Laboratorio 1
Turno C

Clase 3
Mediciones directas (recapitulación)
Mediciones indirectas I
(17/04/2021)

- ✓ Mediciones directas
  - ✓ Incertidumbre en las mediciones
    - ✓ Error nominal
    - ✓ Error estadístico
      - ✓ Estadística de una muestra de N mediciones
      - ✓ Estadística de n muestras de N mediciones
  - ✓ Instrumentos de medición de dimensiones
    - ✓ Calibre
    - ✓ Micrómetro
- ✓ Mediciones indirectas
  - ✓ Incertidumbre, propagación de errores
  - ✓ Experiencias

Recordando de la clase pasada :

Tipo generales de mediciones

Directas → El valor de la MF deseada se obtiene a partir de la lectura en un instrumento

Experiencia en clase anterior

- Tiempo (cronómetro)
- Longitud (regla)

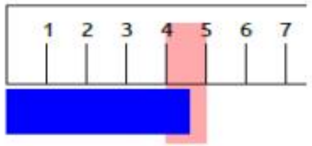
Indirectas → El valor de la MF deseada se obtiene mediante un proceso matemático con otras magnitudes obtenidas por un instrumento

- Volumen
- Superficie
- Potencia eléctrica
- Aceleración
- etc

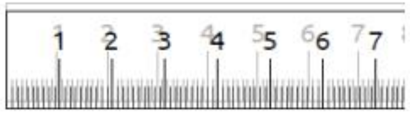
Existen algunos instrumentos con los cuales se pueden medir en forma directa también

I. Errores introducidos por el INSTRUMENTO

→ **Error de Apreciación (σ_{ap}):** mínima división que puede resolver el observador



→ **Error de Exactitud (σ_{ex}):** asociado con el error de calibración del instrumento

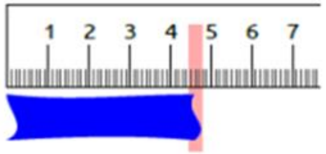


II. Error de interacción (σ_{int})

Proviene de la interacción del método con el objeto a medir

III. Error por definición (σ_{def})

Asociado con la falta de definición del objeto



Error nominal σ_N $\qquad \sigma_N^2 = \sigma_{Ap}^2 + \sigma_{ex}^2 + \sigma_{int}^2 + \sigma_{def}^2$

Errores estadísticos σ_e errores aleatorios, producidos al azar.

Incerteza absoluta

$$\Delta x = \sqrt{\sigma_N^2 + \sigma_e^2}$$

Si solo mido 1 vez solo tengo el error nominal $\Rightarrow$ $\Delta x = \sigma_N$

Si la medición de la magnitud física se realiza fuera del error del instrumento $\Rightarrow$ Error Estadístico $\Rightarrow$ σ_e

Si medimos N veces la MF

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$ promedio

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$ dispersión

$var(x)$

Cuando tenemos un valor finito de datos, N, la desviación standard es *S*

$N \rightarrow \infty$

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

$$var = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx$$

$$\sigma = \sqrt{var(x)}$$

Intervalo de confianza

$$\bar{x} - S \leq x \leq \bar{x} + S$$

$$\bar{x} - \sigma \leq x \leq \bar{x} + \sigma$$

Expresión

$(\bar{x} \pm S)\ unidades$

$(\bar{x} \pm \sigma)\ unidades$

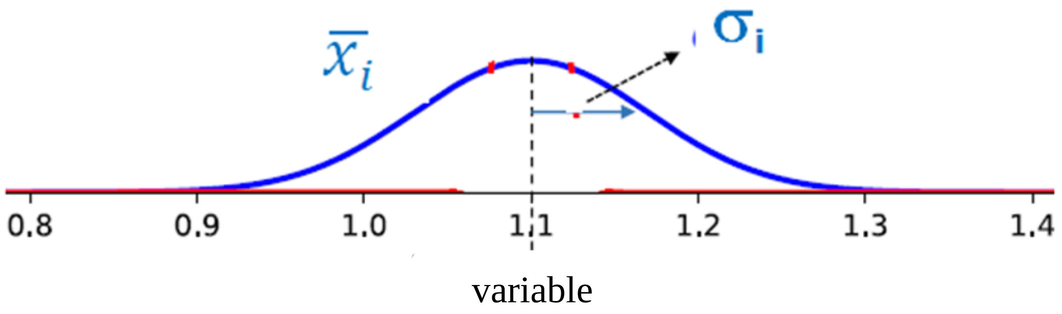
Si se realiza una nueva medición, x_i , esta tendrá un probabilidad de un 68 % de ubicarse en este intervalo

Supongamos una experiencia 1 donde medimos una magnitud física, x , N veces.

Promedio $\overline{x_1}$

Desviación estandard σ_1

Realizamos un segundo muestreo, también de N muestras, de la misma magnitud con el mismo método de medición.
Ahora obtenemos $\overline{x_2}$ y σ_2



- ✓ ¿ Cómo difieren $\overline{x_1}$ y $\overline{x_2}$?
- ✓ ¿ Será diferente σ_1 de σ_2 ?

Si el número de datos es suficientemente grande como para tener definido el proceso estadístico, entonces

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$$

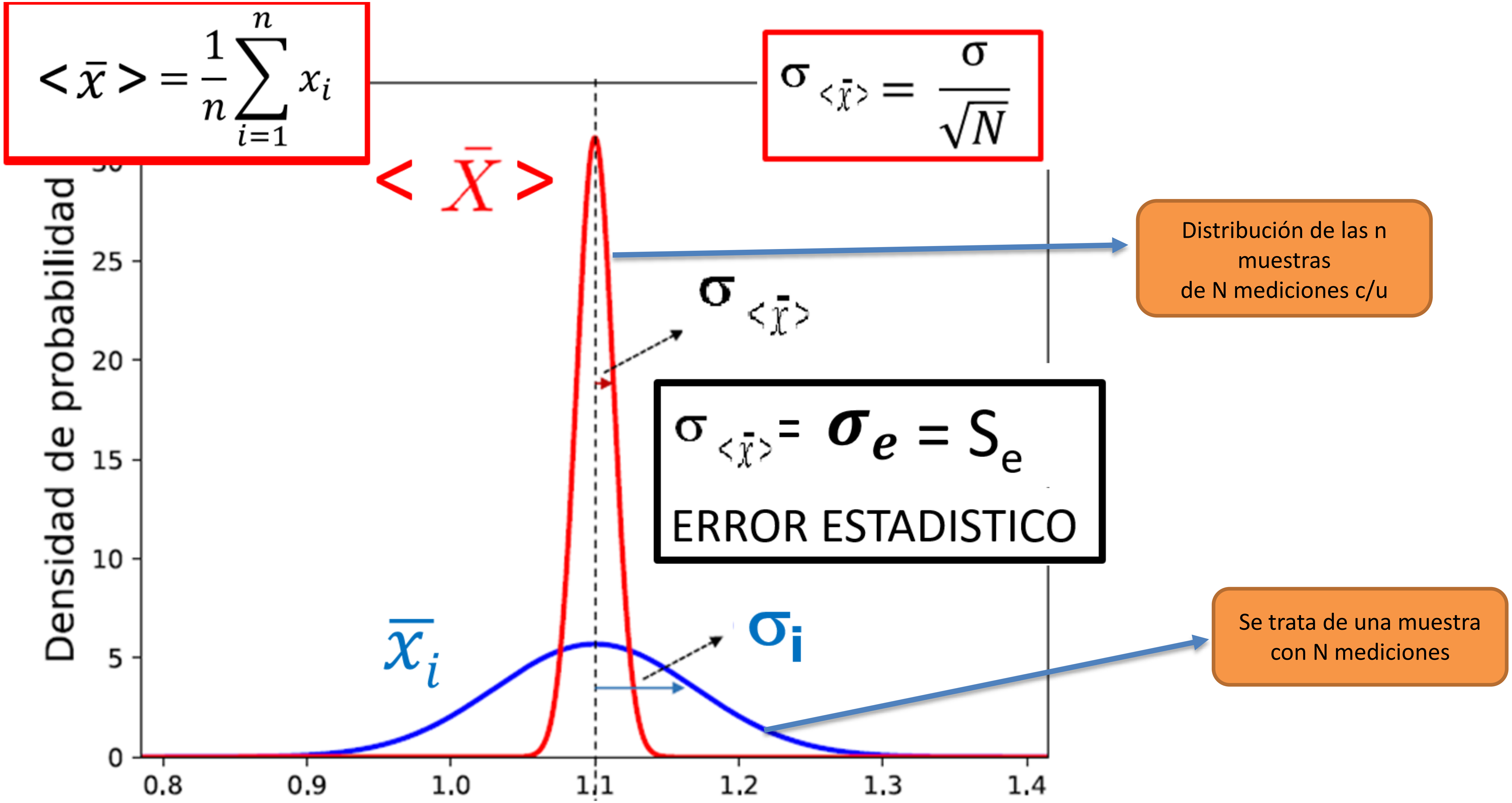
Si repite n veces la experiencia, los promedios $\overline{x}_i$ de las diferente muestras de N datos c/u van a seguir una distribución Gausssiana centrada en

