universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

MEDICIÓN DIRECTAS
INCERTIDUMBRE
DISTRIBUCIÓN GAUSSIANA

Laboratorio 1 – 2do. Cuatrimestre de 2020

Lucía Famá - Joaquín Sacanell
Mauro Silberberg - Pedro Schmied

Departamento de Física
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

Repaso de la clase pasada

RESULTADO

Intervalo de Confianza

$$\bar{x} - \Delta x \leq x \leq \bar{x} + \Delta x$$

$$[\bar{x} - \Delta x , \bar{x} + \Delta x]\ Unidad$$

Expresión del Resultado

$$\boxed{x = (\bar{x} \pm \Delta x)Unidad}$$

$\bar{x}$ → Valor más representativo

Δx → Incerteza Absoluta
Error Absoluto

Error ABSOLUTO (Δx)

$$\Delta x = \sqrt{\sigma_N^2 + \sigma_e^2}$$

¿σ_e?

Error NOMINAL (σ_N)

$$\sigma_N^2 = \sigma_{ap}^2 + \sigma_{ex}^2 + \sigma_{int}^2 + \sigma_{def}^2$$

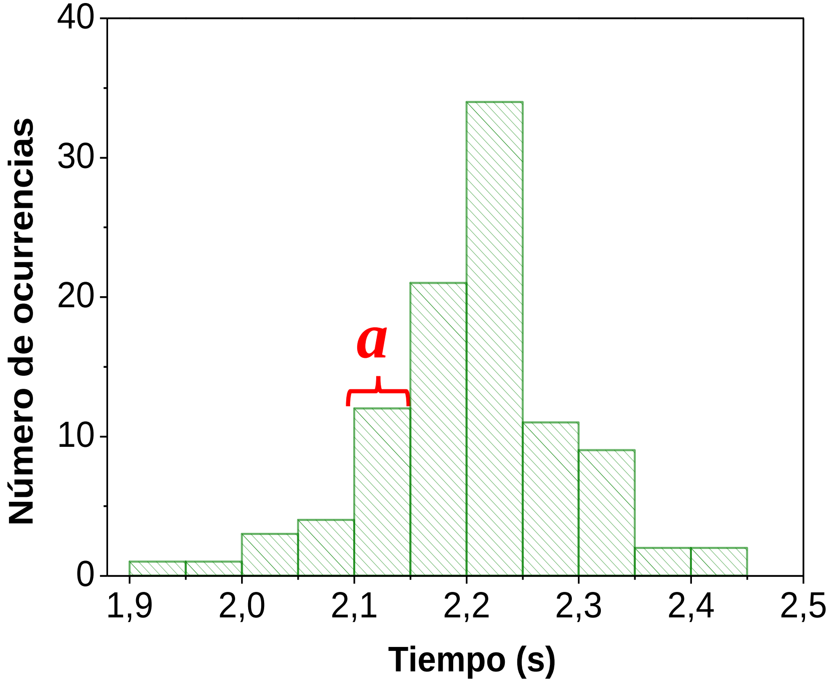
Distribución estadística
Histogramas

Supongamos que tomamos
***N* mediciones de MF**

→ Tenemos $\{x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_N\}$

¿Cómo se distribuyen los datos?

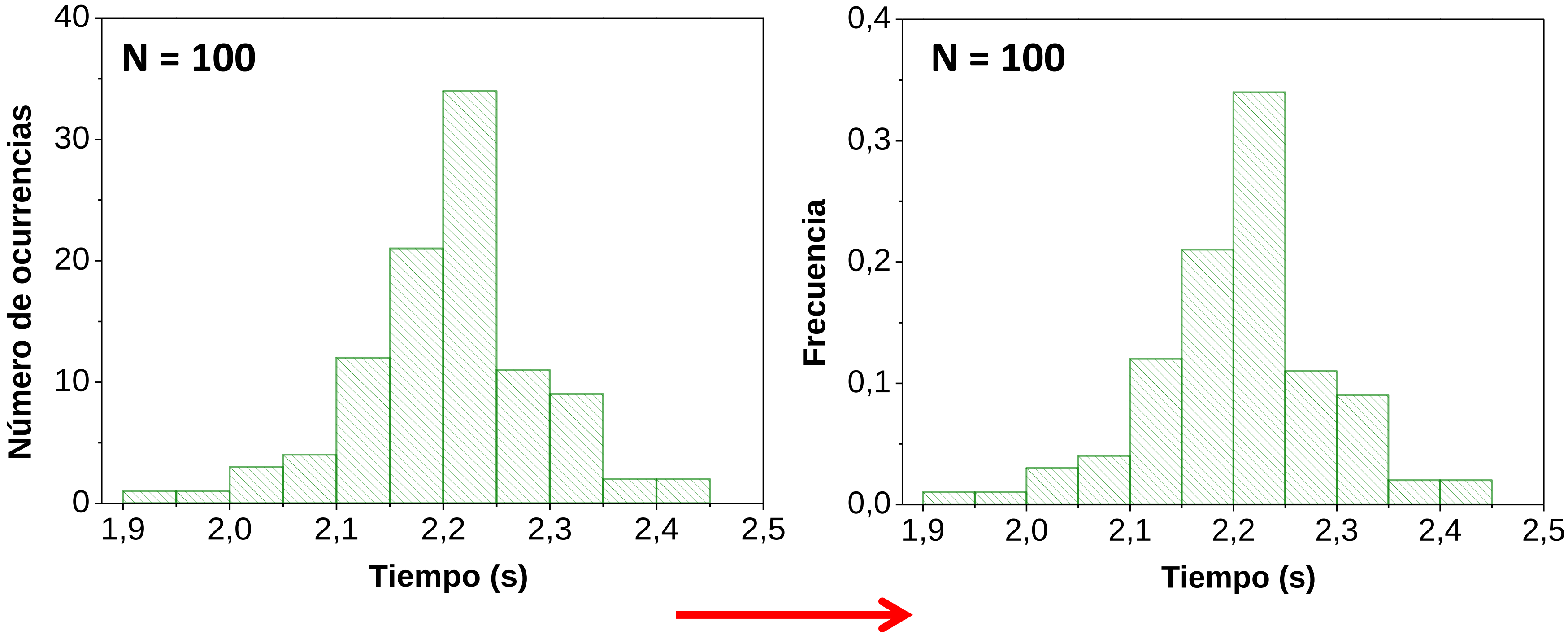
Histograma



- Número total de datos: ***N***
- Rango: $[x_{min}, x_{max}]$
- Intervalo de clase (bin size): ***a***
- Cantidad de intervalos de clases: ***C***

$$a = \frac{x_{max} - x_{min}}{C}$$

Cómo comparo histogramas

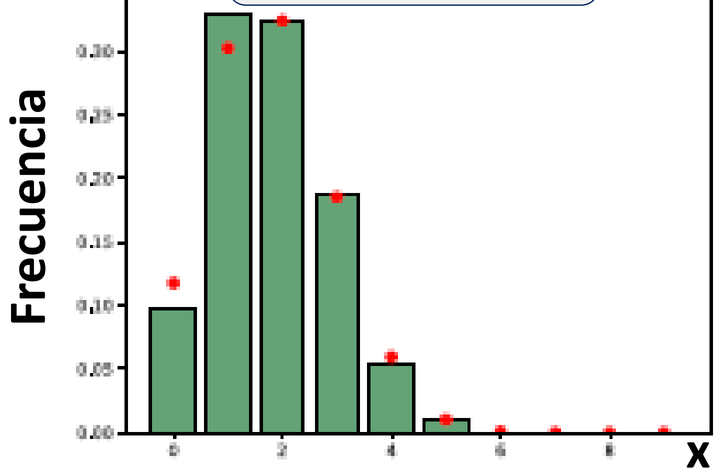


$$\frac{Número\ de\ Ocurrencias}{N} = Frecuencia$$

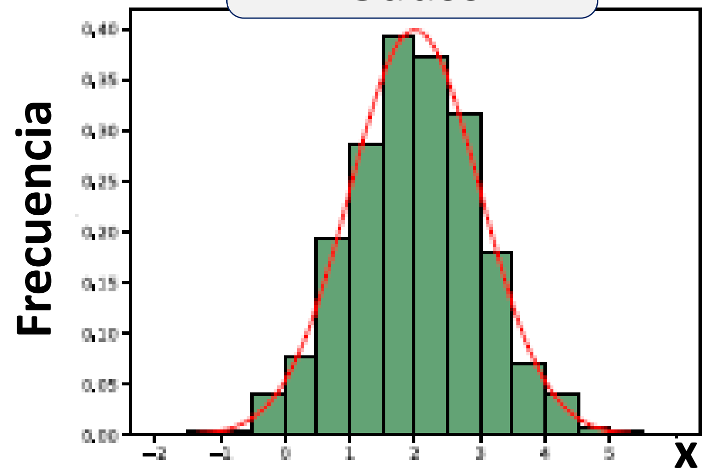
Condición de Normalización $\rightarrow \sum_i F_i = 1$

