucía Famá, Mónica Agüero,
Marcos Wappner, Franco Eskinazi,
Román Schiaffino

REPASO

Mediciones Indirectas (MI)

Valor de una MF determinada en forma indirecta

$$\boxed{\boldsymbol{W = f(x, y, z, \dots)}} \longrightarrow \boxed{W = (W_0 \pm \Delta W)\ Ud.}$$

$$x = (x_0 \pm \Delta x)\ Ud.$$
$$y = (y_0 \pm \Delta y)\ Ud.$$
$$z = (z_0 \pm \Delta z)\ Ud.$$
$$\vdots$$

x, y, z ... variables independientes

$$\boxed{W_0 = f(x_0, y_0, z_0, \dots)}$$

$$\boxed{\Delta W = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial f(x, y, \dots)}{\partial x}\right|_{x_0, y_{0,\dots}}\right)^2 \Delta x^2 + \left(\left.\frac{\partial f(x, y, \dots)}{\partial y}\right|_{x_0, y_{0,\dots}}\right)^2 \Delta y^2 + \ \dots}}$$

Objetivos de la clase de hoy

Determinar el valor de la aceleración de la gravedad g en un experimento de péndulo simple

ACTIVIDAD

EXPERIMENTO

Exp. 4

Determinar la aceleración de la gravedad g en un experimento de un péndulo simple

$$\boldsymbol{g = (\bar{g} \pm \Delta g)\ Ud.}$$

¿Cómo podemos proseguir para obtener una MF?

- ✓ **1ero:**

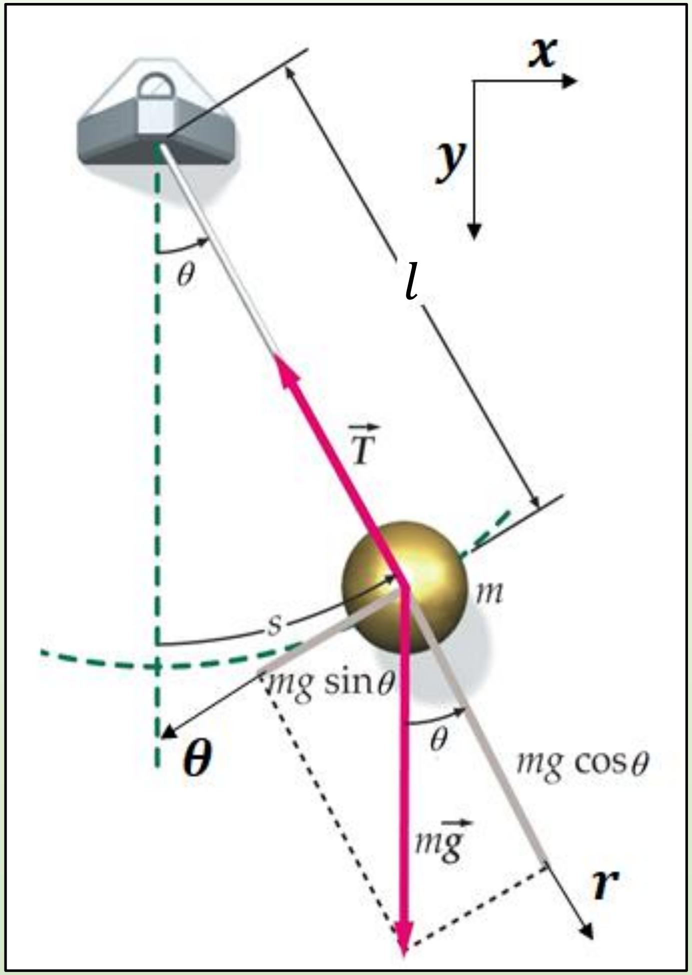
  SIEMPRE hay que ***buscar las LEYES FÍSICAS*** *que conozcamos* ***QUE CONTENGAN LA MF*** *que deseamos calcular.*

- ✓ **2do:**

  Buscar CUÁL O ***CUÁLES PUEDEN APLICARSE*** *con el* ***equipamiento con el que contamos***

Período de un Péndulo Simple

Diagrama de cuerpo libre



2da Ley de Newton: $\sum F_{ext} = ma$

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{r}}: mgcos\theta - T = ma_r \rightarrow a_r = 0 \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}: -\cancel{m}gsen\theta = \cancel{m}a_\theta \rightarrow a_\theta = -gsen\theta \end{cases}$$

$$s = l\theta$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$a_\theta = \frac{d^2s}{dt^2} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -gsen\theta$$

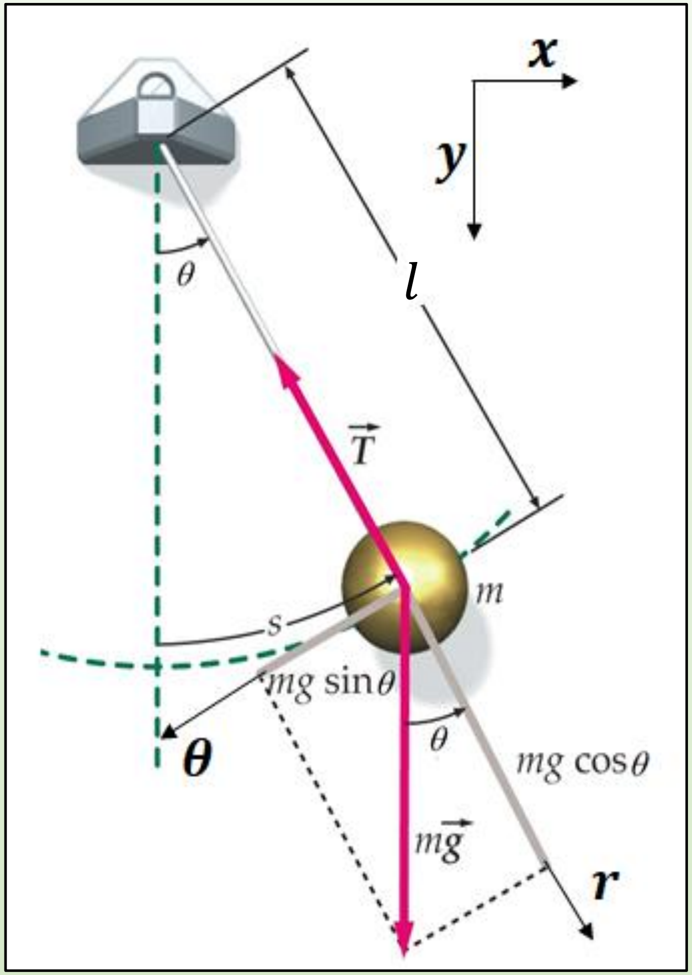
$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} + gsen\theta = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}sen\theta = 0}$$

Ecuación diferencias de 2do orden

Período de un Péndulo Simple

Diagrama de cuerpo libre



Resolviendo la Ecuación de 2do orden

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} sen\theta = 0}$$

$$\theta \ll 1 \;\Rightarrow sen\theta \approx \theta \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Solución: $\theta(t) = \theta_0 \cos(wt + \varphi)$

donde $w = \sqrt{\frac{g}{l}}$ $\quad \mathrm{f} = \frac{w}{2\pi}$ $\quad \mathrm{T} = \frac{2\pi}{w}$

Período de un péndulo de longitud *l*

$$\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

Período de un Péndulo Simple

Aproximación de pequeñas oscilaciones

Ecuación diferencias de 2do orden

$$l\,\ddot{\theta} + g sen\theta = 0$$

Θ(º)	Θ(rad)	senΘ	dif. %	Θ(º)	Θ(rad)	senΘ	dif. %
0	0,00000	0,00000	0,00	15	0,26180	0,25882	1,15
2	0,03491	0,03490	0,02	20	0,34907	0,34202	2,06
5	0,08727	0,08716	0,13	25	0,43633	0,42262	3,25
10	0,17453	0,17365	0,51	30	0,52360	0,50000	4,72

EXPERIMENTO

Exp. 4

ACTIVIDAD

Determinar la aceleración de la gravedad g en un experimento de un péndulo simple

1

- Obtener y expresar g a partir de T y l de la Clase 3 (N = 180), empleando Eq. (1) y el método de mediciones indirectas.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (1)$$

$$T = T_0 \pm \Delta T$$

$$l = l_0 \pm \Delta l$$

ACTIVIDAD

EXPERIMENTO

Exp. 4

Determinar la aceleración de la gravedad g en un experimento de un péndulo simple

Podríamos determinar el valor de g a partir del cálculo de **T y l de otro péndulo con diferente longitud**. ¿Qué esperarían obtener?

$$T_1 = T_0 \pm \Delta T \qquad l_1 = l_0 \pm \Delta l \Rightarrow g_1 = g_0 \pm \Delta g$$

$$T_2 = T_0' \pm \Delta T' \qquad l_2 = l_0' \pm \Delta l' \Rightarrow g_2 = g_0' \pm \Delta g'$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$T_n = T_0^{n\prime} \pm \Delta T_n^{n\prime} \qquad l_n = l_0^{n\prime} \pm \Delta l_n^{n\prime}$$

¿Cuál sería la ventaja?

