Mediciones Indirectas

Diego Luna

April 7, 2017

Motivación

Cuando se informa el resultado de una medición, se debe proporcionar alguna indicación cuantitativa de la calidad del resultado.

Motivación

Cuando se informa el resultado de una medición, se debe proporcionar alguna indicación cuantitativa de la calidad del resultado.

Sin esa indicación, los resultados de las mediciones no podrían ser comparados.

Usos

De un proceso de medición se obtiene:

$$Resultado = \underbrace{\overline{x}}_{\text{mejor estimador}} \pm \underbrace{\Delta x}_{\text{incertidumbre}}$$

Usos

De un proceso de medición se obtiene:

$$Resultado = \underbrace{\overline{x}}_{\text{mejor estimador}} \pm \underbrace{\Delta x}_{\text{incertidumbre}}$$

- Incertidumbres aleatorias (tipo A): Se cuantifican por análisis estadístico. Por ejemplo, el desvío estándar de la muestra.

Usos

De un proceso de medición se obtiene:

$$Resultado = \underbrace{\overline{x}}_{\text{mejor estimador}} \pm \underbrace{\Delta x}_{\text{incertidumbre}}$$

- Incertidumbres aleatorias (tipo A): Se cuantifican por análisis estadístico. Por ejemplo, el desvío estándar de la muestra.
- Incertidumbres sistemáticas (tipo B): Siguen tendencia por exceso o por defecto

Ejemplos de incertidumbres

Tipo A:

- Ruido de medición
- Repetibilidad

Tipos de Incertidumbre

Ejemplos de incertidumbres

Tipo A:

- Ruido de medición
- Repetibilidad

Tipo B:

- Instrumentales (Error de cero, de ganancia)
- Observación (paralaje)
- Ambientales (temperatura de la regla)
- Teóricas (Modelo de medición)

Definiciones

$\Rightarrow \Delta x$ debe incluir incertidumbres aleatorias y sistemáticas

$\Rightarrow$ Tomamos: $\Delta x^2 = \sigma_B^2 + \sigma_A^2$

$\Rightarrow \sigma_A$: algún estimador de la distribución estadística: $\sigma_{promedio}$, p. ej.

$\Rightarrow \sigma_B^2 = \sigma_{apreciacion}^2 + \sigma_{interaccion}^2 + \sigma_{definicion}^2$

Definiciones

$\Rightarrow \Delta x$ debe incluir incertidumbres aleatorias y sistemáticas

$\Rightarrow$ Tomamos: $\Delta x^2 = \sigma_B^2 + \sigma_A^2$

$\Rightarrow \sigma_A$: algún estimador de la distribución estadística: $\sigma_{promedio}$, p. ej.

$\Rightarrow \sigma_B^2 = \sigma_{apreciacion}^2 + \sigma_{interaccion}^2 + \sigma_{definicion}^2$

- $\sigma_{apreciacion}^2$: Mínima división del instrumento de medición
- $\sigma_{interaccion}^2$: Interacción del operador, por ej., el tiempo de reacción.
- $\sigma_{definicion}^2$: Modelo de medición, por ejemplo $s = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow a = \frac{2s}{t^2}$

Tipos de Mediciones

Mediciones Directas (las que vimos hasta ahora)
Ejemplos:

- Período de un péndulo medido con un cronómetro
- Medición de la mesa con cinta métrica

Tipos de Mediciones

Mediciones Directas (las que vimos hasta ahora)
Ejemplos:

- Período de un péndulo medido con un cronómetro
- Medición de la mesa con cinta métrica

Mediciones Indirectas (Clase de hoy)
Ejemplos:

- Medir una velocidad a partir de una distancia y un tiempo: $v = \frac{s}{t}$
- Determinación de un volúmen.

Tipos de Mediciones

Lo que acabamos de ver, es para mediciones DIRECTAS

Mediciones indirectas

¿Qué sucede cuando el resultado de medición es una función de una o más mediciones?

Mediciones indirectas

¿Qué sucede cuando el resultado de medición es una función de una o más mediciones?