Ejemplos de distribuciones

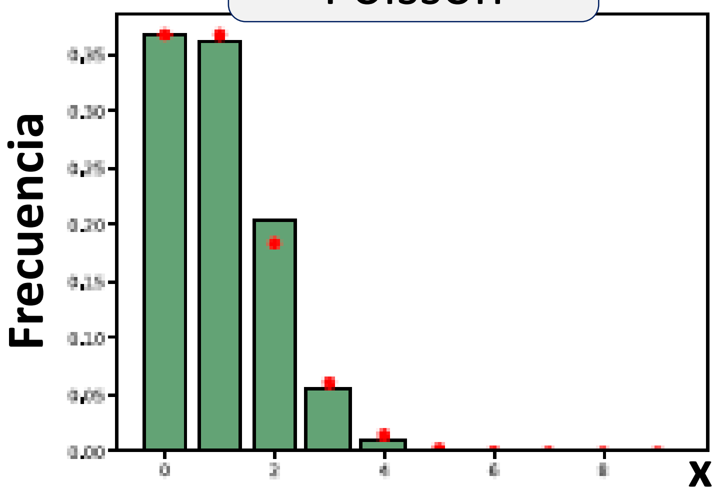
Binomial



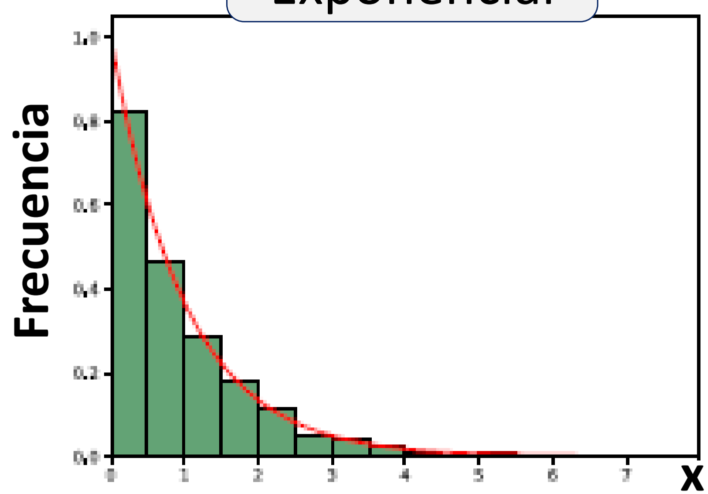
Gauss



Poisson

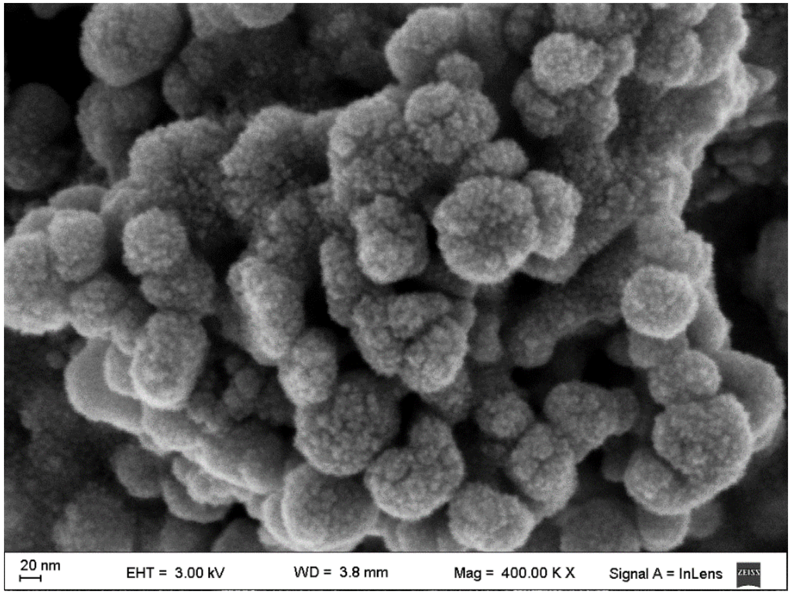


Exponencial

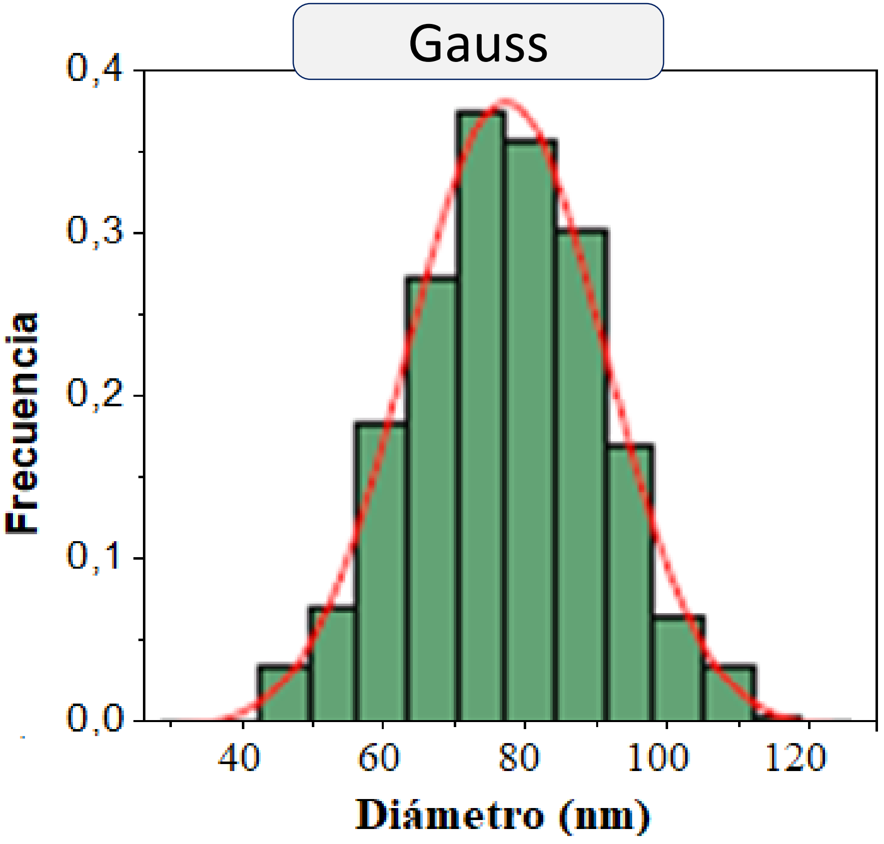


Distribución Gaussiana

Microscopía electrónica de barrido **(SEM)**



Nanopartículas de Plata sintetizadas con almidón (AgNP). *Trabajo del LP&MC*



Valores característicos

MODA

Mo: Valor de x que corresponde al máximo de frecuencia *(valor que más veces se repite)*

MEDIANA

Me: Valor de x que divide el 50% de los datos

N Impar

$$x_{Me} = x_{\frac{N+1}{2}}$$

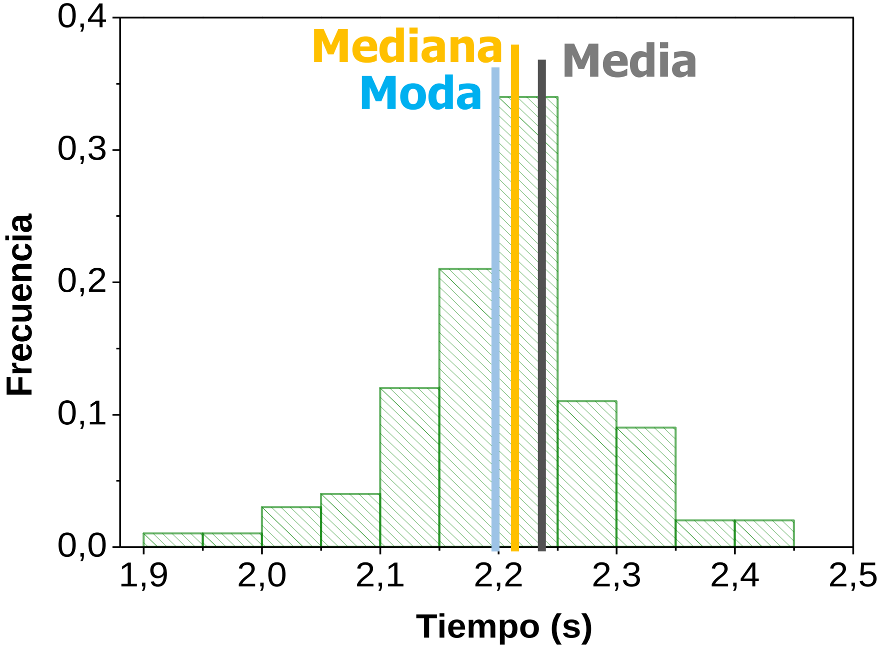
N Par

$$x_{Me} = \frac{x_{\frac{N}{2}} + x_{\frac{N}{2}+1}}{2}$$

MEDIA ($\overline{x}$)

$\bar{x}$: Promedio o media aritmética

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$



universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

Valores característicos

MODA

Mo: Valor de x que corresponde al máximo de frecuencia *(valor que más veces se repite)*

MEDIANA

Me: Valor de x que divide el 50% de los datos

N Impar

$$x_{Me} = x_{\frac{N+1}{2}}$$

N Par

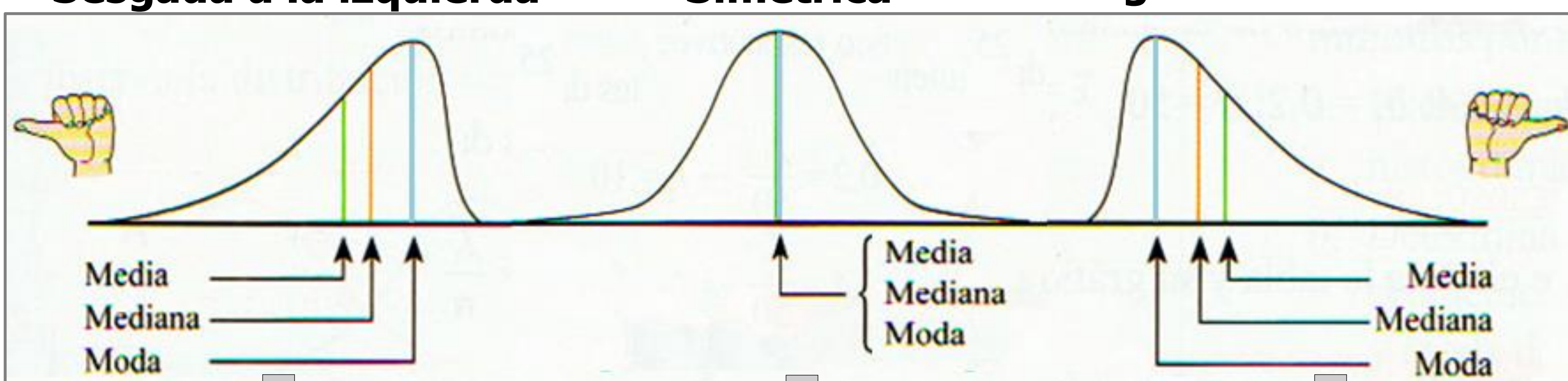
$$x_{Me} = \frac{x_{\frac{N}{2}} + x_{\frac{N}{2}+1}}{2}$$