Objetivos de la clase de hoy

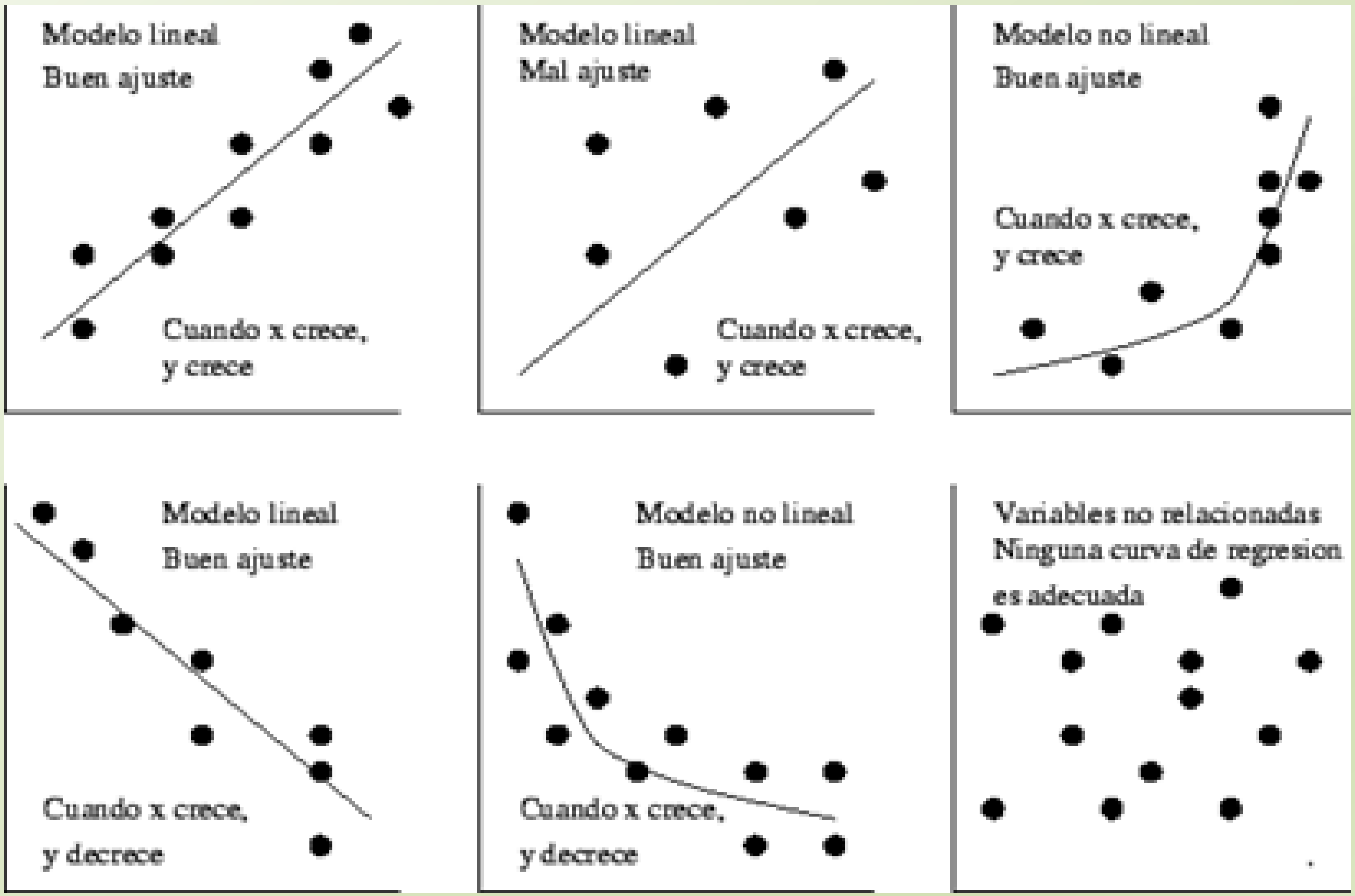
Determinar el valor de la aceleración de la gravedad g en un experimento de péndulo simple

Obtener el resultado de una MF a partir de un NUEVO MÉTODO

Aprender a utilizar un nuevo instrumento de medición

Método de Cuadrados Mínimos

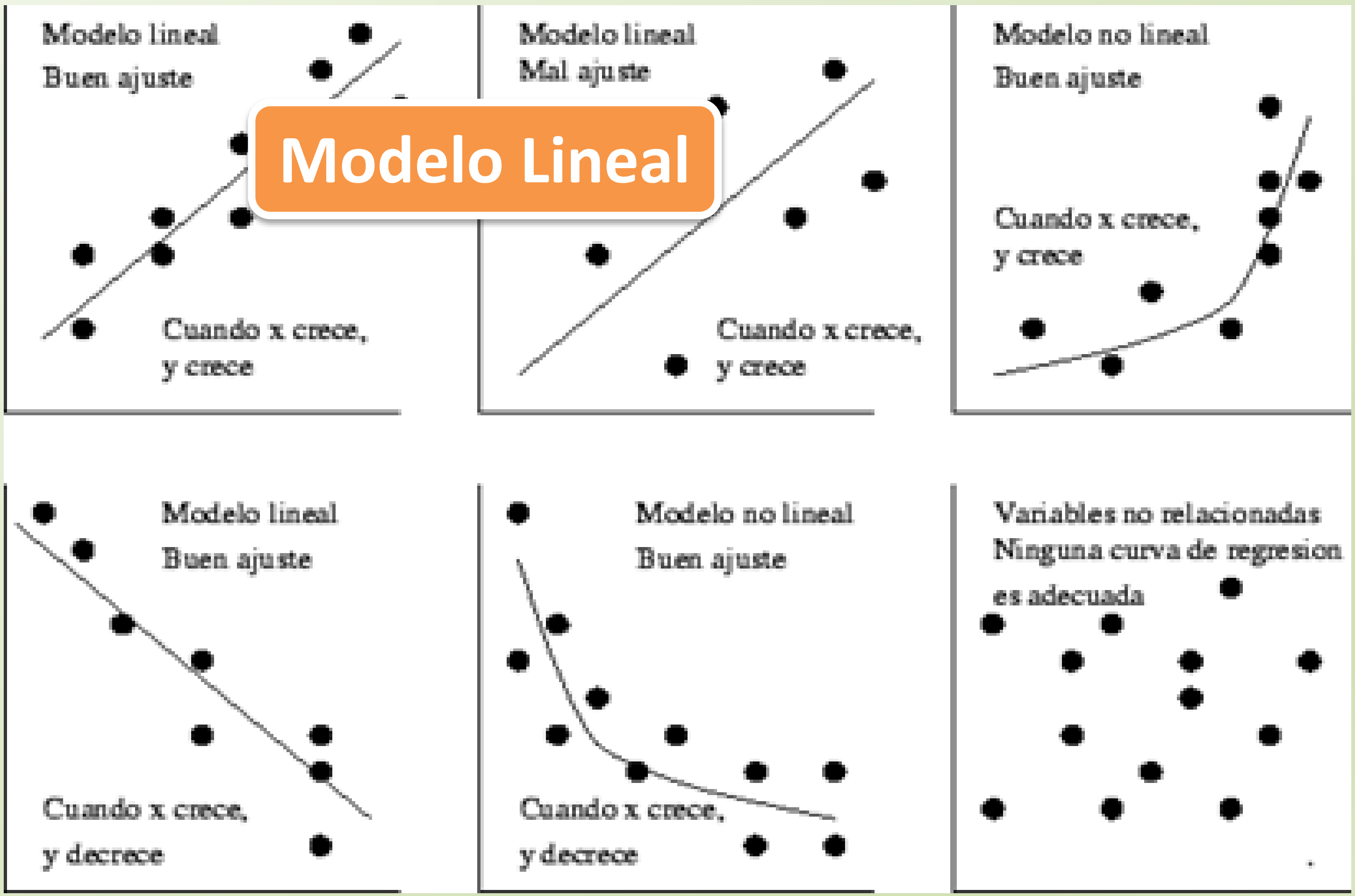
Relación entre dos variables usando un Modelo Matemático



Método de Cuadrados Mínimos

Relación entre dos variables:

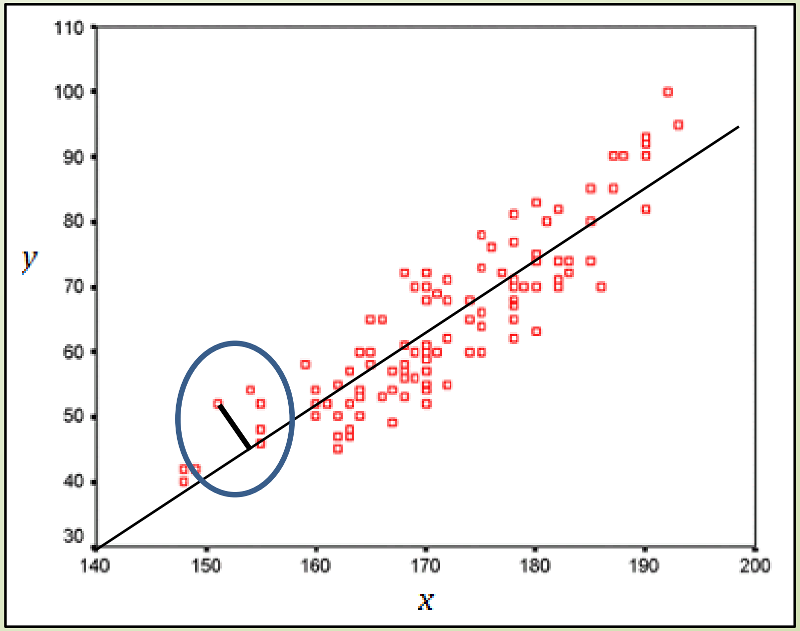
Modelo Matemático más sencillo



Caso más sencillo

Modelo Lineal

Tomamos una serie de medidas (x_i, y_i)



Partamos asumiendo que la relación es:

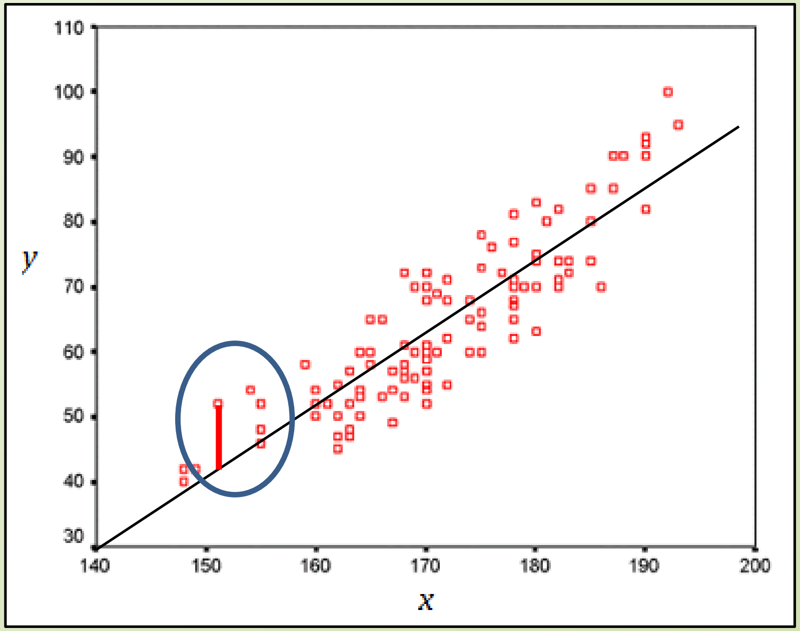
$$y = \color{red}{m}x + \color{red}{b}$$

Buscamos encontrar los parámetros $\color{red}{m}$ y $\color{red}{b}$ que minimicen la distancia de los datos al modelo

Caso más sencillo

Modelo Lineal

Tomamos una serie de medidas (x_i, y_i)



Partamos asumiendo que la relación es:

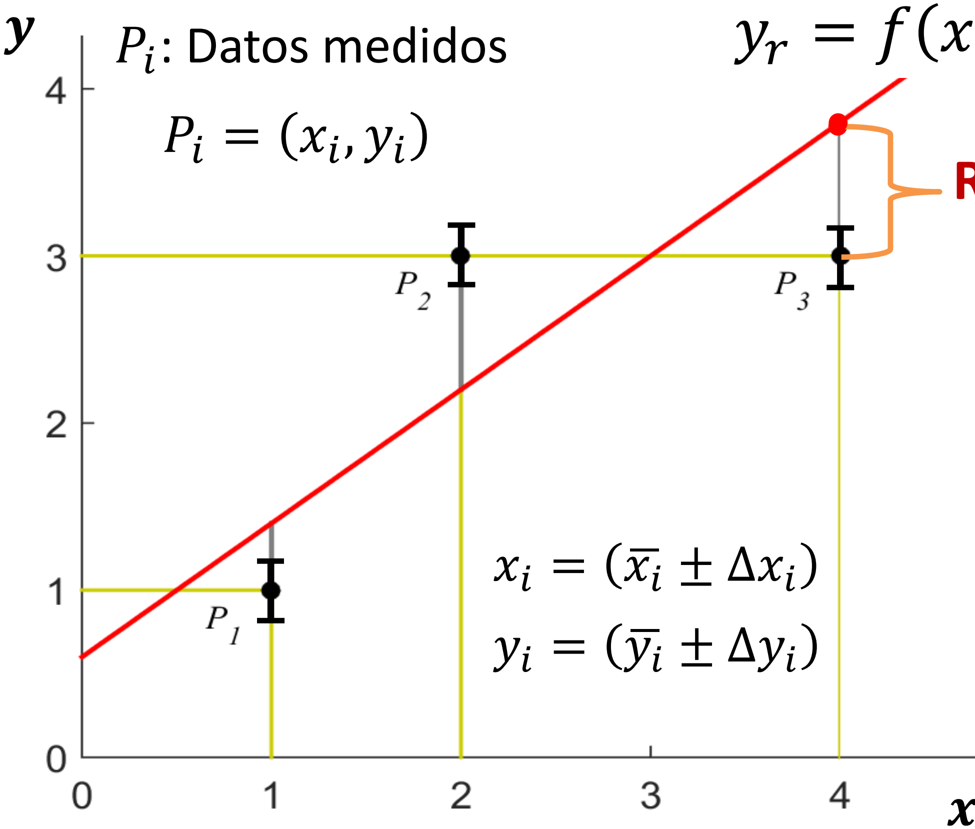
$$y = mx + b$$

Caso aún más sencillo: Considerando la **Distancia en "y"**

Buscamos encontrar los parámetros m y b que minimicen la distancia de los datos al modelo en el eje "y"

Buscamos encontrar los parámetros m y b que minimicen la distancia de los datos al modelo

Considerando la **Distancia en "y"**



P_i: Datos medidos

$P_i = (x_i, y_i)$

$y_r = f(x) = mx + b$

$x_i = (\overline{x_i} \pm \Delta x_i)$

$y_i = (\overline{y_i} \pm \Delta y_i)$

Residuos (δ_i) ⇨ $\delta_i = y_i - y_r$

Experimental **Recta**

Hipótesis:

$$\varepsilon_{ry} \gg \varepsilon_{rx}$$

$$\varepsilon_{ry} = \left|\frac{\Delta y}{y_o}\right|$$

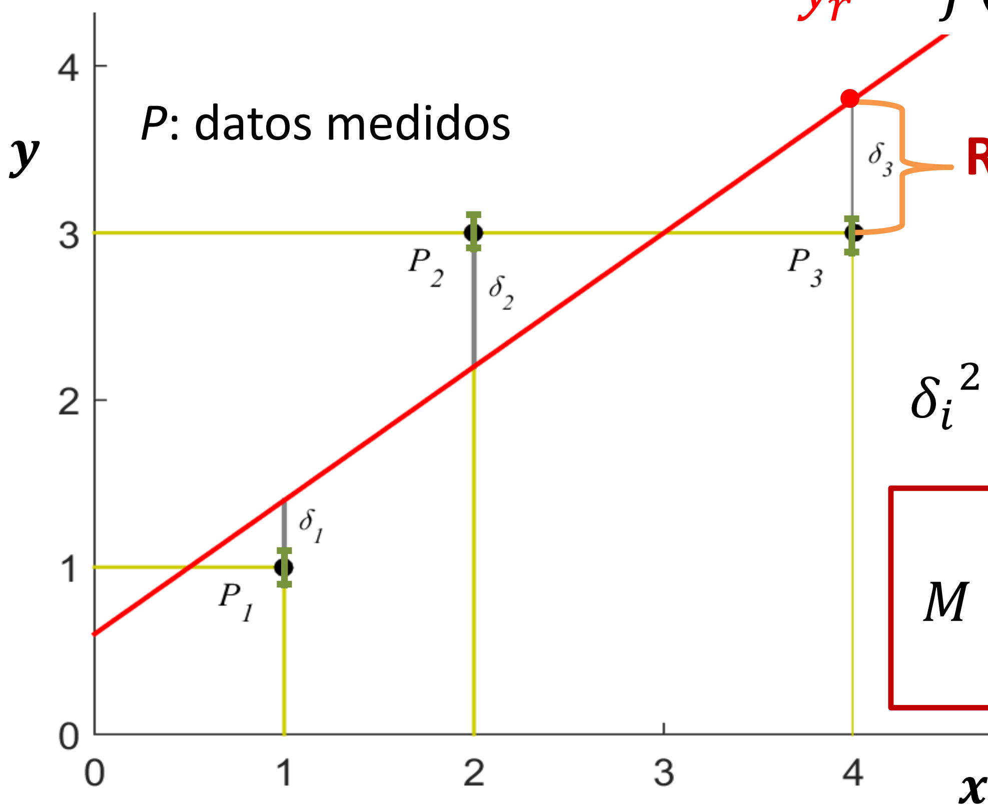
D. C. Baird. Prentice Hall (1991). Apéndice 2