Medición indirecta

$$f = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N)$$

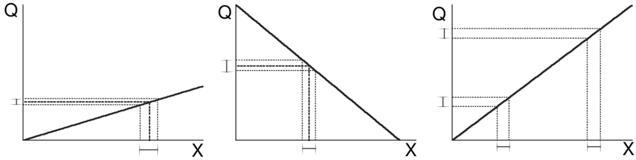
siendo x_i mediciones directas con sus respectivas incertidumbres Δx_i

Medición indirecta: transformación lineal

Medición indirecta

$$Q = mX + b$$

Mido X con una incertidumbre ΔX y quiero conocer Q y ΔQ

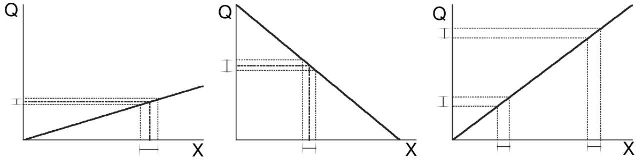


Medición indirecta: transformación lineal

Medición indirecta

$$Q = mX + b$$

Mido X con una incertidumbre ΔX y quiero conocer Q y ΔQ



Si $g(X) = Ae^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2}$ y realizo la transformación $X \rightarrow mX + b \Rightarrow$ $g'(Q)$ también es normal con $\sigma' = \mid m \mid \sigma$

Medición indirecta: Ejemplo

Transformación de grados Celsius a Fahrenheit

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

Resultado de medición: $C = 25°C \pm 1°C$

Medición indirecta: Ejemplo

Transformación de grados Celsius a Fahrenheit

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

Resultado de medición: $C = 25°C \pm 1°C$

¿Cuál es el resultado de medición en grados Fahrenheit?

Medición indirecta: Ejemplo

Transformación de grados Celsius a Fahrenheit

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

Resultado de medición: $C = 25°C \pm 1°C$

¿Cuál es el resultado de medición en grados Fahrenheit?
RESPUESTA:
$F = 45°F \pm \frac{9}{5}°F$

Mediciones indirectas

Un caso un poco mas general

Medición indirecta

$$f = f(x)$$

Siendo x una medición directa con su incertidumbre Δx y f una función no-lineal

Un caso un poco mas general

Medición indirecta

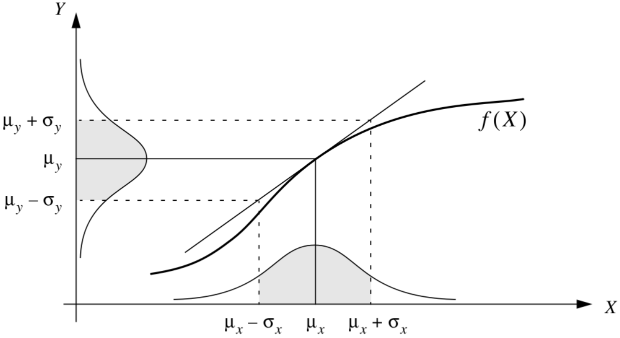
$$f = f(x)$$

Siendo x una medición directa con su incertidumbre Δx y f una función no-lineal

¿Cómo calculo la incertidumbre Δf a partir de Δx?

RESPUESTA:

Como la función no es lineal, aproximo a una recta:



$$\Delta f = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\mu_x} (\Delta x)$$

$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\mu_x}$ es la pendiente de la recta evaluada en μ_x

Mediciones indirectas

Generalizacion a más de una variable

$$f = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N)$$

$$\Delta f = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 (\Delta x_i)^2}$$

- $\frac{\partial f}{\partial x_i}$: Derivada parcial de f respecto de x_i
- Esto se conoce como *propagación de incertidumbres por series de Taylor*

Mediciones indirectas

Generalizacion a más de una variable

$$f = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N)$$

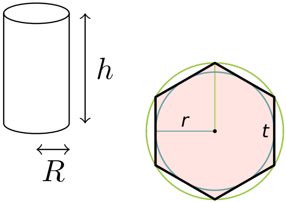
$$\Delta f = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 (\Delta x_i)^2}$$

- $\frac{\partial f}{\partial x_i}$: Derivada parcial de f respecto de x_i
- Esto se conoce como *propagación de incertidumbres por series de Taylor*

Importante: no olvidar supuestos

- Distribución normal
- Variables independientes (no correlacionadas)

Mediciones indirectas



Práctica del día

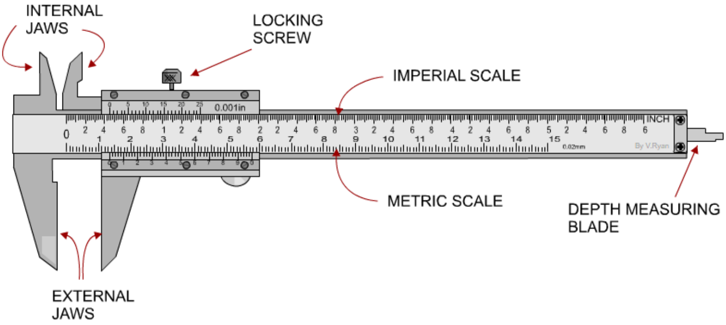
Medir el volumen de una pieza con tres técnicas y calcular las incertidumbre de medición.