MEDIA ($\bar{x}$)

$\bar{x}$: Promedio o media aritmética

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Sesgada a la izquierda **Simétrica** **Sesgada a la derecha**



Media < Mediana < Moda

Moda = Mediana = Media

Moda > Mediana > Media

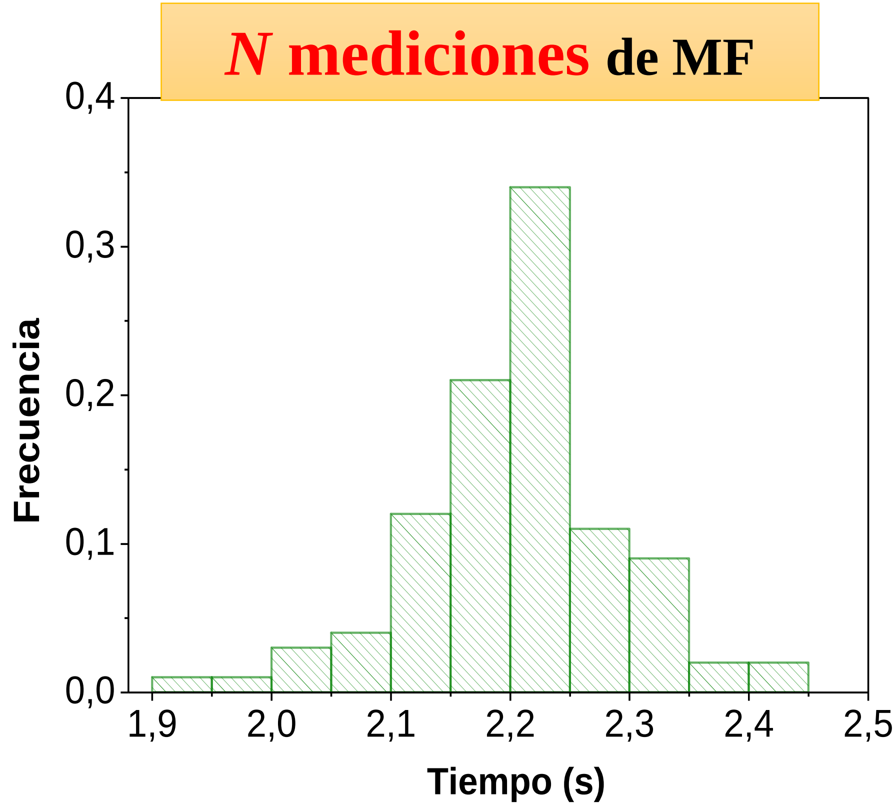
universidad de buenos aires - exactas
departamento de Física

Valores característicos

MEDIA ($\bar{x}$)

$\bar{x}$: Promedio o media aritmética

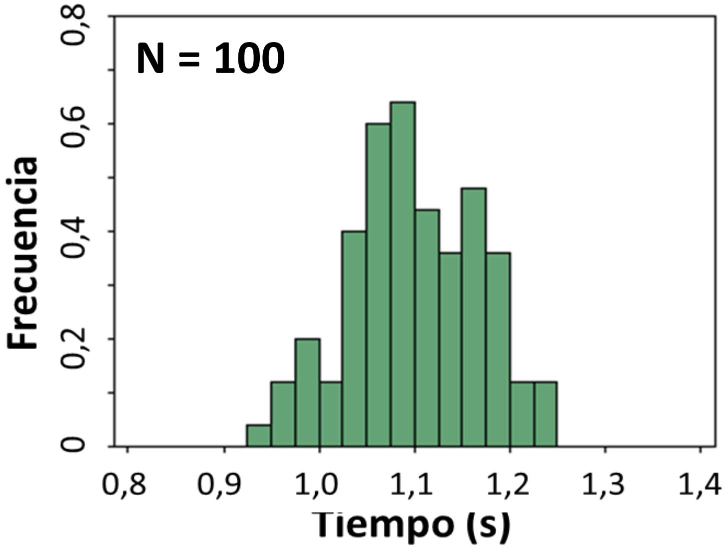
$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$



DESVIACIÓN ESTÁNDAR (S)

Dispersión de los datos x_i respecto de la media ← $S = \sqrt{Var\,(x)}$ → **VARIANZA**

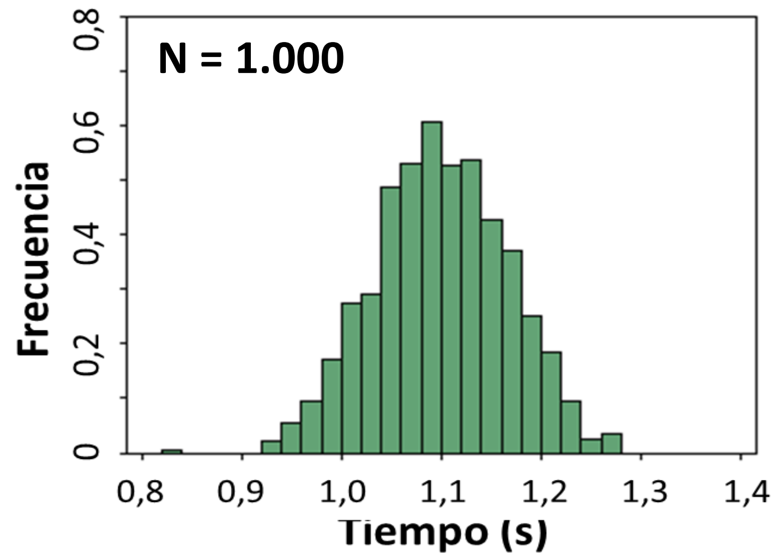
¿Si aumenta N?