$$\langle \bar{x} \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i}^{n} \overline{x}_i$$

y una dispersión estándar de los promedios de cada experimento $\overline{x}_i$

$$\sigma_{\langle \bar{x} \rangle} = \sigma_e = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Teorema central del límite


$<\bar{x}> = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
$\sigma_{<\bar{x}>} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$
$< \bar{X} >$
Densidad de probabilidad
Distribución de las n muestras de N mediciones c/u
$\sigma_{<\bar{x}>}$
$\sigma_{<\bar{x}>} = \sigma_e = S_e$
ERROR ESTADISTICO
$\overline{x}_i$
σ_i
Se trata de una muestra con N mediciones
0
5
10
15
20
25
0.8
0.9
1.0
1.1
1.2
1.3
1.4

- ✓ Mediciones directas
  - ✓ Incertidumbre en las mediciones
    - ✓ Error nominal
    - ✓ Error estadístico
      - ✓ Estadística de una muestra de N mediciones
      - ✓ Estadística de n muestras de N mediciones
  - ✓ Instrumentos de medición de dimensiones
    - ✓ Calibre
    - ✓ Micrómetro
- ✓ Mediciones indirectas
  - ✓ Incertidumbre, propagación de errores
  - ✓ Experiencias

Instrumentos de Medición de dimensiones. Principio de Abbe

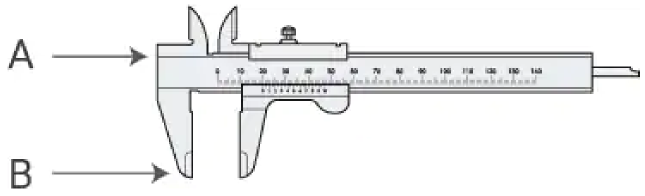
Para optimar la precisión de la medición, el objeto a medir y la escala del instrumento de medición, deben colocarse de forma colineal en la dirección de medición".

El principio de Abbe se refiere a la precisión al medir dimensiones.

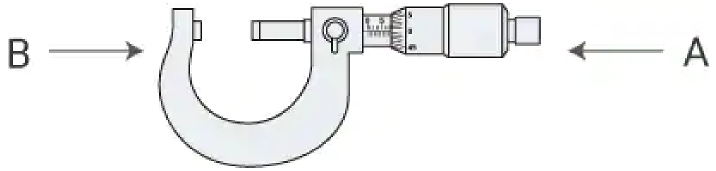
Es una guía importante para el diseño de instrumentos de medición

Cuando se aplica a los instrumentos de medición reales, el principio implica que, para los micrómetros exteriores, la escala y la posición de medición son colineales, y para los calibre de mano, la escala y la posición de medición están a cierta distancia entre sí.

Los calibradores de mano no siguen el principio de Abbe



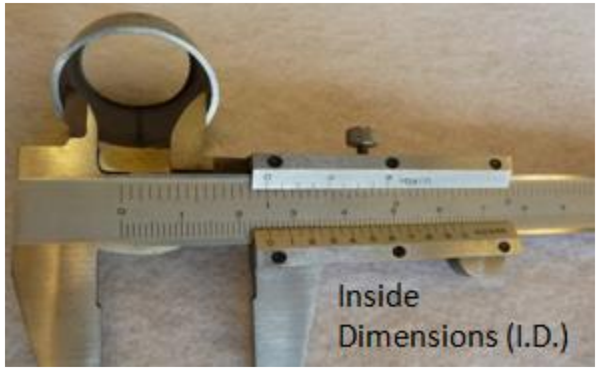
Los micrómetros siguen el principio de Abbe

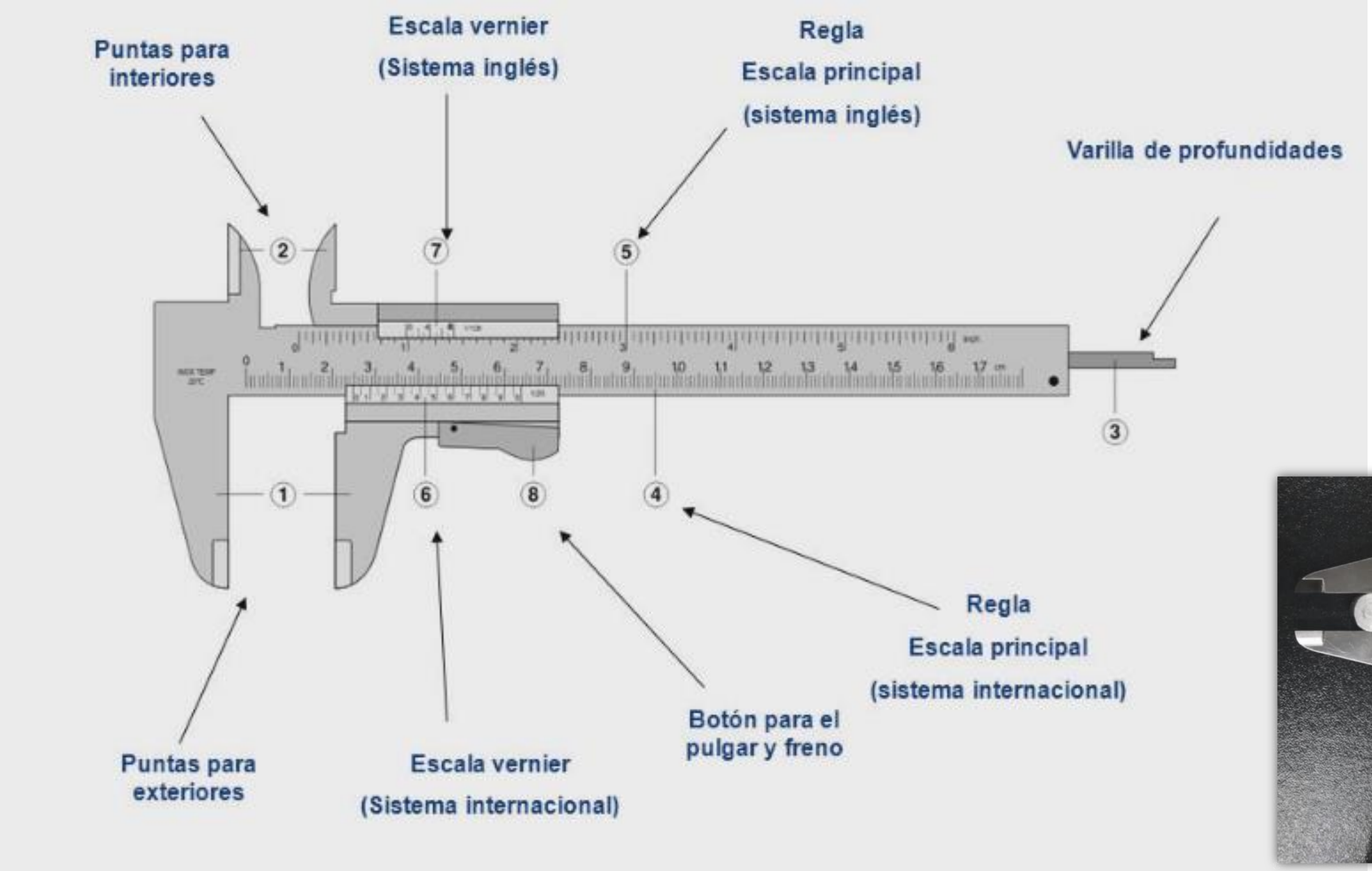


Se puede decir que los micrómetros exteriores tienen una mayor precisión de medición.