a) A partir de mediciones dimensionales: $V = \left(2\sqrt{3}r^2 - \pi R^2\right) h$

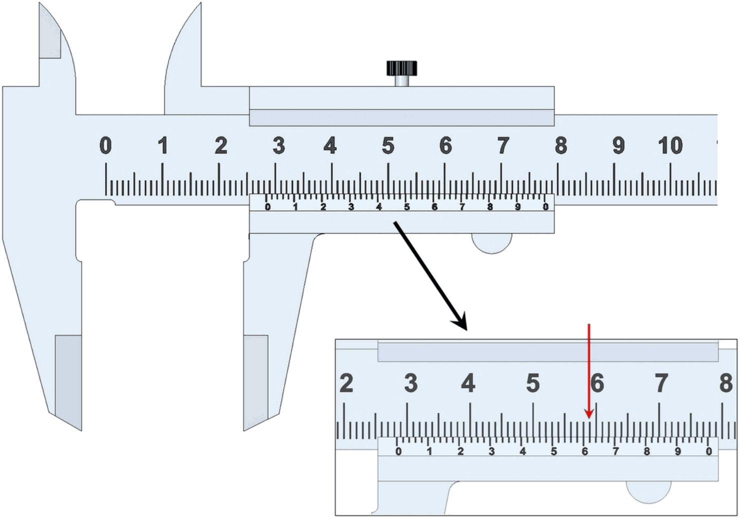
b) Por volumen desplazado: $V = V_{final} - V_{inicial}$

c) A partir de su densidad: $V = \frac{m}{\rho}$

Uso de calibre



Uso de calibre



Escritura de resultados de medición

Ejemplo: Mido una mesa con una regla. Obtengo $\bar{x} = 1234,78$ mm y $\sigma = 3,39$ mm.

¿Cómo se reporta este resultado?

Escritura de resultados de medición

Ejemplo: Mido una mesa con una regla. Obtengo $\bar{x} = 1234,78$ mm y $\sigma = 3,39$ mm.

¿Cómo se reporta este resultado?

1. Redondeo la incertidumbre a una cifra: $\sigma = 3$ mm

Escritura de resultados de medición

Ejemplo: Mido una mesa con una regla. Obtengo $\bar{x} = 1234,78$ mm y $\sigma = 3,39$ mm.

¿Cómo se reporta este resultado?

1. Redondeo la incertidumbre a una cifra: $\sigma = 3$ mm
2. Redondeo el valor medio hasta la posición que obtuve en la incertidumbre: $\bar{x} = 1235$ mm.

Escritura de resultados de medición

Ejemplo: Mido una mesa con una regla. Obtengo $\bar{x} = 1234,78$ mm y $\sigma = 3,39$ mm.

¿Cómo se reporta este resultado?

1. Redondeo la incertidumbre a una cifra: $\sigma = 3$ mm
2. Redondeo el valor medio hasta la posición que obtuve en la incertidumbre: $\bar{x} = 1235$ mm.
3. Resultado: La longitud de L de la mesa es $L = (1235 \pm 3)$ mm.

Ejemplo: Mido una mesa con una regla. Obtengo $\bar{x} = 1234,78$ mm y $\sigma = 3,39$ mm.

¿Cómo se reporta este resultado?

1. Redondeo la incertidumbre a una cifra: $\sigma = 3$ mm
2. Redondeo el valor medio hasta la posición que obtuve en la incertidumbre: $\bar{x} = 1235$ mm.
3. Resultado: La longitud de L de la mesa es $L = (1235 \pm 3)$ mm.

Nota: En este caso, se dice que conocemos L con 4 cifras significativas.

Escritura de resultados de medición

Ejemplo: Mido una mesa con una regla. Obtengo $\bar{x} = 1234,78$ mm y $\sigma = 3,39$ mm.

¿Cómo se reporta este resultado?

1. Redondeo la incertidumbre a una cifra: $\sigma = 3$ mm
2. Redondeo el valor medio hasta la posición que obtuve en la incertidumbre: $\bar{x} = 1235$ mm.
3. Resultado: La longitud de L de la mesa es $L = (1235 \pm 3)$ mm.