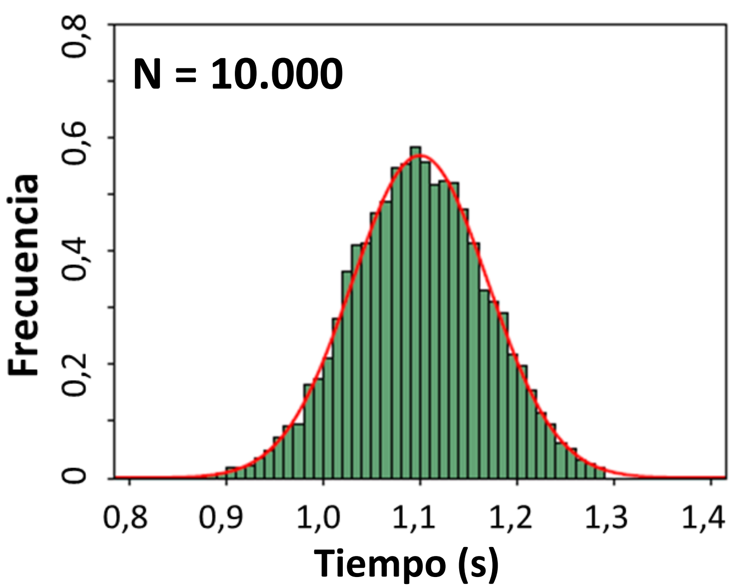


↑ **N**

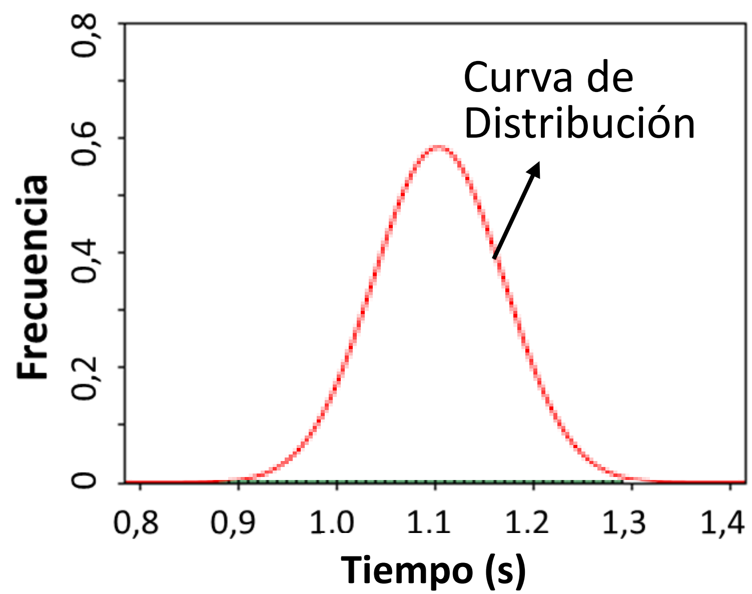
↑ **C**

↓ ***a***





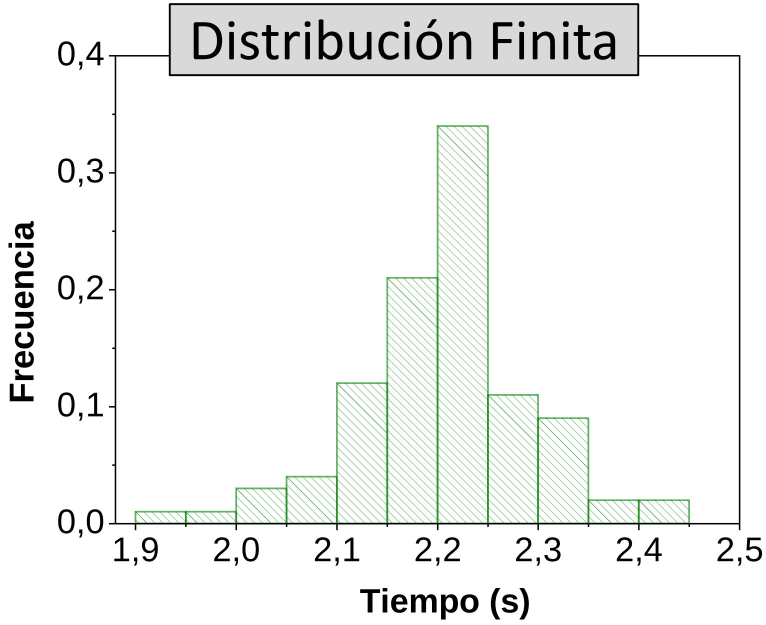
$$N \to \infty$$
$$a \to dx$$



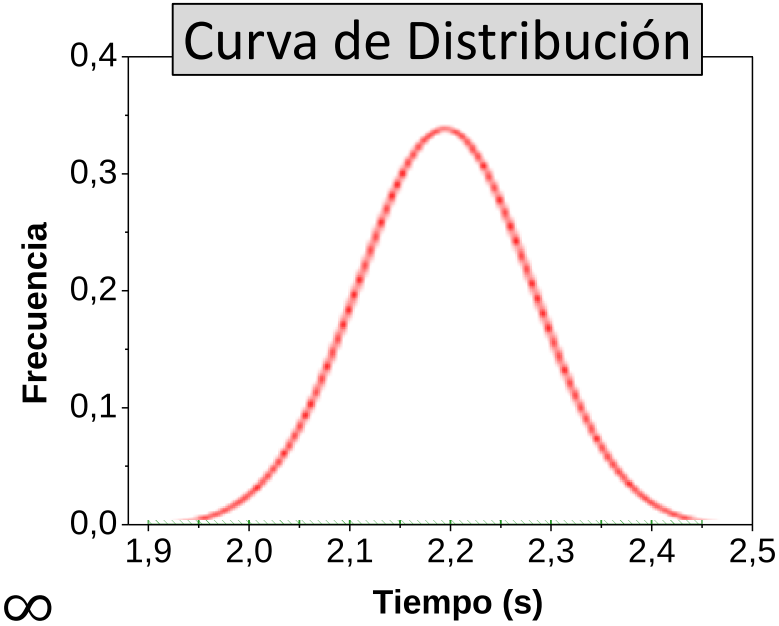
Objetivo

Estimar los parámetros de la distribución a partir de los datos medidos

Tenemos una muestra finita de datos ⇒ Queremos estimamos los parámetros de la distribución



$N \to \infty$

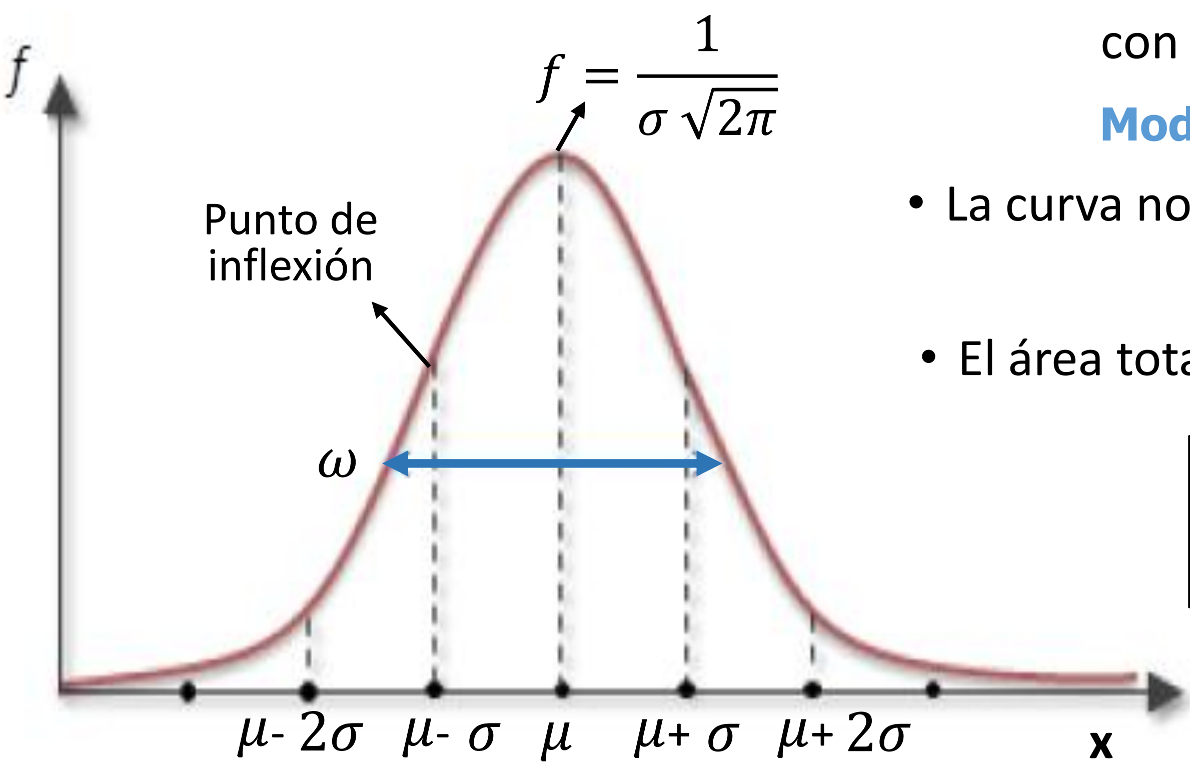


$\bar{x} \longrightarrow ?$

$S \longrightarrow ?$

Función de distribución: Gauss

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$$



Algunas propiedades relevantes

Por ahora

- Es simétrica con respecto a su media
- Tiene una única moda, que coincide con la media y mediana

Moda=Mediana=Media

- La curva normal es asintótica al eje de abscisas
- El área total bajo la curva es igual a 1

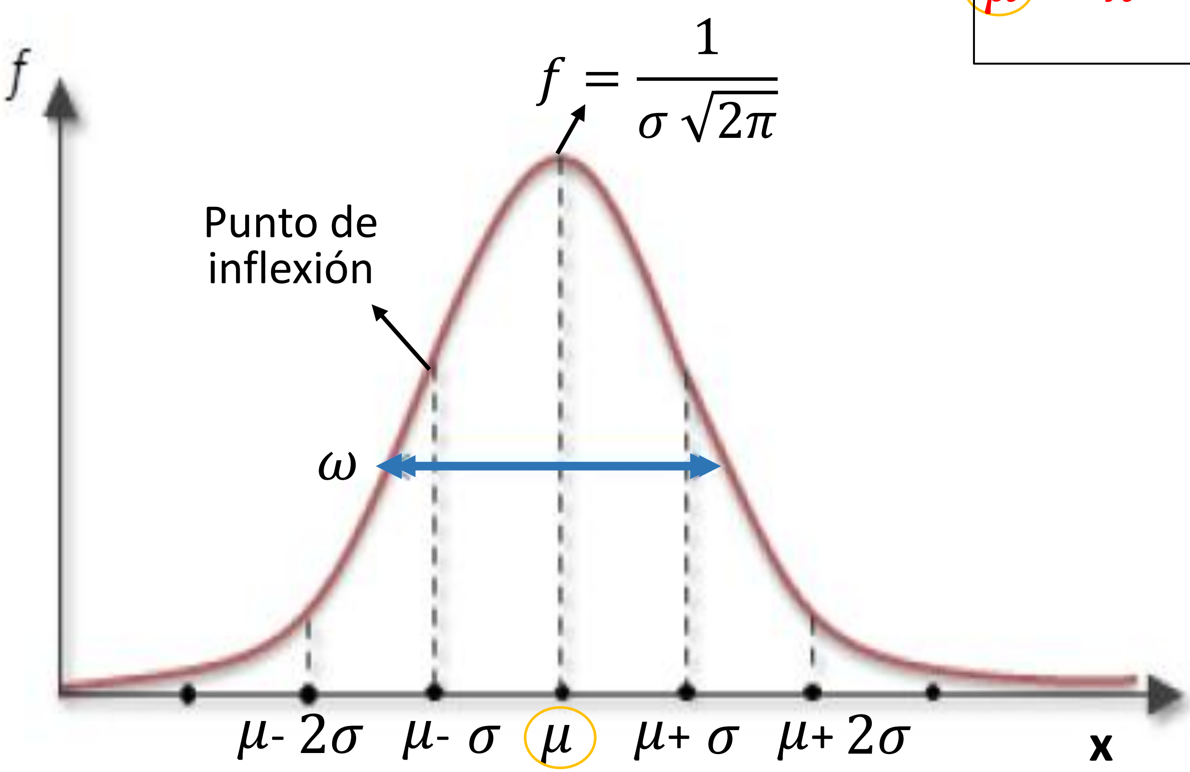
$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1}$$

$$\boxed{f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}}$$

Función de distribución: Gauss

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\mu = \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$



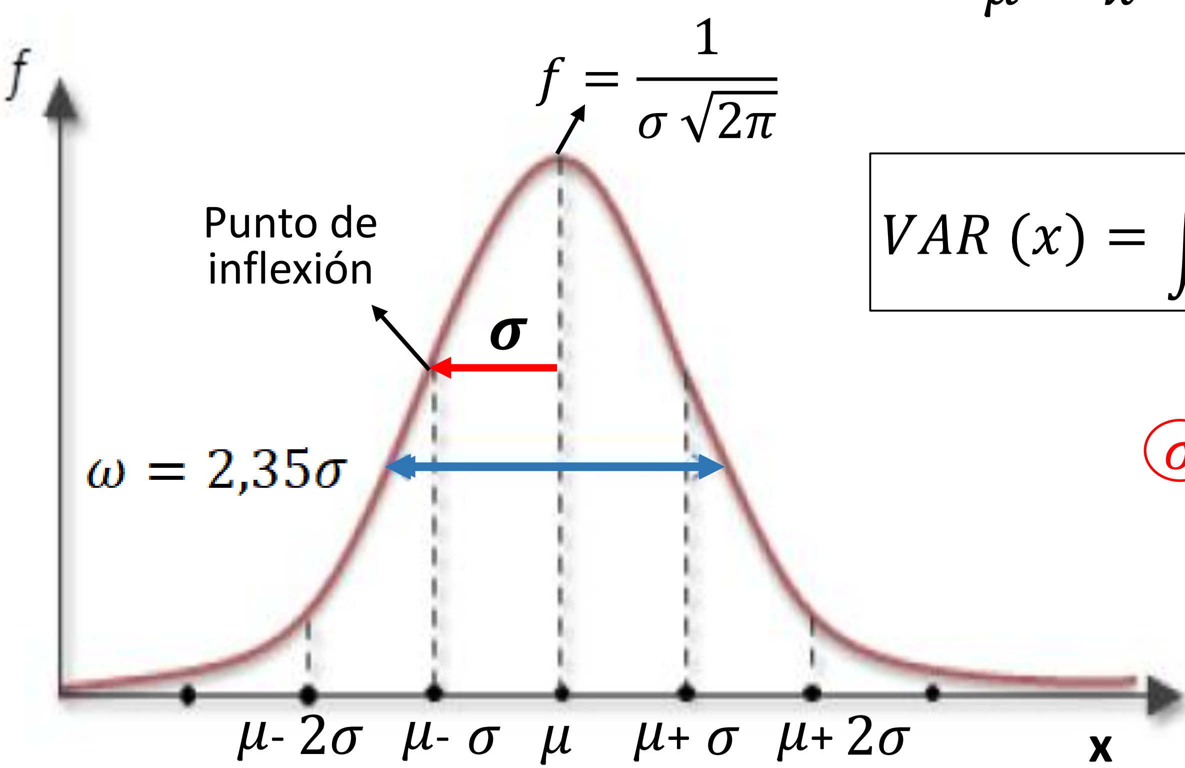
Función de distribución: Gauss

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

$$\mu = \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$$

$$\boxed{VAR\,(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{x})^2 f(x)\,dx}$$