Caso A

Cuadrados mínimos **NO Ponderados**

Cuando todos los datos en "*y*" tienen igual incerteza

$$y_r = f(x) = mx + b$$



Residuos (δ_i) ➡ $\delta_i = y_i - y_r$

Experimental **Recta**

$$\delta_i{}^2 = [y_i - y_r]^2 = [y_i - (mx_i + b)]^2$$

$$\boxed{M = \sum_{i=1}^{N} \delta_i{}^2 = \sum_{i=1}^{N} [y_i - (mx_i + b)]^2}$$

Minimizar la Suma de los Cuadrados de los Residuos

¿Cómo encontramos los parámetros m y b?

Minimizar la Suma de los Cuadrados de los Residuos

$$M(m,b) = \sum_{i=1}^{N} {y_i}^2 + m^2 \sum_{i=1}^{N} {x_i}^2 + Nb^2 + 2mb \sum_{i=1}^{N} x_i - 2m \sum_{i=1}^{N} x_i y_i - 2b \sum_{i=1}^{N} y_i$$

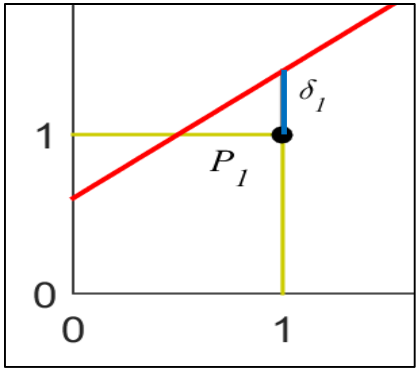
$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial m} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial M}{\partial b} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2m \sum_{i=1}^{N} {x_i}^2 + 2b \sum_{i=1}^{N} x_i - 2 \sum_{i=1}^{N} x_i y_i = 0 \\[2ex] 2Nb + 2m \sum_{i=1}^{N} x_i - 2 \sum_{i=1}^{N} y_i \end{cases}$$

$$\boxed{m = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}} \qquad \boxed{b = \frac{\sum {x_i}^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}}$$

¿Cómo encontramos S_m y S_b?

$$m = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2} \qquad b = \frac{\sum {x_i}^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}$$

Propagación de errores!! → *D. C. Baird. Prentice Hall (1991). Apéndice 2*



Estamos evaluando la incerteza en el eje y

→ *Hipótesis:* Consideremos a la incerteza como δ_i

$$S_m = S_y \sqrt{\frac{N}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}}$$

$$S_b = S_y \sqrt{\frac{\sum x_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}} \quad \dashrightarrow \quad S_y = \sqrt{\frac{\sum {\delta_i}^2}{N-2}}$$

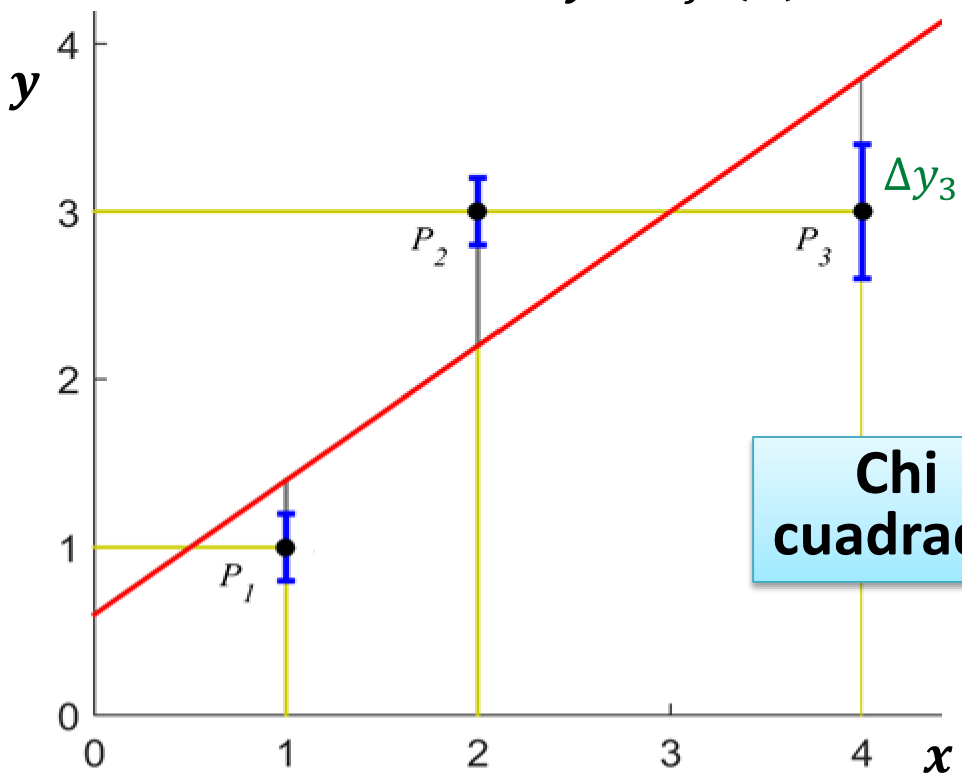
Válido cuando todas las medidas de y tienen igual precisión

Caso B

Cuadrados mínimos **Ponderados**

Cuando todos los datos en "y" tienen diferente incerteza

$$y = f(x) = mx + b$$



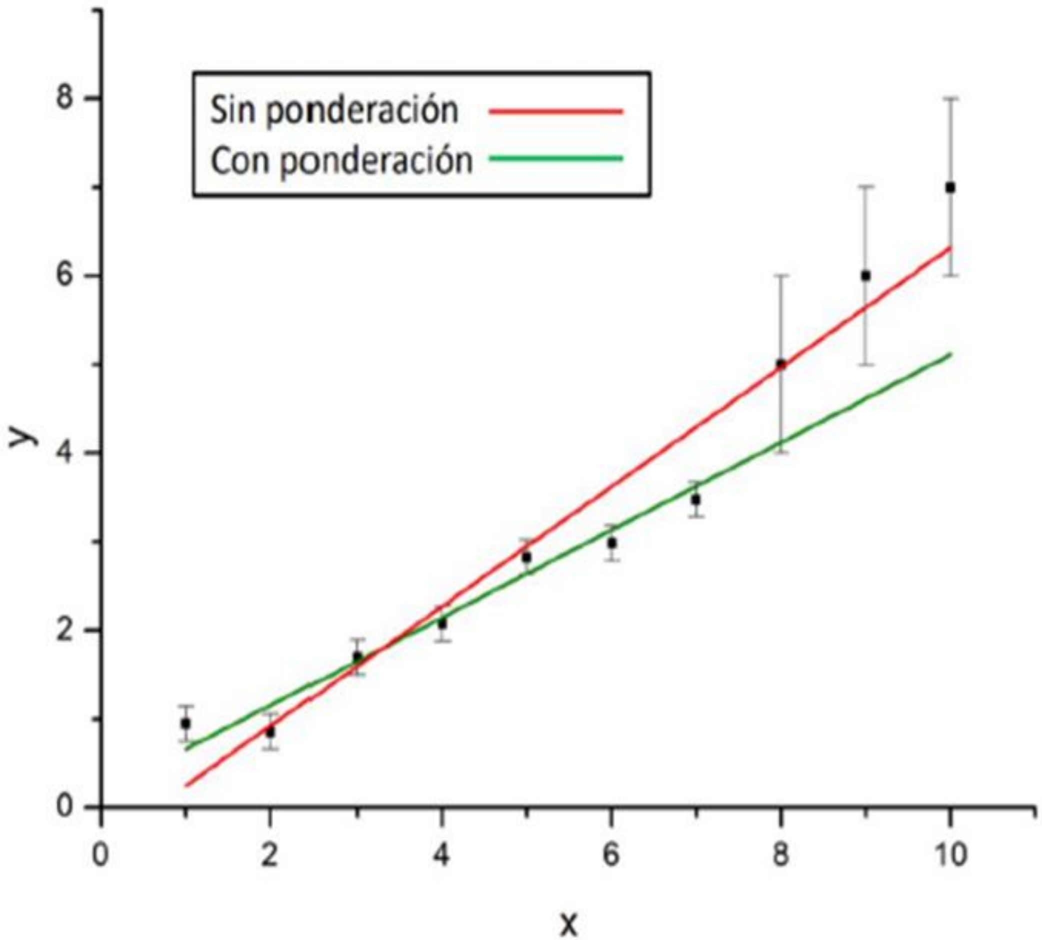
Hipótesis: **Considera a las medidas más precisas como las más relevantes**

Chi cuadrado

$$\chi^2 = \sum_{1}^{N} \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{\Delta y_i} \right]^2$$

Minimizar la Suma de los Cuadrados de los Residuos **Normalizados al error de cada medida**

SIN Ponderación vs CON Ponderación



SIN

$$M = \sum_{1}^{N} [y_i - (mx_i + b)]^2$$

CON

$$\chi^2 = \sum_{1}^{N} \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{\Delta y_i}\right]^2$$

Al ponderar, considera más relevantes a las medidas más precisas

Objetivo de la clase de hoy

Analizar la **relación entre dos magnitudes** y **buscar modelos** que puedan aproximar datos medibles de la naturaleza.