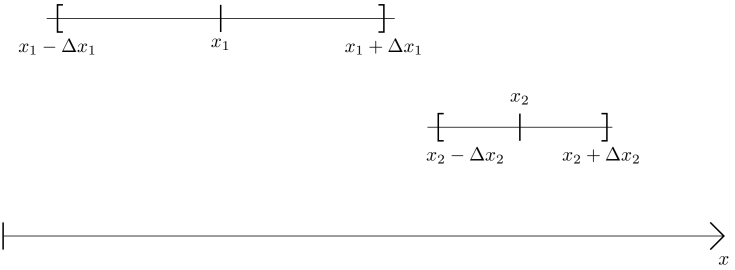
Nota: En este caso, se dice que conocemos L con 4 cifras significativas.

Ejercicio: Repetir para $\sigma = 11,3$ mm.

A MEDIR!

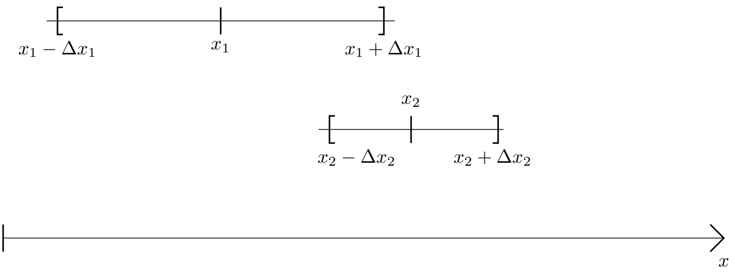
Comparabilidad de resultados

Resultados no-comparables:



Comparabilidad de resultados

Resultados comparables:



En términos matemáticos

Comparabilidad de resultados

En términos matemáticos

Resultados comparables:

$\mid x_2 - x_1 \mid \leq \Delta x_1 + \Delta x_2$

Comparabilidad de resultados

En términos matemáticos

Resultados comparables:

$| x_2 - x_1 | \leq \Delta x_1 + \Delta x_2$

Resultados no-comparables:

$| x_2 - x_1 | > \Delta x_1 + \Delta x_2$

Incertidumbres relativas

$$x \pm \Delta x$$

Incertidumbres relativas

$$x \pm \Delta x$$

Incertidumbre relativa:

$\Delta x_{rel} = \frac{\Delta x}{|x|}$

Incertidumbres relativas

$$x \pm \Delta x$$

Incertidumbre relativa:

$\Delta x_{rel} = \frac{\Delta x}{|x|}$

Incertidumbre porcentual:

$\Delta x_{\%} = 100 \times \frac{\Delta x}{|x|} = 100 \times \Delta x_{rel}$

Incertidumbres relativas

$$x \pm \Delta x$$

Incertidumbre relativa:
$\Delta x_{rel} = \frac{\Delta x}{|x|}$

Incertidumbre porcentual:
$\Delta x_{\%} = 100 \times \frac{\Delta x}{|x|} = 100 \times \Delta x_{rel}$

Caso particular: $f(x, y) = \alpha x^{\beta} y^{\gamma}$
$\Rightarrow \Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \Delta x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \Delta y^2}$; y se puede demostrar que
$\frac{\Delta f^2}{f^2} = \beta^2 \frac{\Delta x^2}{x^2} + \gamma^2 \frac{\Delta y^2}{y^2}$

Incertidumbres relativas

$$x \pm \Delta x$$

Incertidumbre relativa:
$\Delta x_{rel} = \frac{\Delta x}{|x|}$

Incertidumbre porcentual:
$\Delta x_{\%} = 100 \times \frac{\Delta x}{|x|} = 100 \times \Delta x_{rel}$

Caso particular: $f(x, y) = \alpha x^{\beta} y^{\gamma}$
$\Rightarrow \Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \Delta x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \Delta y^2}$; y se puede demostrar que
$\frac{\Delta f^2}{f^2} = \beta^2 \frac{\Delta x^2}{x^2} + \gamma^2 \frac{\Delta y^2}{y^2}$

Tarea: Interpretar los casos $f(x, y) = xy$ y $f(x, y) = x/y$

Referencias

Baird, D. C. (1962). Experimentation: an introduction to measurement theory and experiment design. Prentice Hall.

Fornasini, P. (2008). The uncertainty in physical measurements: an introduction to data analysis in the physics laboratory. Springer Science and Business Media.