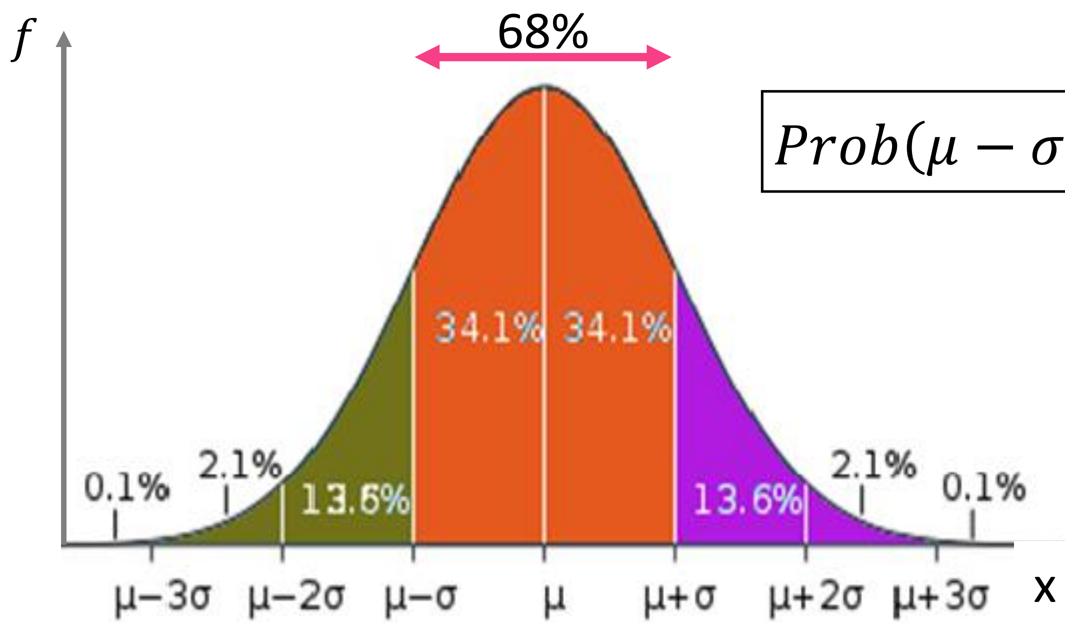
$$\sigma = S = \sqrt{VAR\,(x)}$$



Si realizamos una nueva medición x, ¿Cual será la probabilidad de encontrarla en el intervalo ($\boldsymbol{\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma}$)?

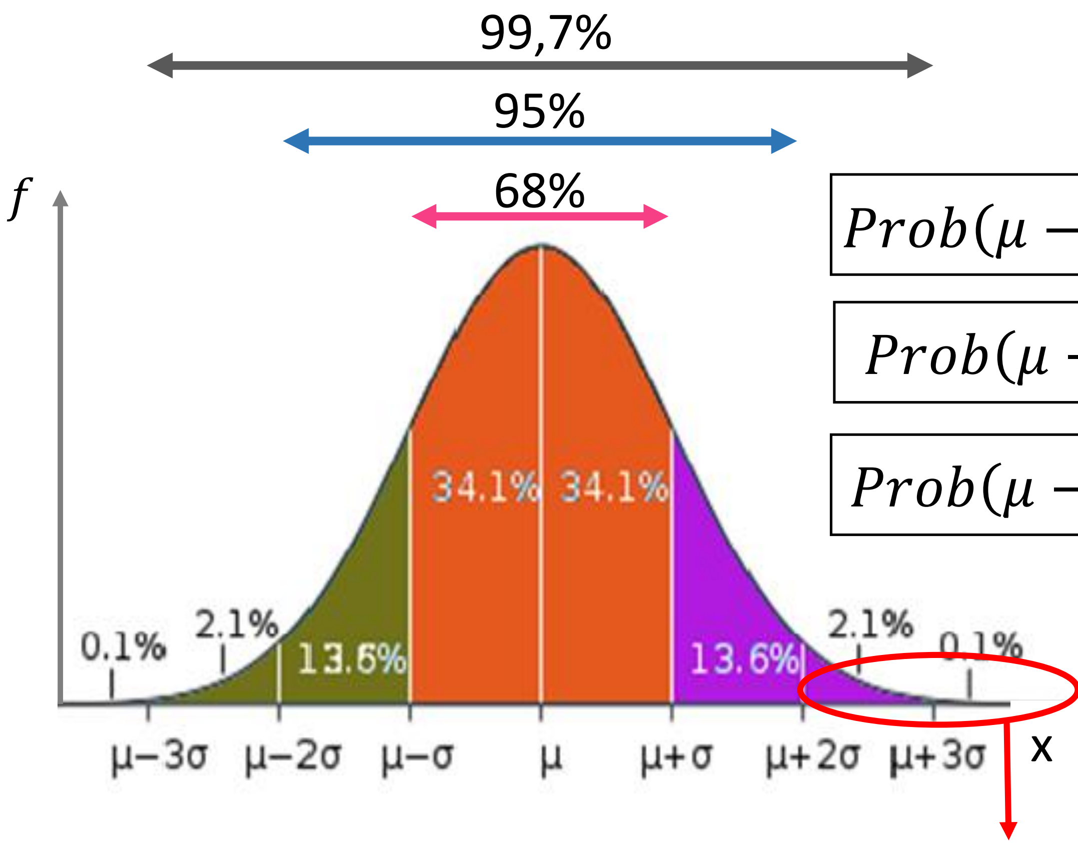
$$Prob(a \leq x \leq b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} dx$$

$$Prob(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} dx$$



$$Prob(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) \cong \mathbf{0,6827}$$

Si realizamos una nueva medición x, ¿Cual será la probabilidad de encontrarla en el intervalo $(\boldsymbol{\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma})$ o $(\boldsymbol{\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma})$?



$$\boxed{Prob(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) \cong \mathbf{0,6827}}$$

$$\boxed{Prob(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) \cong 0{,}95}$$

$$\boxed{Prob(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) \cong 0{,}997}$$

Los punto que se encuentran fuera del intervalo $(\boldsymbol{\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma})$ deberían ser medidos nuevamente

Función de distribución: Gauss

Características de la función

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

→ Está centrada en $x = \mu$

→ Es simétrica alrededor de $x = \mu$

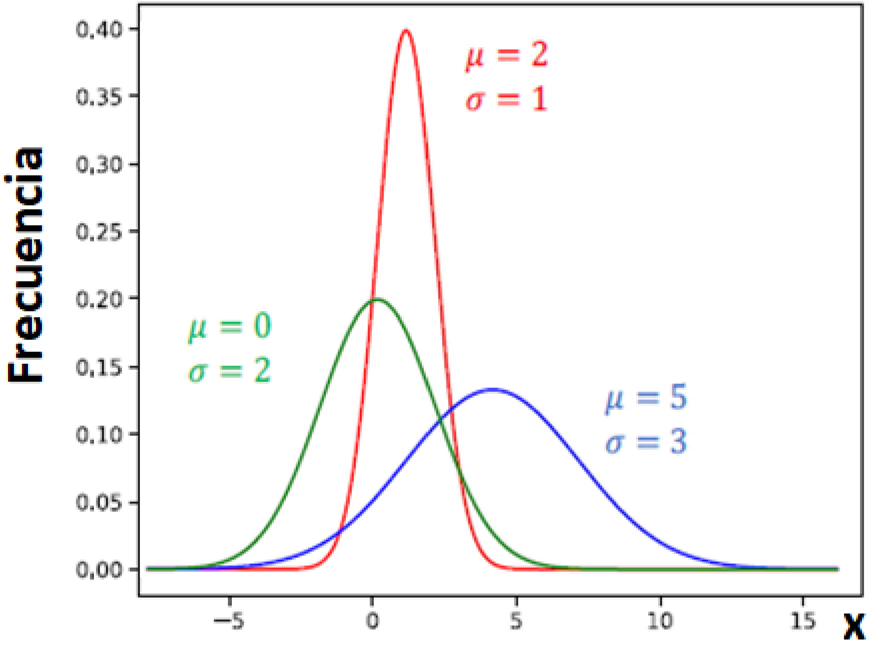
→ Tiende exponencialmente a 0 para $|x - \mu| \gg \sigma$