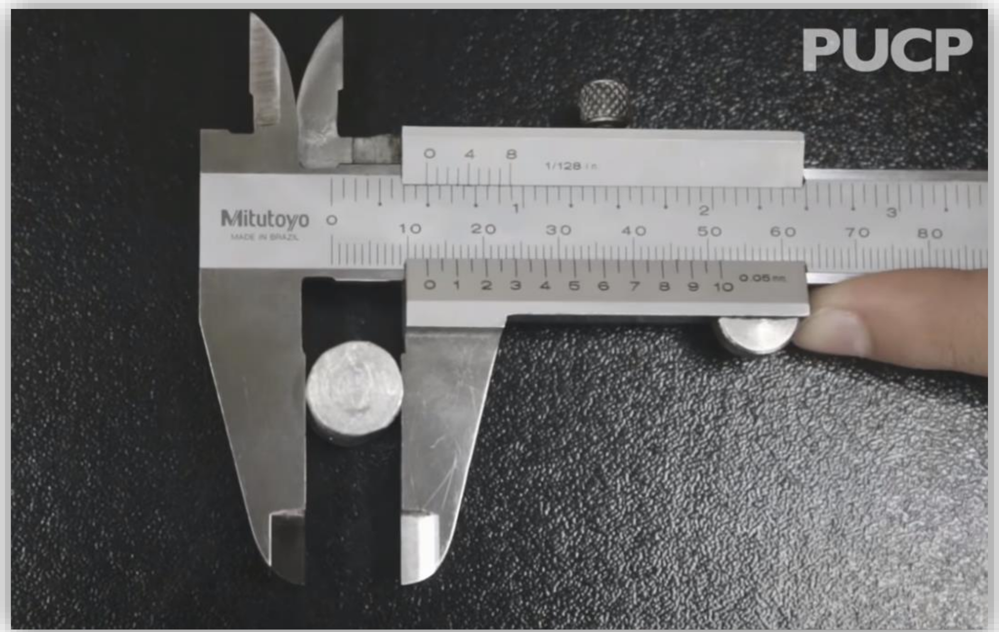
A : Posición de la escala B : Posición de medición

Medición de dimensiones : Calibre

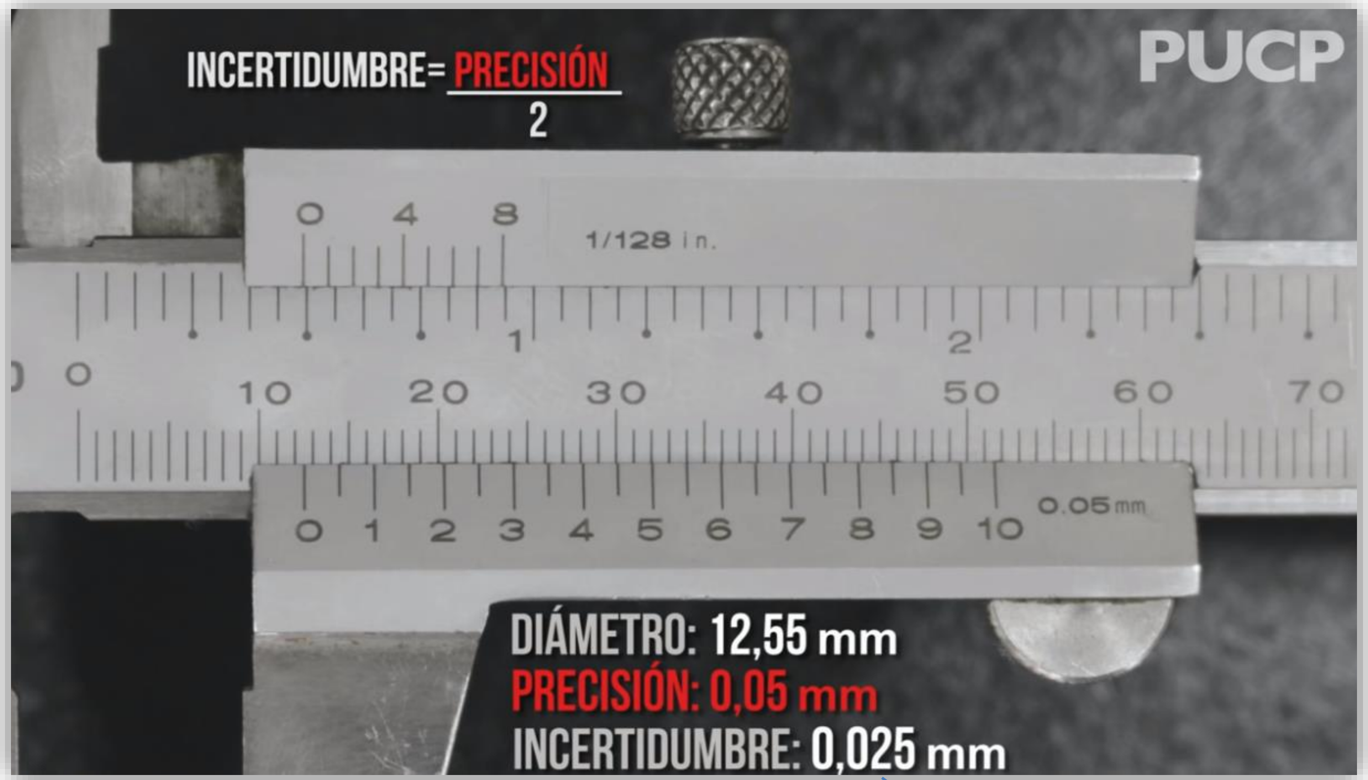




https://www.stefanelli.eng.br/en/virtual-vernier-caliper-simulator-05-millimeter/#swiffycontainer_2