Objetivo Particular de la práctica de hoy

Determinar $\boldsymbol{g}$ a partir del cálculo diferentes péndulos, empleando **UN MODELO LINEAL del MÉTODO DE CUADRADOS MÍNIMOS**

Objetivo de la clase de hoy

Analizar la **relación entre dos magnitudes** y **buscar modelos** que puedan aproximar datos medibles de la naturaleza.

¿Por qué modelar?

Se puede observar la relación entre variables.

Se puede realizar predicciones para MF de alcance no posible.

El resultado es más representativo del sistema que tomar un único caso.

ACTIVIDAD

EXPERIMENTO

Exp. 4

Determinar la aceleración de la gravedad g a partir de T y l de DIFERENTES Péndulos y un MODELO LINEAL DEL MÉTODO DE CUADRADOS MÍNIMOS

2

- Determinar el **período del péndulo T para 10 longitudes l** diferentes.

Rango de l: desde 30 cm hasta lo máximo que puedan (¿2 m?)

- Graficar T **en función de l** (**gráfico de puntos con incertezas**). **Discutir:** *¿Qué forma parece tener la función graficada? ¿Se puede aplicar un modelo lineal al gráfico $T(l)$* y obtener g?

ACTIVIDAD

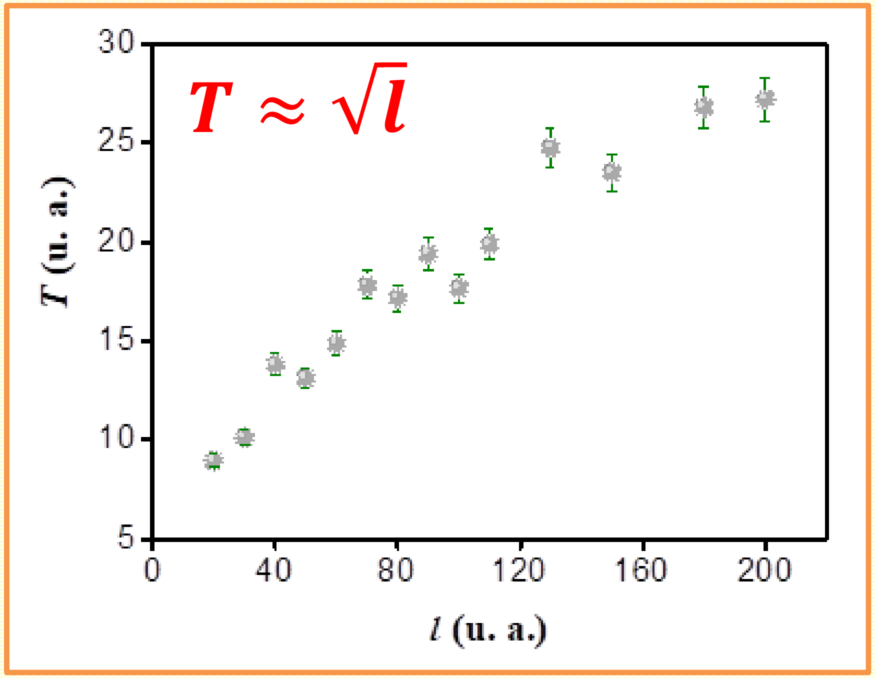
EXPERIMENTO

Exp. 4

Determinar la aceleración de la gravedad g a partir de T y l de DIFERENTES Péndulos y un MODELO LINEAL DEL MÉTODO DE CUADRADOS MÍNIMOS

PERO T y l SE RELACIONAN LINEALMENTE??

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$



Está bien usar el modelo lineal en este caso?

ACTIVIDAD

EXPERIMENTO

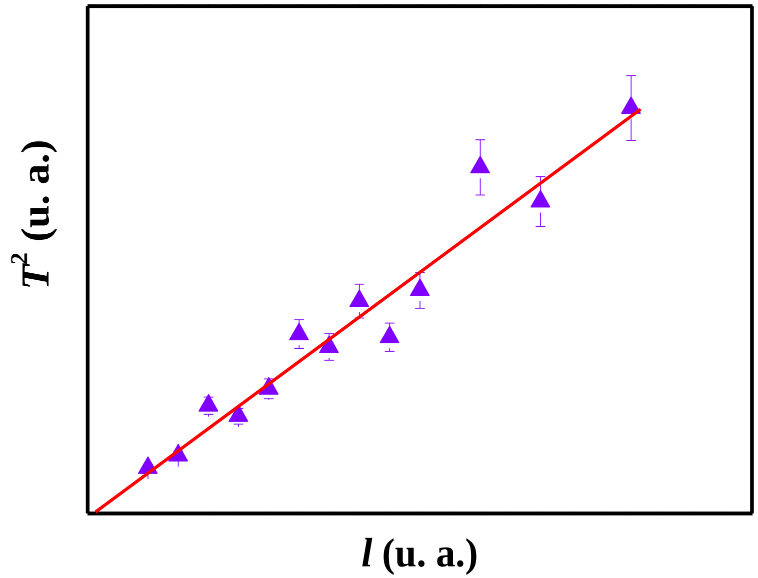
Exp. 4

¿Cómo utilizo el modelo lineal en una relación NO lineal?

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\overset{T}{T} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\overset{\tilde{l}}{\sqrt{l}}$$

$$\underset{\tilde{T}}{T^2} = \underbrace{\frac{4\pi^2}{g}}_{\text{Pendiente}}\underset{l}{l}$$



✓ $y = mx + b$

ACTIVIDAD

EXPERIMENTO

Exp. 4

Determinar la aceleración de la gravedad g a partir de T y l de DIFERENTES Péndulos y un MODELO LINEAL DEL MÉTODO DE CUADRADOS MÍNIMOS

2

- Graficar T^2 **en función de** l (o l **en función de** T^2**, según lo que resulten los** ε_r**, gráfico de puntos con incertezas**).
- Aplicar un **modelo lineal del método de cuadrados mínimos**: y = a.x + b. Expresar los resultados de a y b (*discutir si b resulta significativamente diferente de cero*).
- Obtener el **resultado de** g**.**
- **Comparación de resultados:** *Comparen g obtenido por los diferentes métodos y con el tabulado.*

EXPERIMENTO

Exp. 4

***Tips para no olvidarme de nada*:**

- Si utiliza $\tilde{T} = T^2$ y $l = l$:

  1- Obtenga $\Delta\tilde{T}$ (error absolutos de $T^2 \rightarrow \Delta T^2$) y Δl **Propago!!**

  2- Obtenga los errores relativos de $\tilde{T}$ y l ($\varepsilon_{r_{\tilde{T}}}$ y ε_{rl}) y compárelos

- Graficar T^2 en función de l con las incertezas (o l en función de T^2 dependiendo de los $\varepsilon_{r_{T^2}}$ y ε_{rl}). Colocar las incertezas absolutas de la variable que estará en el eje "y".

- Realizar un ajuste por un modelo lineal: ✓ $y = mx + b$

  ¿Utilizaría el modelo ponderado o no?

  ¿Incluye b al cero? ¿A qué podría deberse que no lo incluyera?

- Calcular y discutir los parámetros de bondad: r, χ_v^2 y realizar el gráfico de los residuos del modelo. **Lo veremos la Clase próxima**

- Obtener $g = (\bar{g} \pm \Delta g)\ Ud.$ a partir de los resultados del modelo.