→ El parámetro σ da una idea del ancho de la curva

Función de distribución de 3 Muestras

μ Corrimiento en x hacia la derecha

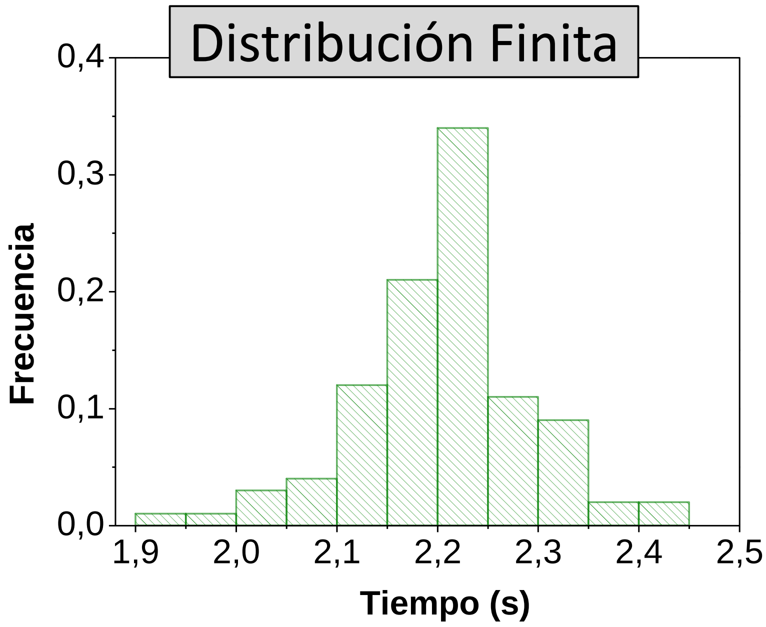
σ Aumento del ancho de la distribución

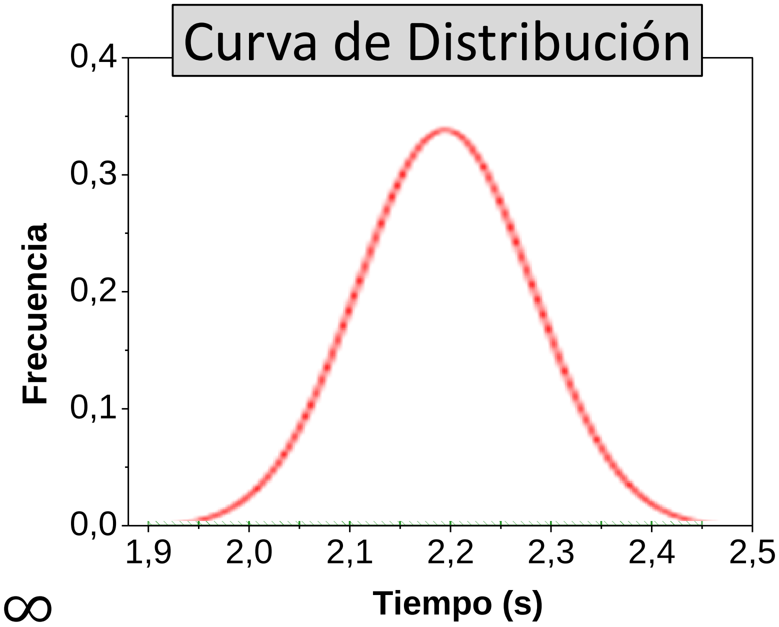


Objetivo

Estimar los parámetros de la distribución a partir de los datos medidos

Tenemos una muestra finita de datos → Queremos estimamos los parámetros de la distribución





$N \rightarrow \infty$

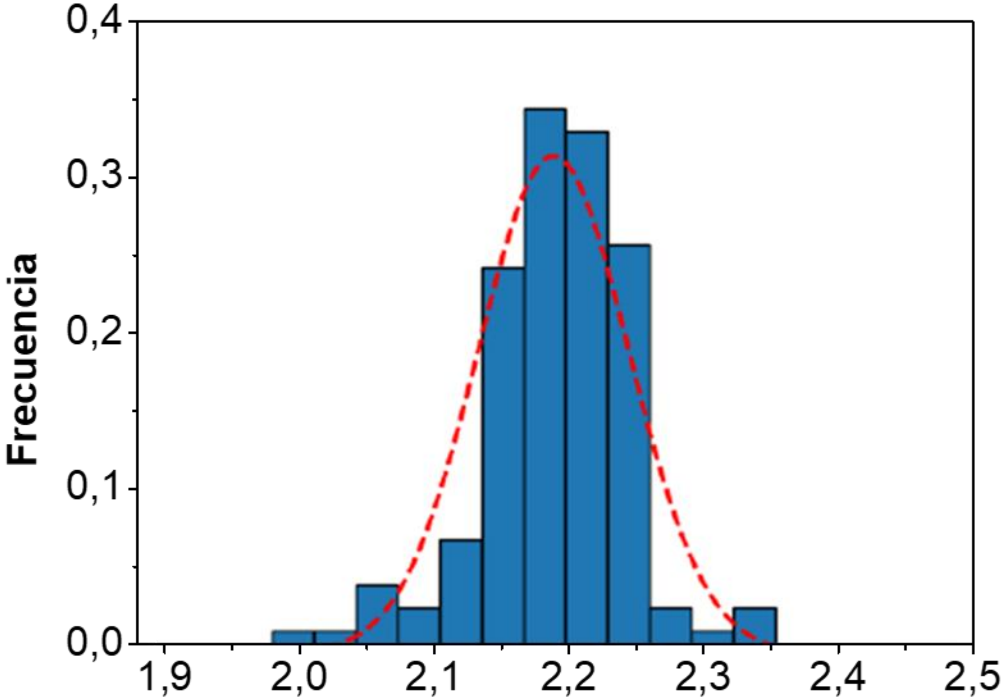
$$\bar{x} \longrightarrow \mu$$

$$S \longrightarrow \sigma$$

1º CASO a evaluar:
1 Muestra con N medidas

Tenemos una muestra finita con n datos → Estimamos los parámetros de la distribución ($n \to \infty$)

Distribución Finita $\quad N \to \infty \quad$ Curva de Distribución



universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

1º CASO a evaluar:
1 Muestra con N medidas

Parámetros de la distribución

Distribución Finita $\quad N \to \infty \quad$ Curva de Distribución

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad \longrightarrow \quad \mu = \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

$$\text{VAR (x)} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N} \quad \longrightarrow \quad \text{VAR (x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx$$

$$S = \sqrt{VAR\ (x)} \quad \longrightarrow \quad \sigma = \sqrt{VAR\ (x)}$$

Si realizamos una nueva medición x, ésta tendrá una probabilidad de ~ 68% de encontrarse en el intervalo:

$$(\bar{x} - S, \bar{x} + S) \quad \longrightarrow \quad (\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$$

2º CASO a evaluar:
1 Muestra Poblacional

Repetimos n veces el experimento…

Exp. 1 → N mediciones de x → $\bar{x}_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad S_{x1} = \sigma_{x1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}_1 - x_i)^2}{N}}$

Exp. 2 → N mediciones de x → $\bar{x}_2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad S_{x2} = \sigma_{x2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}_2 - x_i)^2}{N}}$

⋮

Exp. n → N mediciones de x → $\bar{x}_n = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad S_{xN} = \sigma_{xN} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}_N - x_i)^2}{N}}$

Si repetimos el experimento n veces,

Los valores de x_i del caso Poblacional serán $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$

2º CASO a evaluar:
1 Muestra Poblacional

Teorema Central del Límite (TCL)

- ✓ Si el numero de datos es suficientemente grande, como para tener definido el proceso estadístico, entonces

$$S_{x1} \cong S_{x2} \cong S_{xN} = S$$

- ✓ **Los valores promedios $\bar{x}_i$ de las diferentes muestras de N datos** cada una, **van a seguir una distribución gaussiana,** centrada en: $< \bar{x} >$

$$\boxed{< \bar{x} > = \frac{1}{n} \sum_{i}^{n} x_i}$$

El Desvío Estándar de las medias →

$$\boxed{S_{<\bar{x}>} = \sigma_e = \frac{S}{\sqrt{N}}}$$

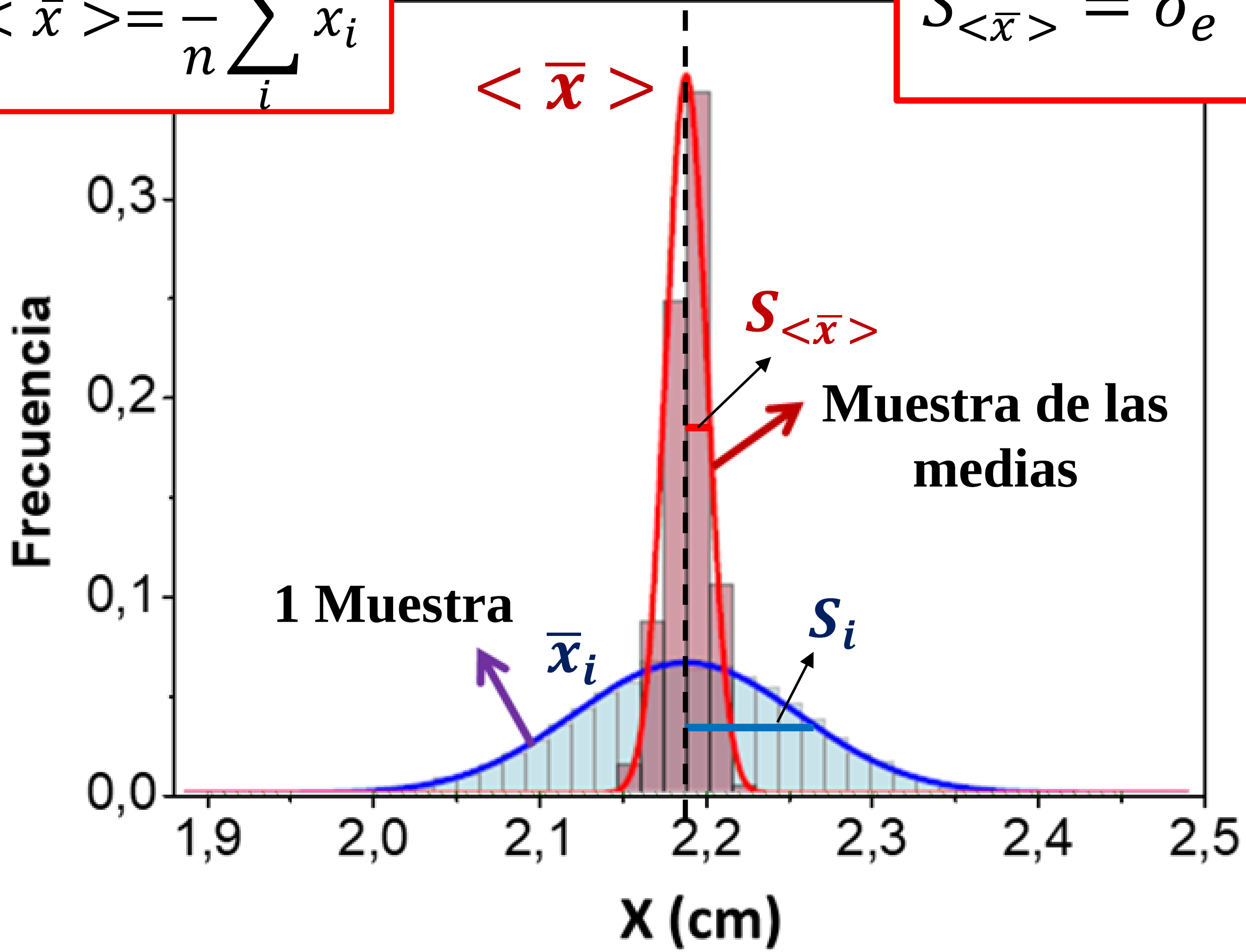
INCERTEZA ESTADÍSTICA (σ_e)

universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

ERROR ESTADÍSTICO (σ_e)

$$< \bar{x} >= \frac{1}{n}\sum_{i}^{n} x_i$$

$$S_{<\bar{x}>} = \sigma_e = \frac{S}{\sqrt{N}}$$



¿Que suele pasar?

En general se toma una única muestra de N medidas

Si se toma como hipótesis que nuestra serie que comportará como otra medida de la misma MF bajo la misma metodología y número de datos:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i}$$

$$\boxed{\Delta x = \sqrt{\sigma_N^2 + \sigma_e^2}}$$

Incerteza Nominal cuadrática

$$\sigma_N^2 = \sigma_{Ap}^2 + \sigma_{ex}^2 + \sigma_{int}^2 + \sigma_{def}^2$$

Incerteza Estadística

$$\sigma_e = \frac{S}{\sqrt{N}}$$

¿Que suele pasar?

Distribución Finita $\quad N \to \infty \quad$ Curva de Distribución

$$< \bar{x} >= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad \rightarrow \quad \mu =< \bar{x} >= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

$$VAR\ (x) = \frac{\sum_{i=1}^{N}(< \bar{x} > - x_i)^2}{N} \quad \rightarrow \quad VAR\ (x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x -< \bar{x} >)^2 f(x) dx$$

$$S_{<\bar{x}>} = \sqrt{VAR\ (x)} \qquad S_{<\bar{x}>} = \frac{S}{\sqrt{N}} \quad \rightarrow \quad S_{<\bar{x}>} = \sigma_e \qquad \sigma = \sqrt{VAR\ (x)}$$

Si realizamos una nueva medición x, ésta tendrá una probabilidad **de ~ 68%** de encontrarse en el intervalo:

$$(< \bar{x} > - S_{<\bar{x}>} , < \bar{x} > + S_{<\bar{x}>}) \quad \rightarrow \quad (< \bar{x} > - \sigma_e , < \bar{x} > + \sigma_e)$$

$$(< \bar{x} > - \Delta x, < \bar{x} > + \Delta x) \quad \rightarrow \quad (< \bar{x} > - \Delta x, < \bar{x} > + \Delta x)$$

universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

RESULTADO de una MF con incerteza estadística

RESULTADO

Intervalo de Confianza

$$\bar{x} - \Delta x \leq x \leq \bar{x} + \Delta x$$

$$[\bar{x} - \Delta x\, , \bar{x} + \Delta x]\ Unidad$$

Expresión del Resultado

$$\boxed{x = (\bar{x} \pm \Delta x)\, Unidad}$$

$\bar{x} \rightarrow$ Valor más representativo

$\Delta x \rightarrow$ Incerteza Absoluta

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i}$$

$$\boxed{\Delta x = \sqrt{\sigma_N^2 + \sigma_e^2}}$$

Incerteza Estadística

$$\sigma_e = \frac{S}{\sqrt{N}}$$

Error Relativo

$$\boxed{\varepsilon_r = \left|\frac{\Delta x}{\bar{x}}\right|}$$

Incerteza Nominal cuadrática

$$\sigma_N^2 = \sigma_{Ap}^2 + \sigma_{ex}^2 + \sigma_{int}^2 + \sigma_{def}^2$$

Preguntas frecuentes

¿Cuántas veces debo medir para que el error estadístico sea despreciable frente al error nominal?

$$\Delta x = \sqrt{\sigma_N^2 + \sigma_e^2} \qquad \sigma_e \sim \sigma_N$$

$$\sigma_e = \frac{S}{\sqrt{N}}$$

A medida que N AUMENTA, σ_e DISMINUYE y σ_N queda fijo!

Número Óptimo de mediciones:

$$\boxed{N_{op} = \left(\frac{S}{\sigma_N}\right)^2}$$

¿Cómo comparo dos resultados?

PRECISIÓN, EXACTITUD y DIFERENCIAS SIGNIFICATIVAS

- **Precisión:** Comparando los Errores Relativos (ε_r): $\Downarrow \varepsilon_r \Uparrow$ **PRECISIÓN**
- **Exactitud:** Comparando la media con el valor tabulado o valor “real”: El $\bar{x}$ más cercano a dicho valor, será el más exacto.
- **Diferencias Significativas:** Comparando los intervalos de confianza

Preguntas frecuentes

¿Cómo sabemos si una medición es confiable?

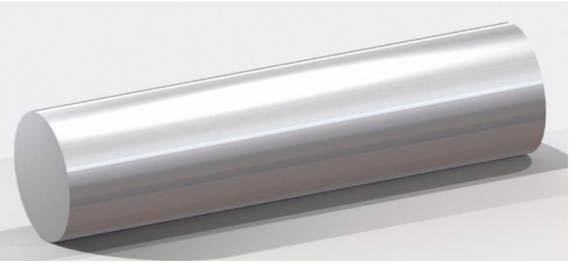
Cuestionarse sobre: el método, el instrumento, el objeto, el observador ……

HIPÓTESIS EMPLEADAS!!

Determinar el peso de nanopartículas

Balanza de precisión

Determinar el volumen de un cuerpo a partir de su densidad



Barra de aluminio

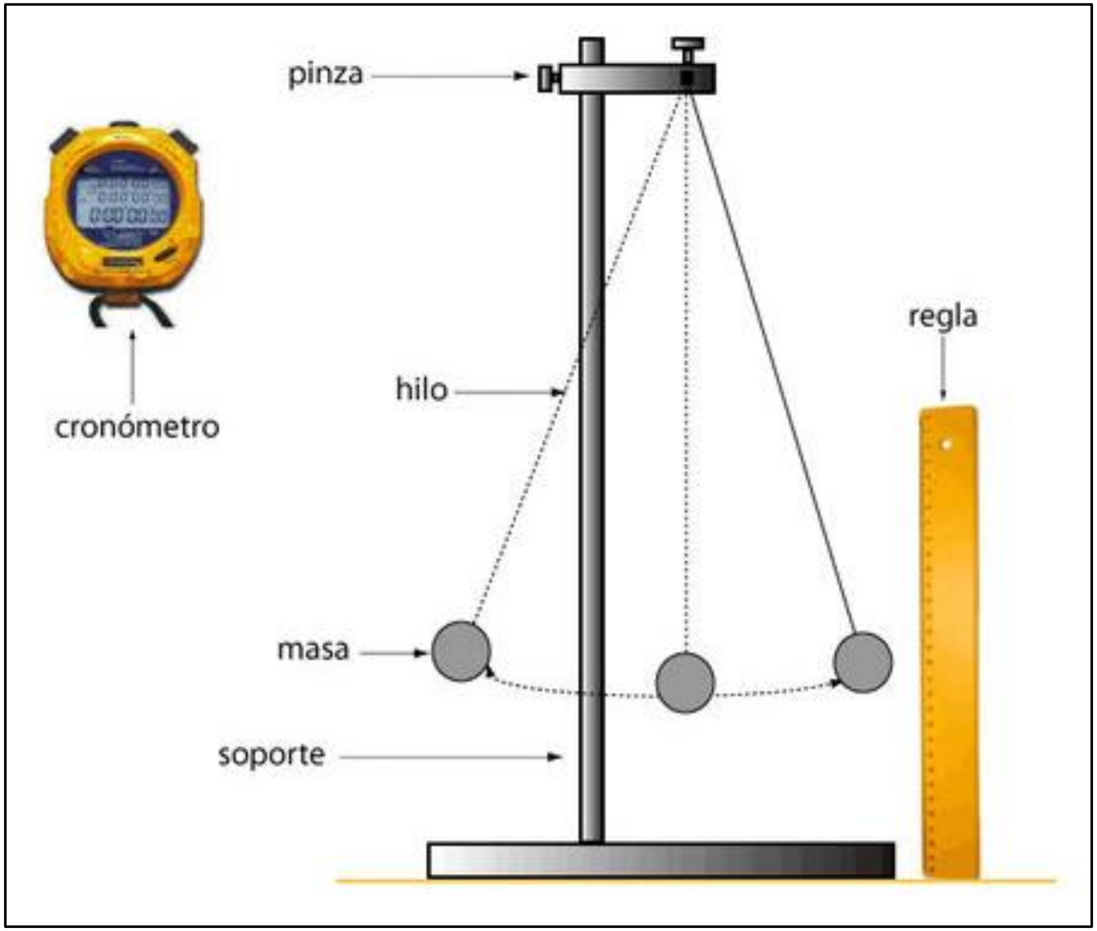
Esto lo veremos más adelante ….

universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

EXPERIMENTO

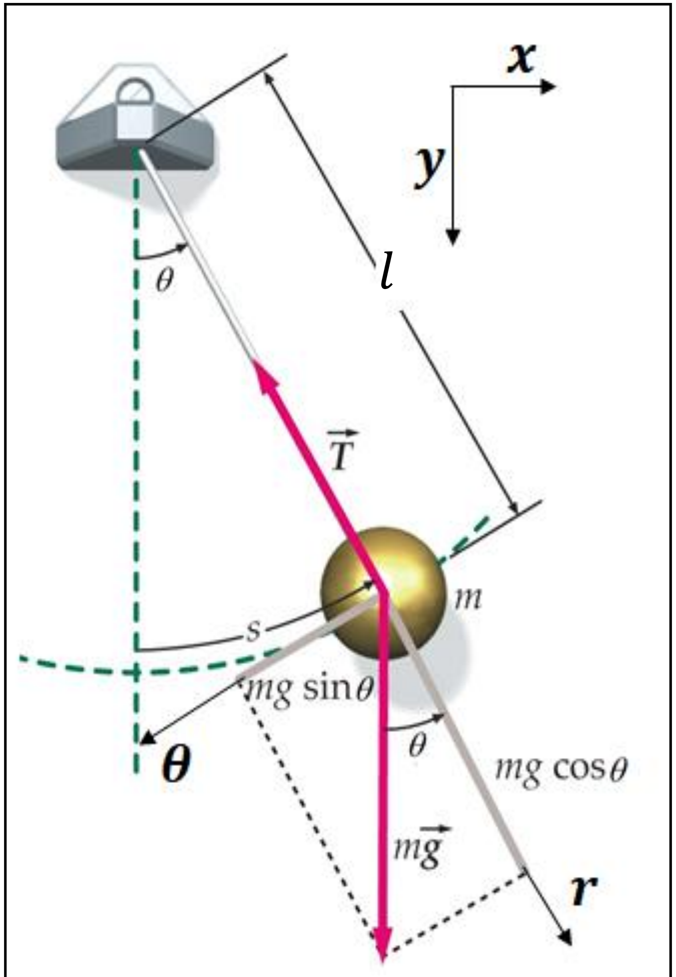
Exp. 2

DETERMINAR EL PERÍODO DE UN PÉNDULO



Período de un Péndulo Simple

Diagrama de cuerpo libre



2da Ley de Newton: $\sum F_{ext} = ma$

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{r}}: mgcos\theta - T = ma_r \rightarrow a_r = 0 \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}: -\cancel{m}gsen\theta = \cancel{m}a_\theta \rightarrow a_\theta = -gsen\theta \end{cases}$$

$$s = l\theta$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$a_\theta = \frac{d^2s}{dt^2} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -gsen\theta$$

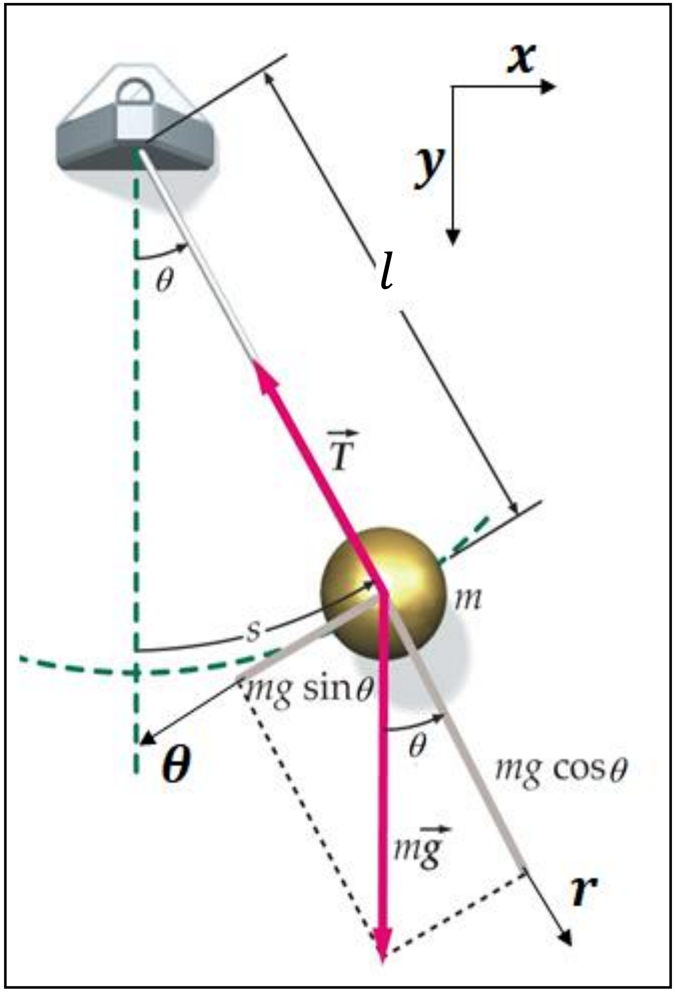
$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} + gsen\theta = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}sen\theta = 0}$$

Ecuación diferencias de 2do orden

Período de un Péndulo Simple

Diagrama de cuerpo libre



Resolviendo la Ecuación de 2do orden

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} sen\theta = 0}$$

$\theta \ll 1 \Rightarrow sen\theta \approx \theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Solución: $\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos(wt + \varphi)}$ $\quad \theta_0 \ll 1$

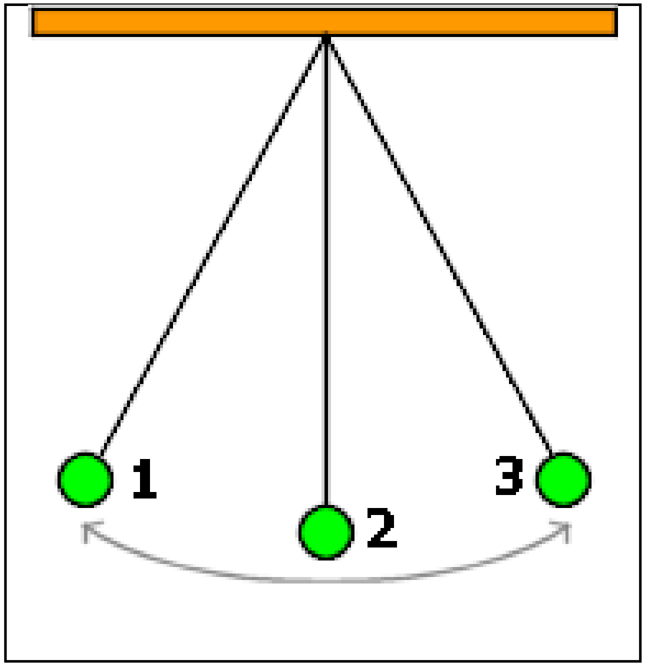
donde $w = \sqrt{\frac{g}{l}}$ $\quad \mathrm{f} = \frac{w}{2\pi}$ $\quad \mathrm{T} = \frac{2\pi}{w}$

Período de un péndulo de longitud *l*

$$\boxed{\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}}$$

Período de un Péndulo Simple

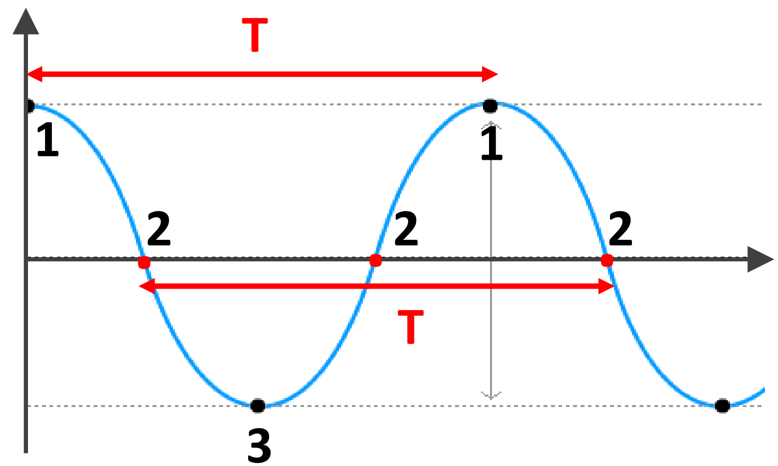
Período del péndulo



¿Y si comienzo a medir cuando pasa por el punto de equilibrio (2)?

Tiempo de una oscilación completa

Tiempo que tarda el péndulo en partir desde uno de sus extremos de amplitud (1), pasar por el punto de equilibrio (2), llegar al otro extremo de amplitud (3) y regresar nuevamente al primer punto (1)



EXPERIMENTO

Exp. 2

EXPERIMENTO (*VER GUÍA 2*)

- Péndulo de alrededor de **80 cm**
- Pesar la **masa**
- Realizar **20 mediciones** del período del péndulo ($\theta < 10°$) (**n = 20**)
- Realizar **60 mediciones más** del período del péndulo (**n = 60**)
- Realizar **80 mediciones más** y sumarle las anteriores (**n = 160**)

*Trabajamos con **n = 20 y n = 160***

- Ajustar mediante la **función de Gauss** cada distribución
- Determinar $\boldsymbol{\mu}$ **y** $\boldsymbol{\sigma}$
- Calcular $\boldsymbol{\overline{T}}$ y $\boldsymbol{S}$ y reporte el valor de *T* como $\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{\overline{T}} \pm \boldsymbol{S})\ \boldsymbol{Ud}$.

*Armar **8 grupos de 20 mediciones** cada uno*

- Calcule $\boldsymbol{\overline{T}}$ **de cada grupo** y realice un histograma con dichos valores (**N = 8**).
- Calcule $\boldsymbol{\overline{T}}$**,** $\boldsymbol{S}$ **y** $\boldsymbol{\sigma_e}$ del grupo de **N = 8**.
- Reporte el valor del período del péndulo como $\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{\overline{T}} \pm \Delta\boldsymbol{T})\ \boldsymbol{Ud}$.

EXPERIMENTO

Exp. 2

DETERMINAR EL PERÍODO DE UN PÉNDULO

¿Qué debemos tener en cuenta?

- Las hipótesis del experimento: Péndulo ideal? Hilo inelástico? Masa despreciable? Recorrido en un plano? Sistema sin rozamiento? Etc., etc… Ángulos pequeños
- Más! Conocer cuál es el recorrido de 1 período antes de medir
- *Comentario:* No deje de medir el largo del hilo, le puede servir

A MEDIR!