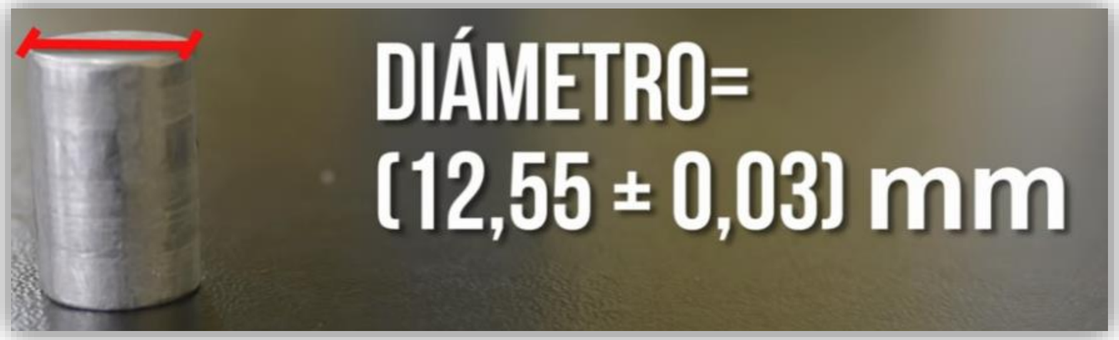


https://www.youtube.com/watch?v=RFhelsCKC9w



INCERTIDUMBRE= PRECISIÓN / 2
PUCP
1/128 in.
0.05 mm
DIÁMETRO: 12,55 mm
PRECISIÓN: 0,05 mm
INCERTIDUMBRE: 0,025 mm

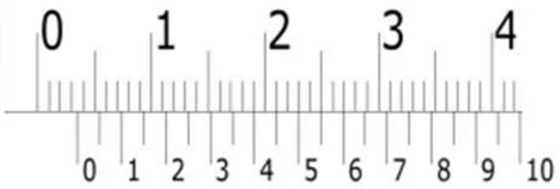
0,03 mm



DIÁMETRO=
(12,55 ± 0,03) mm

Ejemplos

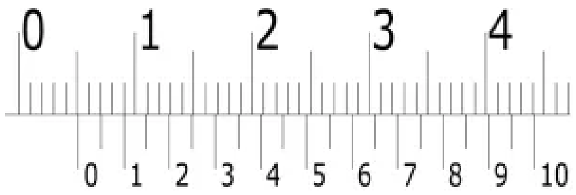
3,45mm



En la regla, a la izquierda del cero del nonio, hay 3 divisiones, esto significa que hay 3 milímetros enteros, en el nonio coincide la división que está justo entre el cuatro y el cinco con una división de la regla, o sea 4 décimas y media o 0,45mm , entonces el resultado es sumar los enteros de la regla más la fracción del nonio:

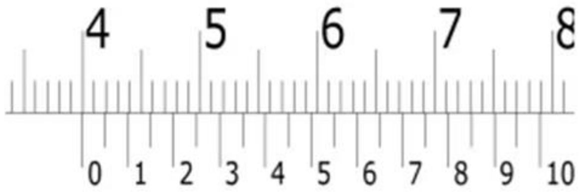
3 + 0,45 mm = 3,45mm

5,1mm



5 divisiones de la regla a la izquierda del cero del nonio, lo que significa que hay 5 milímetros enteros, en el nonio coincide la división del 1 con una división de la regla, o sea 0,1 mm , entonces el resultado es sumar los enteros de la regla más la fracción del nonio:

39,95mm



39 milímetros enteros a la izquierda del nonio, más 9 ,5 divisiones en el nonio del pie de rey, da como resultado 39,95 mm.

Si hacemos tres mediciones de una cilindro de acero

Mediciones	Diámetro (mm)	Altura (mm)
Primera medición		
Segunda medición		
Tercera medición		
Media (promedio)	*12,52*	*20,02*
Desviación Estándar		
Incertidumbre Estándar		
Incertidumbre de lectura		
Incertidumbre total en la medida		

4 c.s.

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad \text{promedio}$$

Mediciones	Diámetro (mm)	Altura (mm)	
Primera medición	*12,55*	*19,90*	4 c.s.
Segunda medición	*12,30*	*19,85*	
Tercera medición	*12,70*	*20,30*	
Media (promedio)	*12,52*	*20,02*	4 c.s.
Desviación Estándar	***0,2021***	***0,2466***	4 c.s.
Incertidumbre Estándar	*0,1167*	*0,1424*	4 c.s.
Incertidumbre de lectura	***0,03***	***0,03***	
Incertidumbre total en la medida			

$$\begin{matrix}\textit{desviación estándar} \\ \textbf{\textit{de una muestra}}\end{matrix} = \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+(x_3-\bar{x})^2}{3-1}}$$

$$\begin{matrix}\textit{incertidumbre} \\ \textit{estándar}\end{matrix} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Mediciones	Diámetro (mm)	Altura (mm)	
Primera medición	*12,55*	*19,90*	
Segunda medición	*12,30*	*19,85*	4 c.s.
Tercera medición	*12,70*	*20,30*	
Media (promedio)	*12,52*	*20,02*	4 c.s.
Desviación Estándar	***0,2021***	***0,2466***	4 c.s.
Incertidumbre Estándar	*0,1167*	*0,1424*	4 c.s.
Incertidumbre de lectura	***0,03***	***0,03***	
Incertidumbre total en la medida			

$$\begin{matrix}\textit{incertidumbre total}\\ \textit{en la medida}\end{matrix} = \sqrt{(\textbf{\textit{incertidumbre de lectura}})^2 + (\textbf{\textit{incertidumbre estándar}})^2}$$

$$\begin{matrix}\textit{incertidumbre total}\\ \textit{en la medida del diámetro}\end{matrix} = \sqrt{(\mathbf{0,03})^2 + (\mathbf{0,1167})^2} = \mathbf{0,1}$$

$$\begin{matrix}\textit{incertidumbre total}\\ \textit{en la medida de la altura}\end{matrix} = \sqrt{(\mathbf{0,03})^2 + (\mathbf{0,1424})^2} = \mathbf{0,1}$$

Mediciones	Diámetro (mm)	Altura (mm)
Primera medición	*12,55*	*19,90*
Segunda medición	*12,30*	*19,85*
Tercera medición	*12,70*	*20,30*
Media (promedio)	***12,52***	***20,02***
Desviación Estándar	***0,2021***	***0,2466***
Incertidumbre Estándar	***0,1167***	***0,1424***
Incertidumbre de lectura	***0,03***	***0,03***
Incertidumbre total en la medida	***0,1***	***0,1***

$$\boldsymbol{Diámetro = 12,5\ mm \pm 0,1\ mm}$$

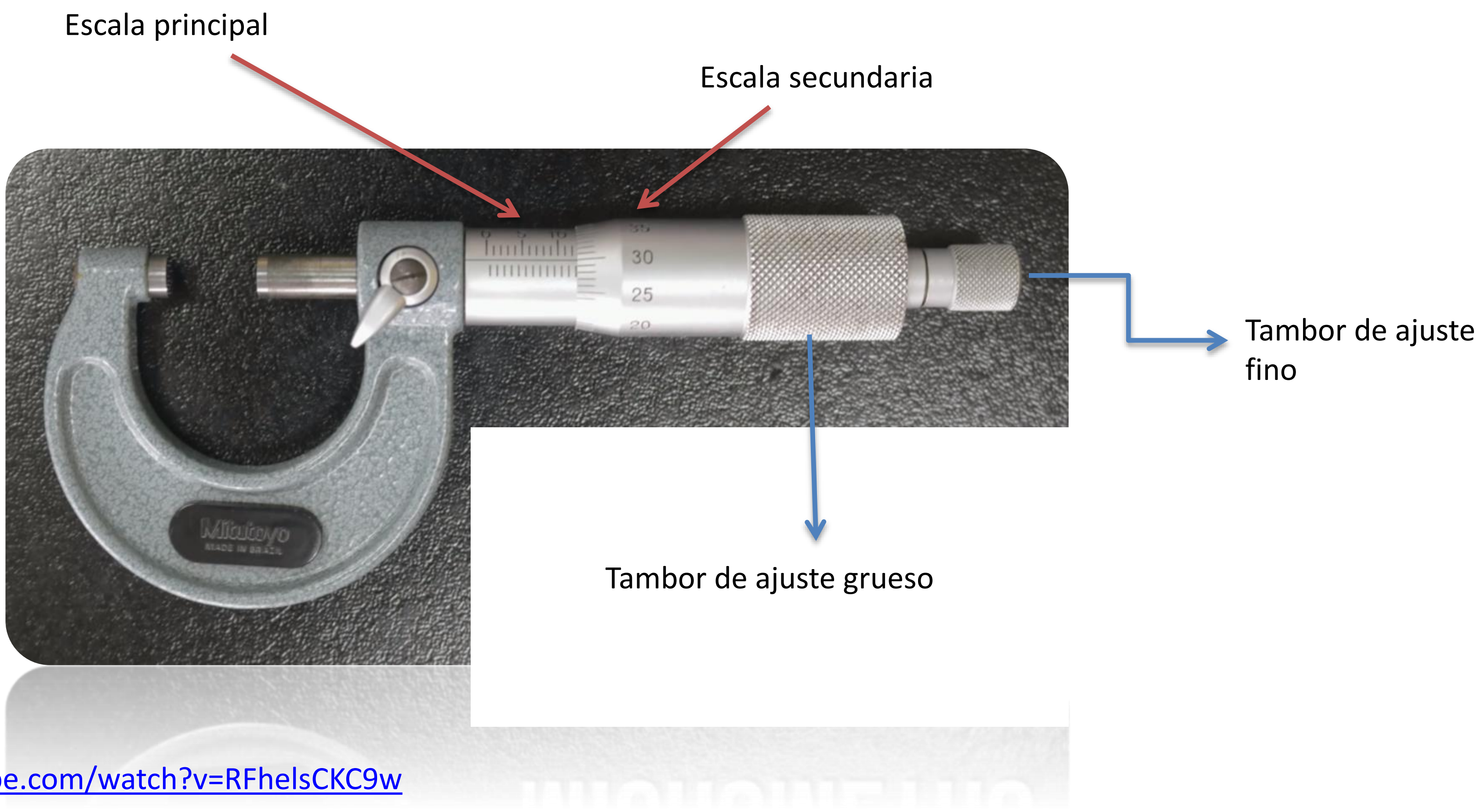
$$\boldsymbol{Altura = 20,0\ mm \pm 0,1\ mm}$$