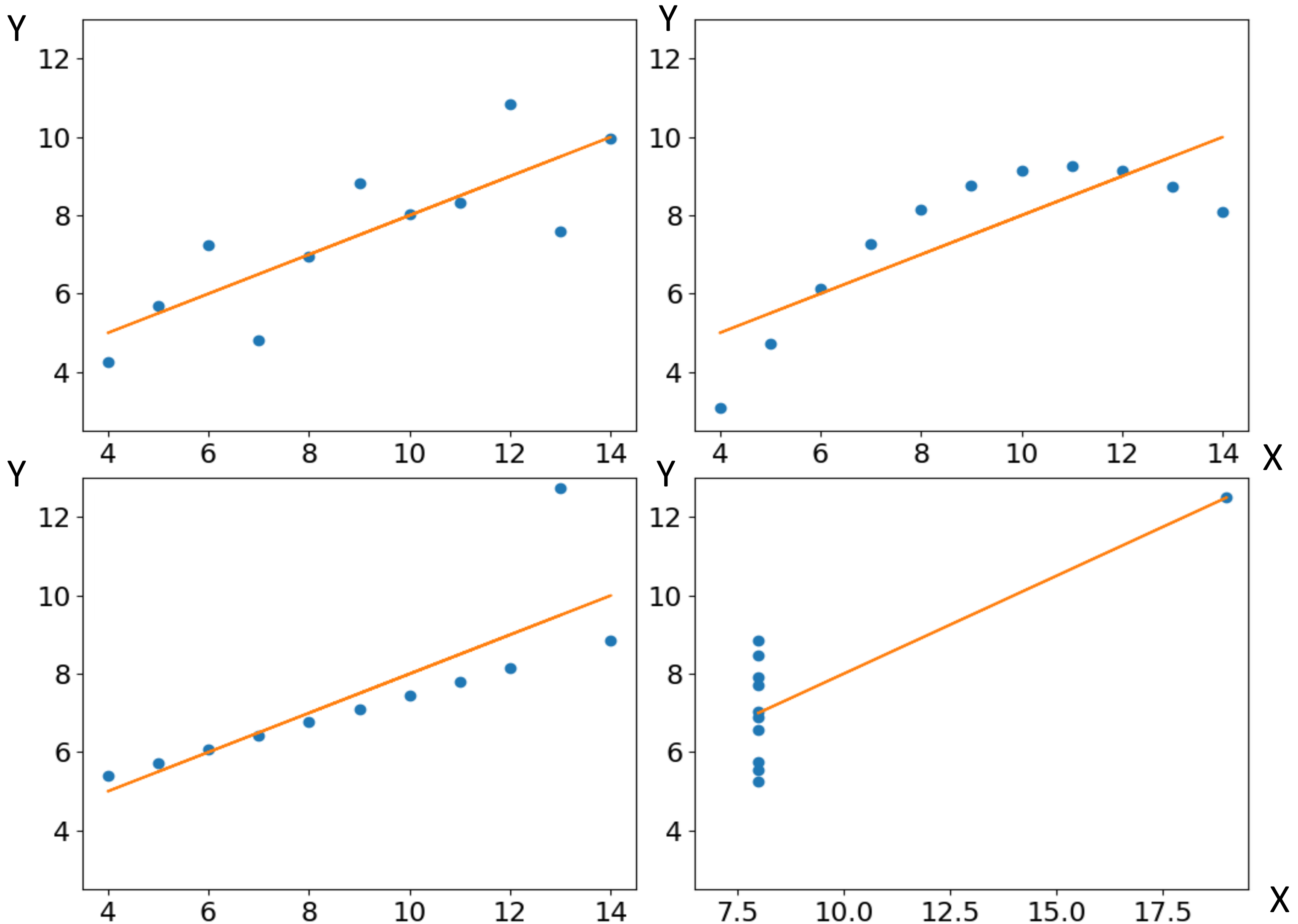
INFORME 2

ENTREGA EN EL CAMPUS EN FORMATO .PDF

MARTES 24 DE SEPTIEMBRE

HASTA LAS 12 HORAS

Cómo si el modelo es adecuado???



Parámetros de BONDAD

Los Parámetros de Bondad pueden darnos una idea de la ***discrepancia entre los valores observados*** *(datos experimentales)* ***y los esperados según el modelo de estudio***

Parámetros de BONDAD

Coeficiente de Correlación de Pearson (r)

Indica cuán fuerte es la correlación entre las variables X e Y

¿Existe algún patrón entre ellas?

$$r = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var(x)Var(y)}} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y}$$

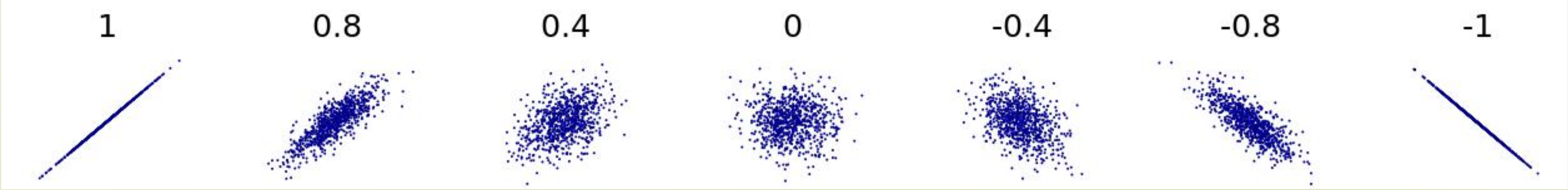
$$Var(x) = {S_x}^2 = \frac{1}{N}\sum(x_i - \bar{x})^2$$

$$Var(y) = {S_y}^2 = \frac{1}{N}\sum(y_i - \bar{y})^2$$

$$Cov(x,y) = S_{xy} = \frac{1}{N}\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