Medición de dimensiones : El micrómetro

El micrómetro es una instrumento que mide el tamaño de un objeto encerrándolo.

Algunos modelos incluso pueden realizar mediciones en unidades de 1 µm.

A diferencia de los cailbres de mano, los micrómetros se adhieren al principio de Abbe, que les permite realizar mediciones más precisas.

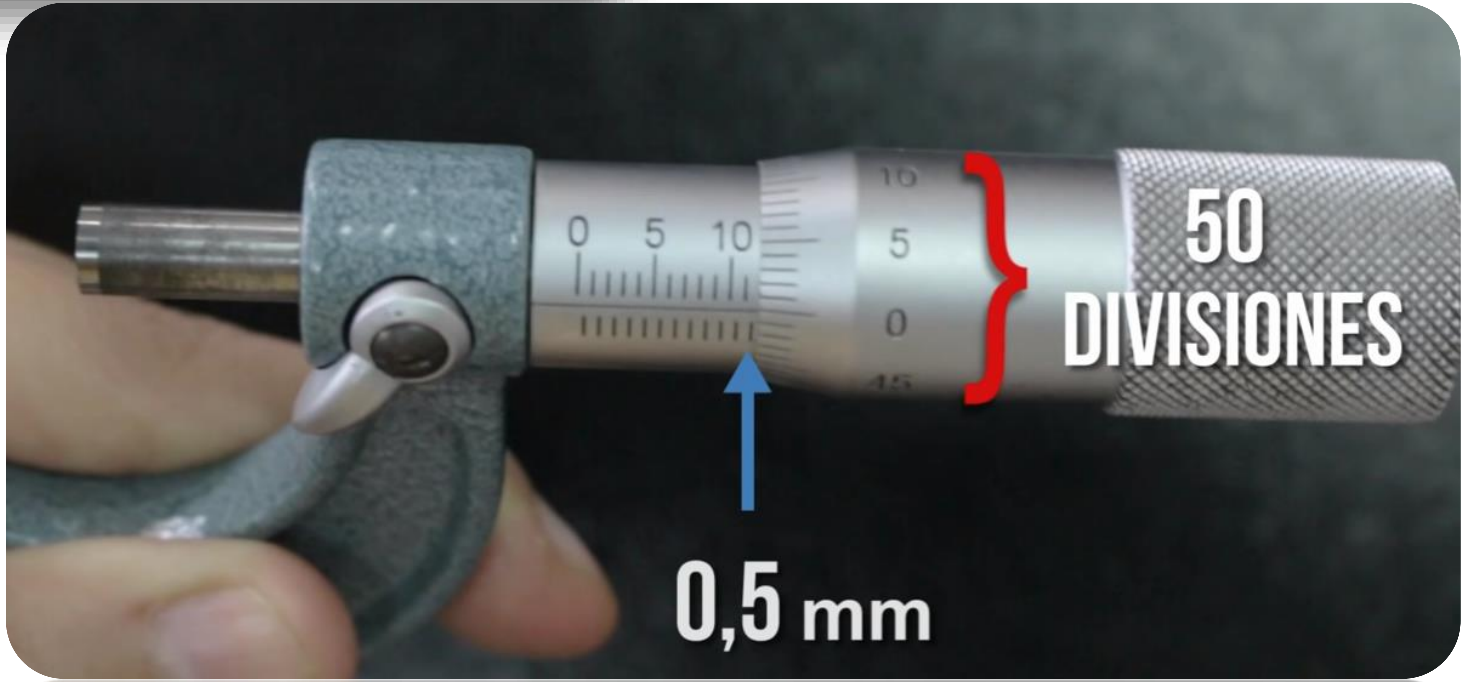


https://www.youtube.com/watch?v=RFhelsCKC9w


PUCP

Una vuelta de tambor es 0,5 mm
Cada división del tambor es de 0,01 mm
La incertidumbre es de 0,005 mm

$$\text{INCERTIDUMBRE} = \frac{\text{PRECISIÓN}}{2}$$



Supongamos la medición del diámetro de un cilindro de metal

- ✓ Mediciones directas
  - ✓ Incertidumbre en las mediciones
    - ✓ Error nominal
    - ✓ Error estadístico
      - ✓ Estadística de una muestra de N mediciones
      - ✓ Estadística de n muestras de N mediciones
  - ✓ Instrumentos de medición de dimensiones
    - ✓ Calibre
    - ✓ Micrómetro
- ✓ Mediciones indirectas
  - ✓ Incertidumbre, propagación de errores
  - ✓ Experiencias

Mediciones indirectas

- La medida indirecta de una magnitud se alcanza por aplicación de una fórmula a un conjunto de medidas directas, (variables independientes o datos), que las relacionan con la magnitud problema.
- Mediante dicha fórmula se obtiene también el error de la medida.
- Si en la fórmula hay números irracionales (tales como π o e) se deben elegir con un número de cifras significativas que no afecten a la magnitud del error absoluto de la magnitud que queremos determinar.
- Esta elección determinará el valor del error asignado a dicha constante.
- Cuando se trabaja con calculadora o computadora lo más conveniente es tomar todos los decimales que aparecen para el número en cuestión (así, su error es muy pequeño y puede despreciarse frente a los del resto de las magnitudes que intervengan).

En la mayor parte de los casos el valor mensurando Y no se mide directamente, sino que se determina a partir de otras N cantidades $X_1, X_2, \ldots, X_N$ a través de una relación funcional

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N)$$

Una estimación del mensurando Y, denotada por y,
se calcula utilizando estimaciones de entrada $x_1, x_2, \ldots, x_N$.