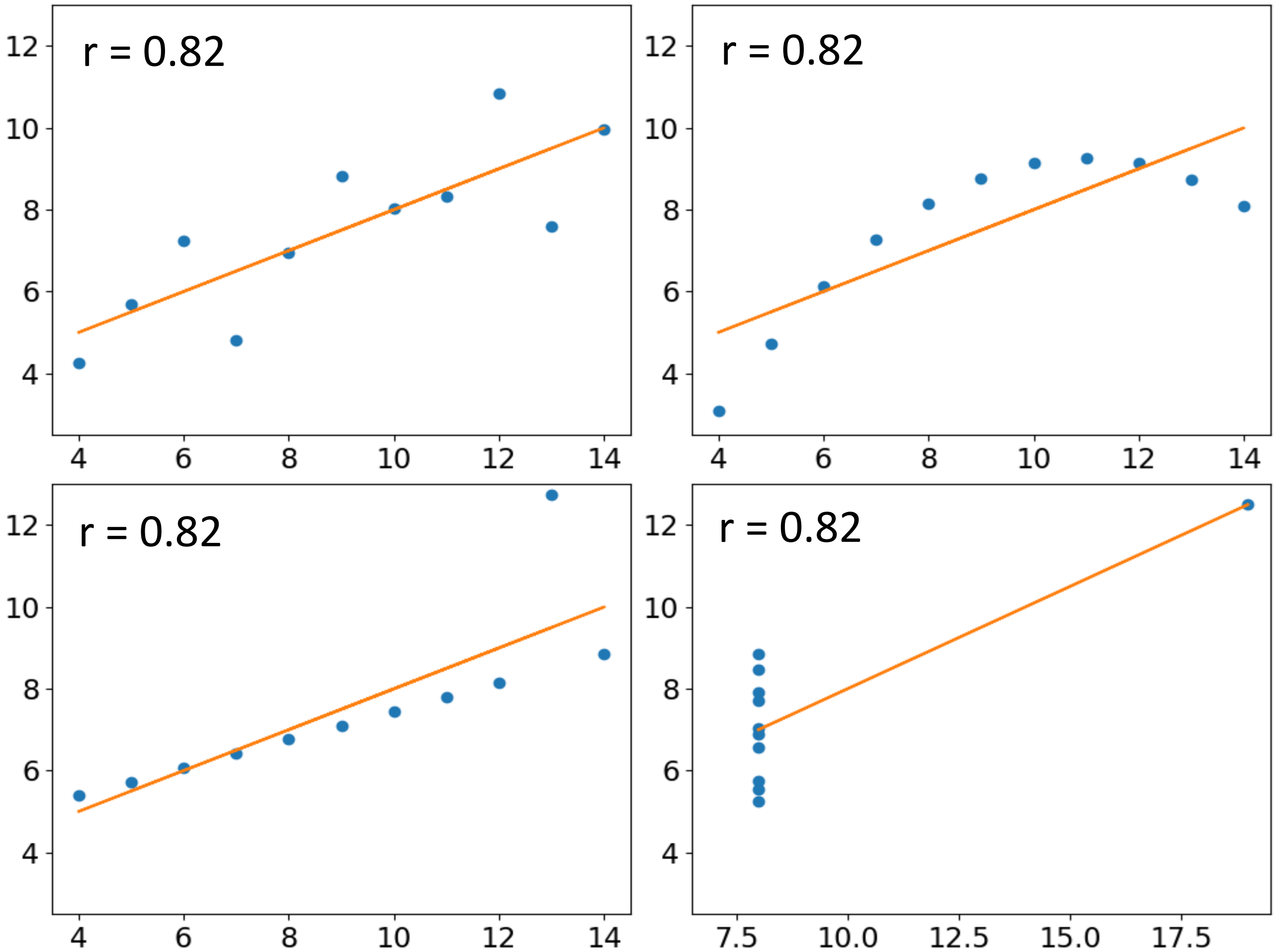
$$-1 \leq r \leq 1$$

Se espera que $|r| \sim 1$



Cálculo del Correlación de Pearson en Python: **corrcoef()**

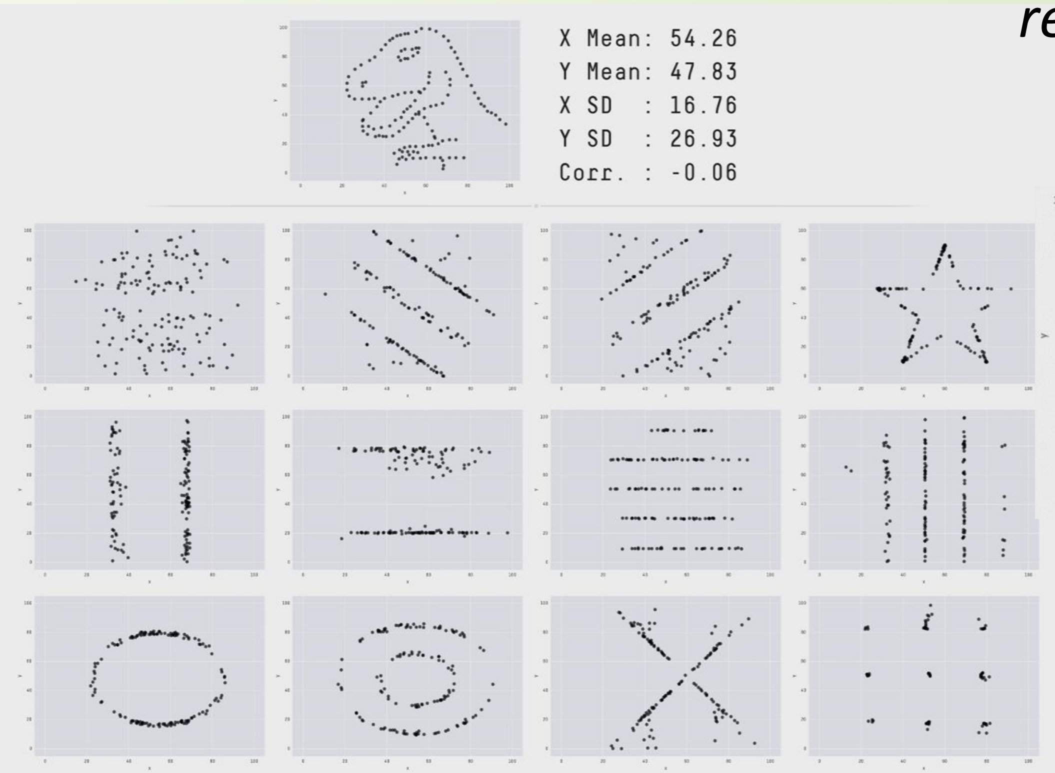
Pero **OJO!!!!** Estos casos tienen igual valor de r!!!!!!

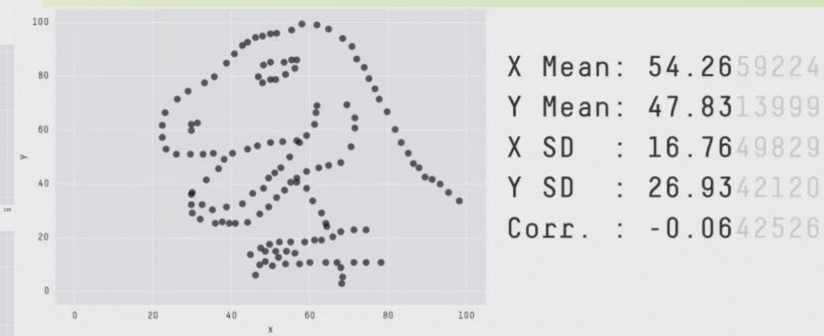


Estos casos tienen los MISMOS Parámetros Estadísticos!!!

Datasaurus dozen

… pero que producen gráficos diferentes
Por eso la IMPORTANCIA de las representaciones gráficas





https://www.autodesk.com/research/publications/same-stats-different-graphs

Parámetros de BONDAD

Chi cuadrado reducido (χ_v^2)

Dimensiona cuánto difieren los datos experimentales de los del modelo. Pesa fuertemente la incerteza Δy

$$\boxed{\chi^2 = \sum_{1}^{N} \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{\Delta y_i}\right]^2}$$

Caso lineal:

N = número de datos

2: los grado de libertad

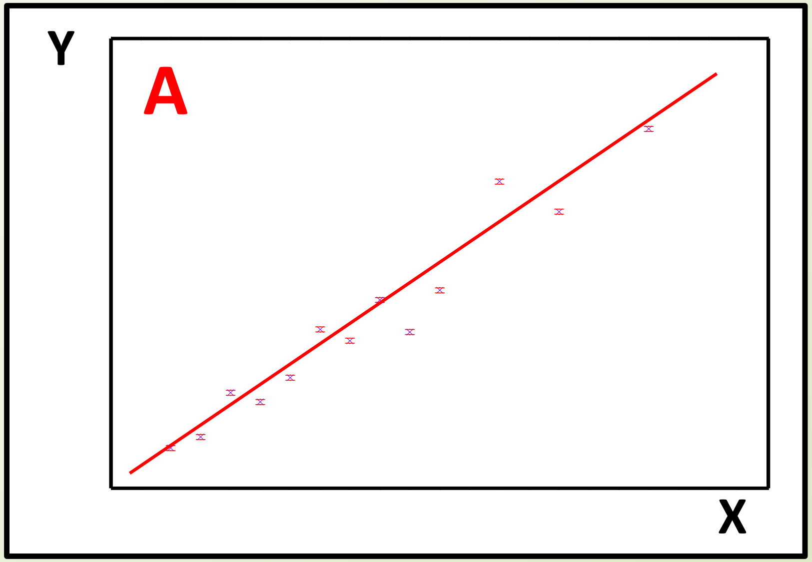
Chi cuadrado reducido ⇨ $\chi_v^2 = \dfrac{\chi^2}{N-2}$

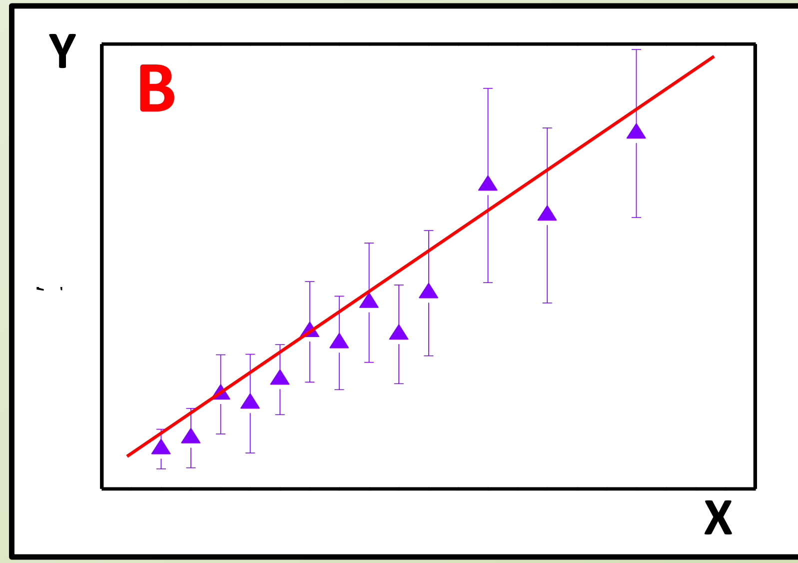
Se espera que χ_v^2

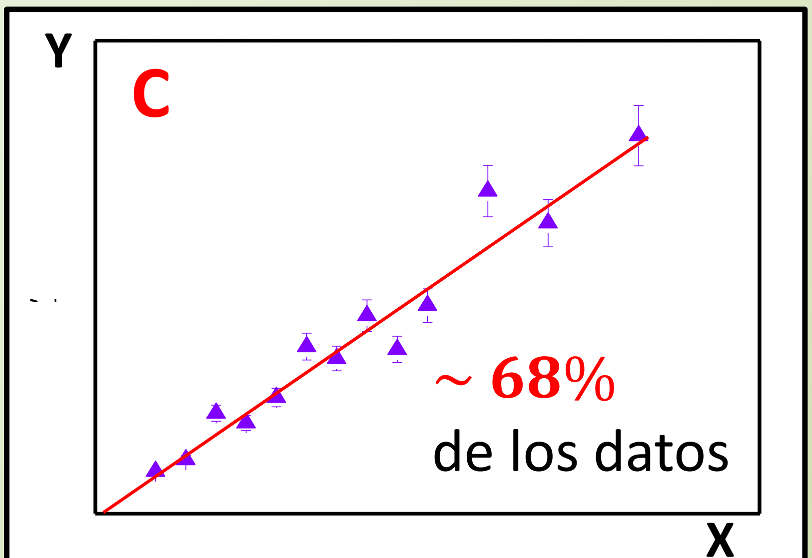
$$\begin{cases} \chi_v^2 \sim \mathbf{1} \\ \chi_v^2 \ll \mathbf{1} \\ \chi_v^2 \gg \mathbf{1} \end{cases}$$

$$\boxed{\chi^2 = \sum_{1}^{N} \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{\Delta y_i} \right]^2}$$