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

En algunos casos, la estimación puede evaluarse con la ecuación:

$$y = \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_{1,k}, X_{2,k}, \ldots, X_{N,k})$$

→ media aritmética de n determinaciones independientes Y_k de Y

$X_{i,k}$ es la observación k de X_i, y cada determinación tiene la misma incertidumbre

La otra forma es medir cada variable X_i n veces, promediarla y calcular con los promedios el valor de la magnitud y

$$y = f(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_N)$$

En ese caso debo estimar la dispersión de y (varianza y luego desviación estándar) considerando las varianzas de cada magnitud X_i

La desviación estándar estimada, es la incertidumbre estándar combinada σ_c

Se calcula de la desviación estándar estimada que se asocia a cada estimación x_i, denominada incertidumbre estándar y designada con $\sigma(x_i)$

- ✓ La evaluación tipo A de la incertidumbre se basa en el primer caso (una distribución de frecuencias)
- ✓ La evaluación tipo B de la incertidumbre resulta de una distribución establecida a priori.
- ✓ Ambas reflejan nuestro conocimiento del proceso de medición

Evaluación tipo A de la incertidumbre estándar

En la mayor parte de los casos, la mejor estimación del valor esperado de una cantidad q, y para la cual se han hecho n mediciones independientes q_k es la media aritmética o promedio q :

$$\bar{q} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q_k \qquad s^2(q_k) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(q_k - \bar{q})^2$$

La mejor estimación de la varianza de la media $\longrightarrow$ $\sigma_e^2(q) = \sigma^2/n$ $\qquad s^2(\bar{q}) = \frac{s^2(q_k)}{n}$

La evaluación tipo A de la incertidumbre estándar de un conjunto de mediciones x_k, tal como se definió previamente, se logra con la ecuación:

$$\sigma_e(x_i) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

Evaluación tipo B de la incertidumbre estándar

Cuando se tiene una estimación x_i de una cantidad X_i que no se ha obtenido de observaciones repetidas, la varianza estimada $\sigma^2(x_i)$ o la incertidumbre estándar $\sigma_e(x_i)$ se evalúan por un juicio científico basado en toda la información disponible acerca de la variabilidad de X_i.

Entre ésta se pueden incluir:

- ✓ datos de mediciones anteriores
- ✓ experiencia o conocimiento general acerca del comportamiento y propiedades de materiales de referencia, patrones o instrumentos
- ✓ especificaciones del fabricante
- ✓ datos provistos en calibraciones u otros certificados
- ✓ incertidumbres asignadas a datos de referencia tomados de manuales .

Cálculo de incertidumbre estándar combinada

$$\sigma_c = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}$$

Existen diversos procedimientos para calcular la incertidumbre estándar combinada, dependiendo de si las variables son independientes o no, es decir, si existe alguna correlación entre ellas.

Variables de entrada no correlacionadas

- La incertidumbre estándar de *y*, donde *y* es la estimación del mensurando Y.
- El resultado de una medición, se obtiene al combinar apropiadamente las incertidumbres estándares de las estimaciones de entrada x_1, x_2,..., x_N
- La incertidumbre estándar combinada es

$$\sigma_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}_{\text{Coeficiente de sensibilidad}}^2 \sigma^2(x_i)}$$

Regla de propagación de incertidumbre

Variables de entrada correlacionadas

$$\sigma_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\sigma(x_i, x_j)$$

$$\sigma_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \sigma^2(x_i) + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\sigma(x_i, x_j)$$

covarianza

La covarianza entre dos variables p y q se calcula

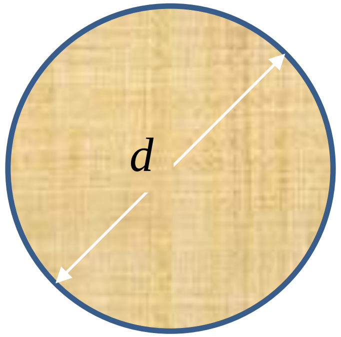
$$s(\bar{p}, \bar{q}) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}(p_k - \bar{p})(q_k - \bar{q})$$

medias

p_k y q_k son las observaciones individuales de dichas cantidades

Magnitudes con incertidumbre instrumentales

Supongamos evaluar el área de un disco de diámetro d



$$Area = \pi \frac{d^2}{4}$$

El diámetro d lo medimos con un calibre y el valor medido es d_o

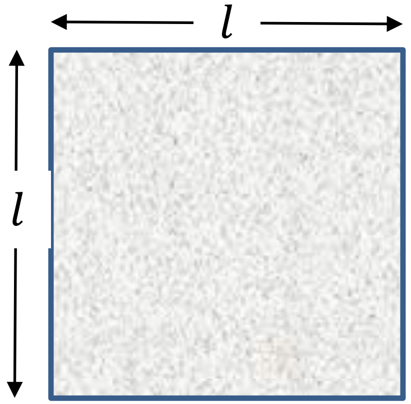
$$d = d_o \pm \Delta d$$

Incertidumbre del instrumento

En ambos casos el área debería expresarse por

$$A = A_o \pm \Delta A$$

Supongamos evaluar el área una baldosa cuadrada de lado l



$$Area = l^2$$

El lado l lo medimos con una cinta métrica y el valor medido es l_o

$$l = l_o \pm \Delta l$$

Incertidumbre del instrumento

$$A_{max} = (l_o + \Delta l)^2$$

$$A_{min} = (l_o - \Delta l)^2$$

$$A_o = \frac{A_{max} + A_{min}}{2} \qquad A_o = \frac{2l_o^2 + \cancel{2\Delta l^2}}{2} \approx l_o^2$$

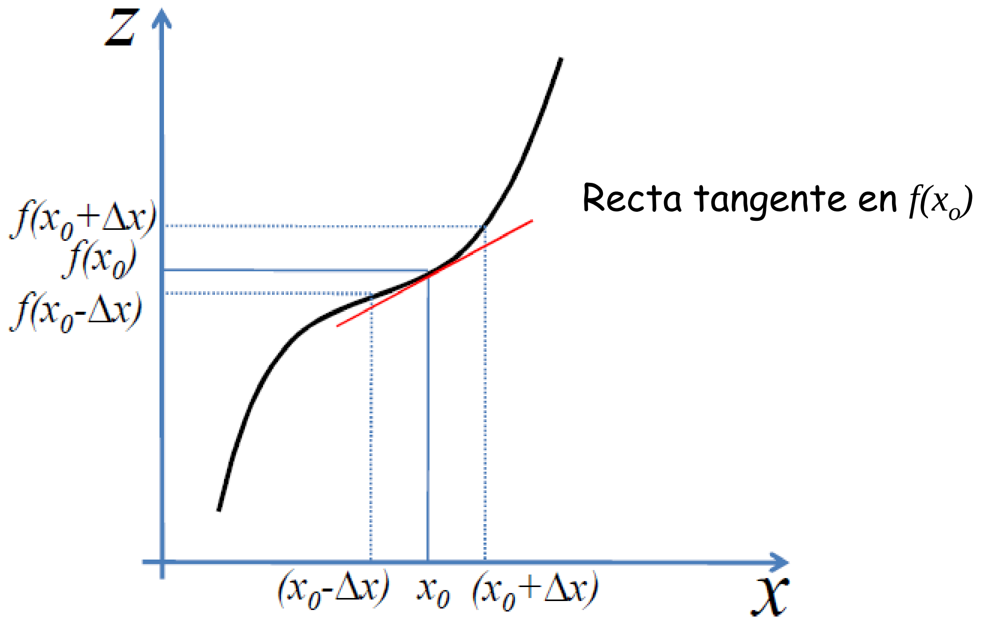
$$\Delta A = \frac{A_{max} - A_{min}}{2} \qquad \Delta A = \frac{4 l_o \Delta l}{2} = 2 l_o \Delta l$$

$$\boxed{A = A_o \pm 2 l_o \Delta l}$$

Supongamos que deseamos estimar el valor de una magnitud z a partir de una medición directa de una magnitud x

$$z = f(x)$$

$$x = (x_0 \pm \Delta x)$$



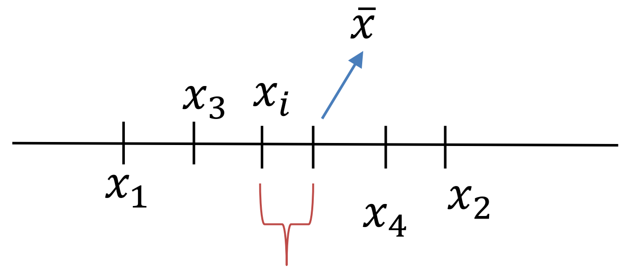
$$\left.\frac{df}{dx}\right]_{x_o}$$

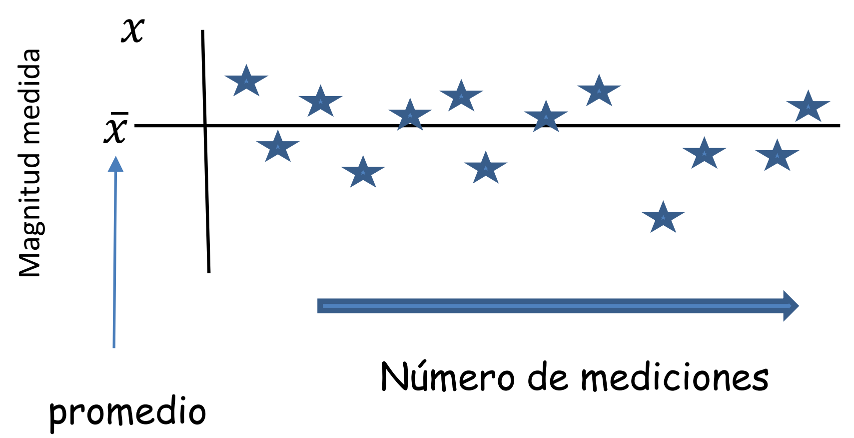
$$z = (z_0 \pm \Delta z)$$

$$z_0 = f(x_0) \qquad \Delta z = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} * \Delta x$$

Tenemos una función $z = f(x)$

x está sometida a fluctuaciones aleatorias $\xrightarrow{\text{por ejemplo}}$ Periodo medido del péndulo





$$\delta x_i = (x_i - \bar{x}) \qquad i = 1, \dots \dots \dots, N$$

$$var = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$$

$$\frac{dvar}{d\bar{x}} = 0 \qquad -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}2(x_i - \bar{x}) = 0 \longrightarrow -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i - \frac{1}{N}\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\bar{x}}_{N\bar{x}} = 0 \longrightarrow \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i$$

El promedio minimiza la varianza

Tenemos una función $z = f(x,y)$ → Son variable independientes ⇒ $var(x+y) = var(x) + var(y)$ (1)

$var(kx) = k^2 var(x)$ (2)

Mido x_o, y_o $\xrightarrow[\text{se busca}]{}$ $z_o = f(x_o, y_o)$

Se desarrolla en series de Taylor $z = f(x,y)$

$$x \sim x_o$$
$$y \sim y_o$$

$$z = f(x,y) \approx \underbrace{\underset{\substack{\downarrow \\ \text{cte}}}{f(x_o,y_o)}}_{} + \underbrace{\underset{\substack{\downarrow \\ \text{cte}}}{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\substack{x_o \\ y_o}}} (x - x_o) + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{cte}}}{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{\substack{x_o \\ y_o}}} (y - y_o) + \cdots}_{}$$

Por (1) $\quad var(z) \cong var\left(\cancel{f(x_o, y_o)}\right) + var(*)$

$$var(z) \cong var\left(\underset{\substack{\downarrow \\ \text{cte}}}{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\substack{x_o \\ y_o}}} (x - x_o) + \right) + var\left(\underset{\substack{\downarrow \\ \text{cte}}}{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{\substack{x_o \\ y_o}}} (y - y_o)\right)$$

Si aplico (2) ⇒

$$var(z) \approx \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{\substack{x_o \\ y_o}} var(x - x_o) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{\substack{x_o \\ y_o}} var(y - y_o)$$

$$\begin{cases} var(x - x_o) = var(x) - \cancel{var}(x_o) = var(x) \\ var(y - y_o) = var(y) - \cancel{var}(y_o) = var(y) \end{cases}$$

$$var(z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{\substack{x_o \\ y_o}} var(x) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{\substack{x_o \\ y_o}} var(y)$$

$\sigma^2 = var$ Desviación estandard

$$\boxed{\sigma_z^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{\substack{x_o \\ y_o}} \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{\substack{x_o \\ y_o}} \sigma_y^2}$$

$$\boxed{\sigma_z^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_{x_i}^2}$$

Para n variable independientes

Sabemos que $\sigma_e = \dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}$

$$\boxed{\sigma_{e_z}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{\substack{x_o \\ y_o}} \sigma_{e_x}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{\substack{x_o \\ y_o}} \sigma_{e_y}^2}$$

Ejemplos

$$\boxed{\sigma_z^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_{x_i}^2}$$

Cada variable independiente tiene su incerteza asociada $\left\{ \begin{array}{l} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{array} \right.$

- $f(x, y, z) = ax + by - cz$

$$\Delta f^2 = a^2 \Delta x^2 + b^2 \Delta y^2 + c^2 \Delta z^2$$

- $g(x, y, z) = Gx^a y^b z^c$

$$\Delta g^2 = \left[\left(Ga\Delta x^{a-1}\Delta y^b \Delta z^c\right)^2 (\Delta x)^2 + \left(Gb\Delta x^a \Delta y^{b-1}\Delta z^c\right)^2 (\Delta y)^2 + \left(Gc\Delta x^a \Delta y^b \Delta z^{c-1}\right)^2 (\Delta z)^2\right]$$

$$\frac{\Delta g^2}{g^2} = a^2 \frac{\Delta x^2}{x^2} + b^2 \frac{\Delta y^2}{y^2} + c^2 \frac{\Delta z^2}{z^2}$$

- $h(x, y) = y\, lnx$

$$\Delta h^2 = \boxed{\left(y \frac{1}{x}\right)^2 \Delta x^2} + (lnx)^2 \Delta y^2$$

diverge si $x \rightarrow 0$

- ✓ Mediciones directas
  - ✓ Incertidumbre en las mediciones
    - ✓ Error nominal
    - ✓ Error estadístico
      - ✓ Estadística de una muestra de N mediciones
      - ✓ Estadística de n muestras de N mediciones
  - ✓ Instrumentos de medición de dimensiones
    - ✓ Calibre
    - ✓ Micrómetro
- ✓ Mediciones indirectas
  - ✓ Incertidumbre, propagación de errores
  - ✓ Experiencias

Experiencias

a) Vamos estimar el volumen de un cuerpo (monedas) por dos métodos a elección :

1. Medir las dimensiones y usar criterios geométricos.
2. Medir la masa y calcular el volumen si se conoce la densidad
3. Medir el volumen directamente sumergiendo el cuerpo en agua.

Discutir la precisión de las mediciones, su dispersión. Comparar los métodos

b) Con los datos del periodo del péndulo medido en la clase anterior calcular la aceleración de la gravedad *g*.

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$$

Considere las incertezas
- del período estimado
- la longitud del hilo utilizado en el péndulo

Experiencias

Vamos estimar el volumen de un cuerpo (monedas) por dos métodos a elección :

1. Medir las dimensiones y usar criterios geométricos.
2. Medir la masa y calcular el volumen si se conoce la densidad.
3. Medir el volumen directamente sumergiendo el cuerpo en agua.