Dimensiona cuánto difieren los datos experimentales de los del modelo.
Pesa fuertemente la incerteza Δy

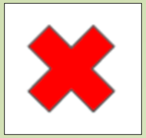






$\chi^2_v \sim 1$  C

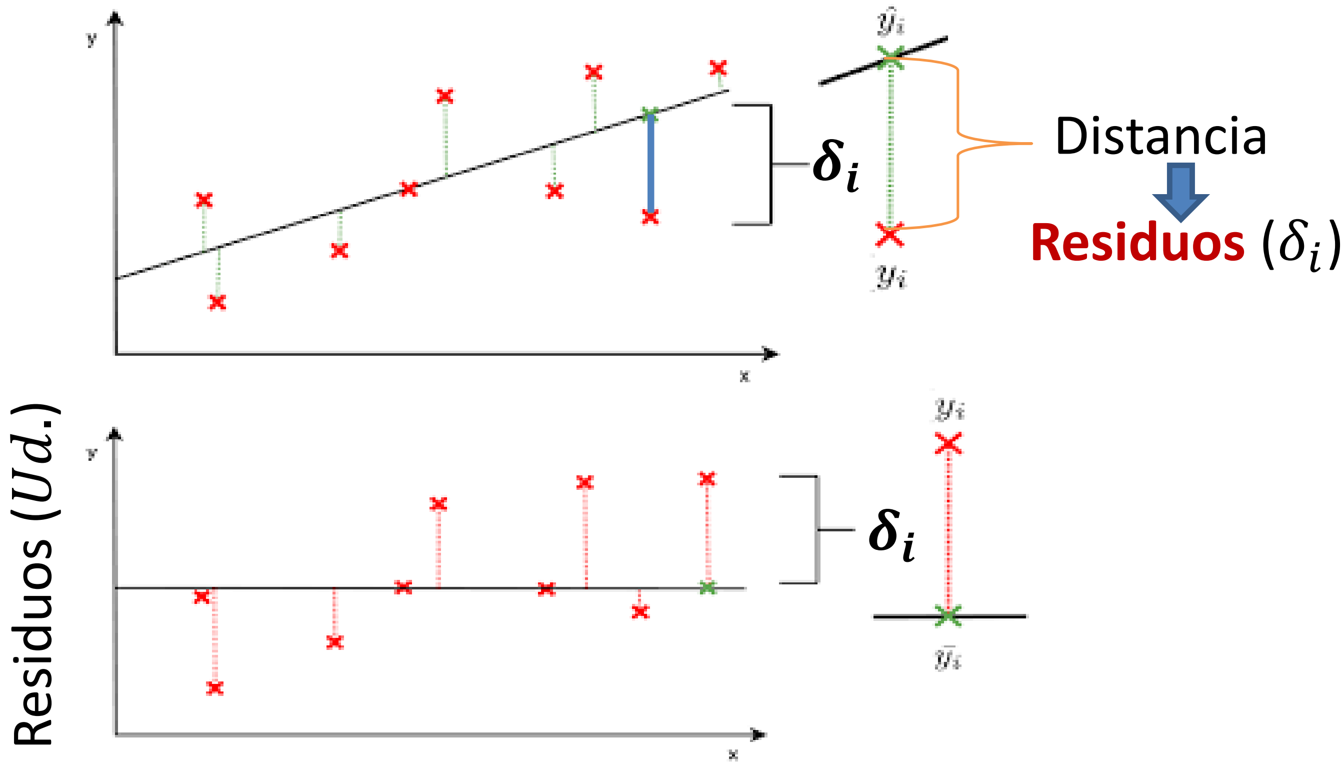
$\chi^2_v \ll 1$  B

$\chi^2_v \gg 1$  A

Parámetros de BONDAD

Gráfico de Residuos

Distancia de los puntos experimentales a la recta, en "y"



Los residuos deben ser datos distribuidos en forma aleatoria alrededor del cero.

NO DEBEN tener ESTRUCTURA

Por esto la **NECESIDAD** de evaluar los **RESIDUOS**

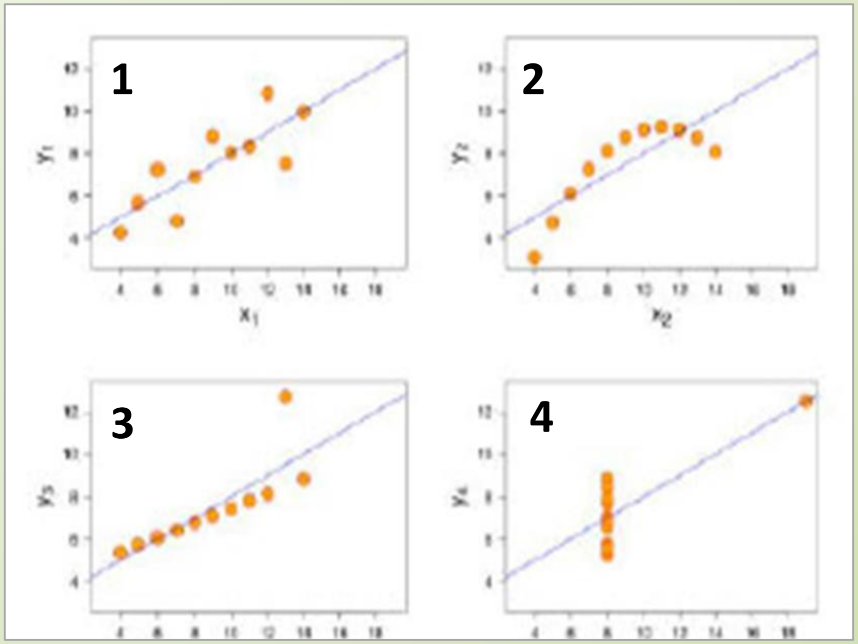
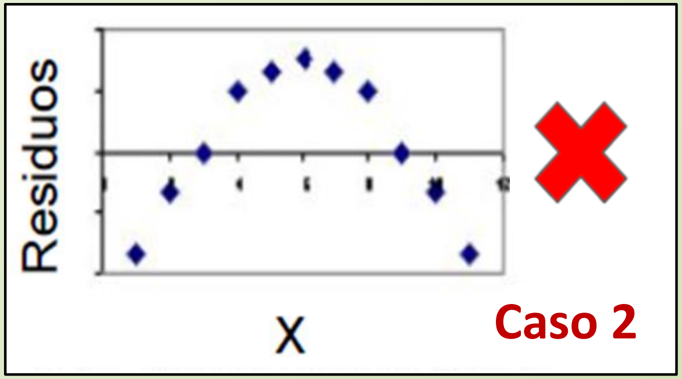
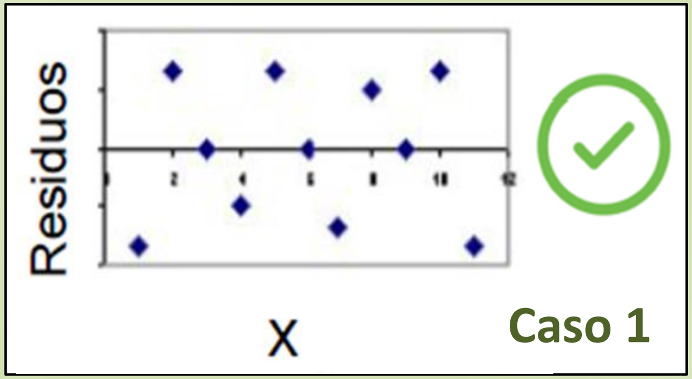


Gráfico de Residuos

En los casos 2, 3 y 4 la distribución de los datos alrededor de la recta no es normal. **Los residuos tienen estructura**





Parámetros de BONDAD

¿Qué esperamos?

Parámetros de BONDAD que nos servirán de ayuda:

Coeficiente de Correlación de Pearson r ⇨ $|r| \sim 1$

Chi-cuadrado reducido χ_v^2 ⇨ $\chi_v^2 \sim 1$

Residuos Sin ESRUCTURA ⇨