PESO	5,80 gramos
DIÁMETRO	25,2 mm
ESPESOR	1,8 mm
METAL	Cu 92/Al 8

PESO	6,35 gramos
DIÁMETRO	23 mm
ESPESOR	2,2 mm
METAL	Cu 92/Al 6/Ni 2 (núcleo) / Cu 75/Ni 25 (anillo)

VALOR FACIAL	$ 1
CALIDAD	Circulación
METAL	Acero electrodepositado con cobre
CANTO	Liso
PESO	4,30 gramos
DIÁMETRO	20 mm
ESPESOR	1,70 mm

VALOR FACIAL	$ 2
CALIDAD	Circulación
METAL	Acero electrodepositado con latón
CANTO	Liso
PESO	5,0 gramos
DIÁMETRO	21,5 mm
ESPESOR	2,1mm

VALOR FACIAL	$ 5
CALIDAD	Circulación
METAL	Acero electrodepositado con níquel
CANTO	Liso
PESO	7,30 gramos
DIÁMETRO	23 mm
ESPESOR	2,20 mm

VALOR FACIAL	$ 10
CALIDAD	Circulación
METAL	Alpaca homogénea
CANTO	Estriado
PESO	9,0 gramos
DIÁMETRO	24,5 mm
ESPESOR	2,6mm

VALOR FACIAL	$2
CALIDAD	Circulación
METAL	Anillo dorado (Cu 92 / Al 6 / Ni 2) / Núcleo plateado (Cu 75 / Ni 25)
CANTO	Ranurado/Liso (alternado)
PESO	7,20 gramos
DIÁMETRO	24,50 mm (núcleo 17 mm)
ESPESOR	2,2 mm

1. Medir las dimensiones y usar criterios geométricos

Medir el diámetro D y espesor e

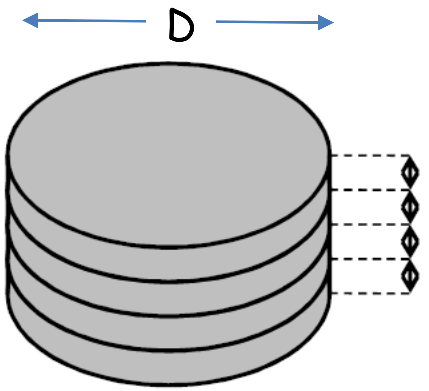
Instrumentos
- Calibre
- Regla
- Foto digitalizada (Image J)

Método
- Pensar que conviene en función de lo que poseo para medir.
- ¿ Apilamiento de monedas ?

¿ Cómo calculo la dispersión ?

$$\sigma_y{}^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_x{}^2$$

Regla de propagación de incertidumbre (para variables no correlacionadas)



4e = h

$$V = \pi r^2 h = \pi \frac{D^2}{4} h$$

$$\sigma_V{}^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)^2 \sigma_D{}^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)^2 \sigma_h{}^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial D} = \frac{\pi h D}{2} \qquad \frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi D^2}{4}$$

$$\boxed{\sigma_V{}^2 = \left(\frac{\pi h D}{2}\right)^2 \sigma_D{}^2 + \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2 \sigma_h{}^2}$$

2. Medir el volumen a partir de la masa y su densidad

- Debemos con una balanza de cocina y poder conocer bien su sensibildad.
- La balanza puede ser digital o analógica.
- ¿ Se debe pesar una moneda o varias iguales ? ¿ Qué criterio usaría ?

$$V = \frac{m}{\rho}$$

masa

densidad

Regla de propagación de incertidumbre
(para variables no correlacionadas)

$$\sigma_y{}^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_x{}^2$$

$$\Delta V^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)^2 (\Delta\rho)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial m}\right)^2 (\Delta m)^2$$

- ¿ Qué pasa si las monedas que tiene aleaciones ?
- ¿ Cúal es la densidad que se debe usar ?

$$\frac{1}{\rho} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_i}{\rho_i} \qquad \omega_i = fracción\ en\ peso\ del\ componene\ i-esimo$$

Material	ρ (g/cm³)
Cobre (Cu)	8,96
Aluminio (Al)	2,7
Niquel (Ni)	8,91
Acero	∼7,85
Alpaca	8,75

PESO	5,80 gramos
DIÁMETRO	25,2 mm
ESPESOR	1,8 mm
METAL	Cu 92/Al 8

92 % de Cobre – 8 % de Aluminio

$$\frac{1}{\rho} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_i}{\rho_i} = \frac{\omega_{cu}}{\rho_{Cu}} + \frac{\omega_{Al}}{\rho_{Al}} = \left(\frac{0,92}{8,96} + \frac{0,08}{2,70}\right) cm^3/g = 7,56\, g/cm^3$$

¿ Que pasa si no tenemos una balanza ?

Podemos usar las masas de las monedas que nos brinda la pagina web del Banco Central.

No sabemos como se midieron y qué error tienen. No lo informa el BC.

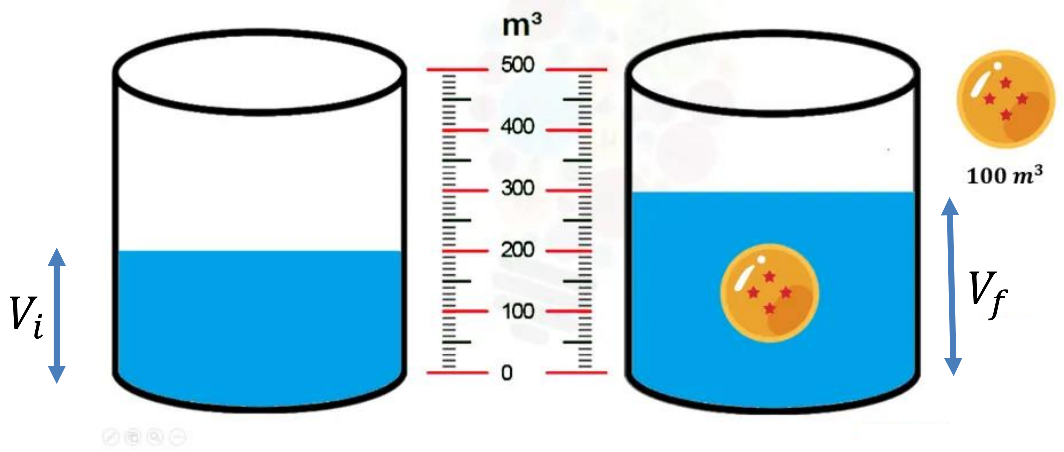
Se puede hacer la hipótesis de que el error es el último decimal, pero tiene consecuencias (se debe explicar).

¿ Que pasa con el valor de la densidad?

Usamos el mismo criterio del ultimo decimal de la tabla.

3. Medir el volumen por el desplazamiento de líquido

- Debemos contar con un vaso graduado donde colocamos una cantidad mensurable de agua
- Sumergimos una moneda (o varias ?)
- Leemos la diferencia de volumen respecto de la situación original



$$V = V_f - V_i$$

Volumen final (con cuerpo)

Volumen inicial (sin cuerpo)

$$\sigma_y{}^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_x{}^2$$

Regla de propagación de incertidumbre (para variables no correlacionadas)

- Se realiza la medición en dos operaciones.
  - ✓ Primero : medir el volumen del liquido
  - ✓ Segundo : medir el volumen del liquido + cuerpo

$$\Delta V^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial V_f}\right)^2 (\Delta V_f)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial V_i}\right)^2 (\Delta V_i)^2$$

Si sumerjo n monedas $\quad V_{total} = nV_{moneda} \Rightarrow V_{moneda} = \dfrac{V_{total}}{n}$

$$\Delta V_{total}^2 = \left(\frac{\partial V_{total}}{\partial V_{moneda}}\right)^2 (\Delta V_{moneda})^2$$

Lo conozco

$$\Delta V_{moneda}^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 (\Delta V_{total})^2$$

$$\Delta V_{moneda} = \frac{1}{n} \Delta V_{total}$$

¿ PREGUNTAS ?