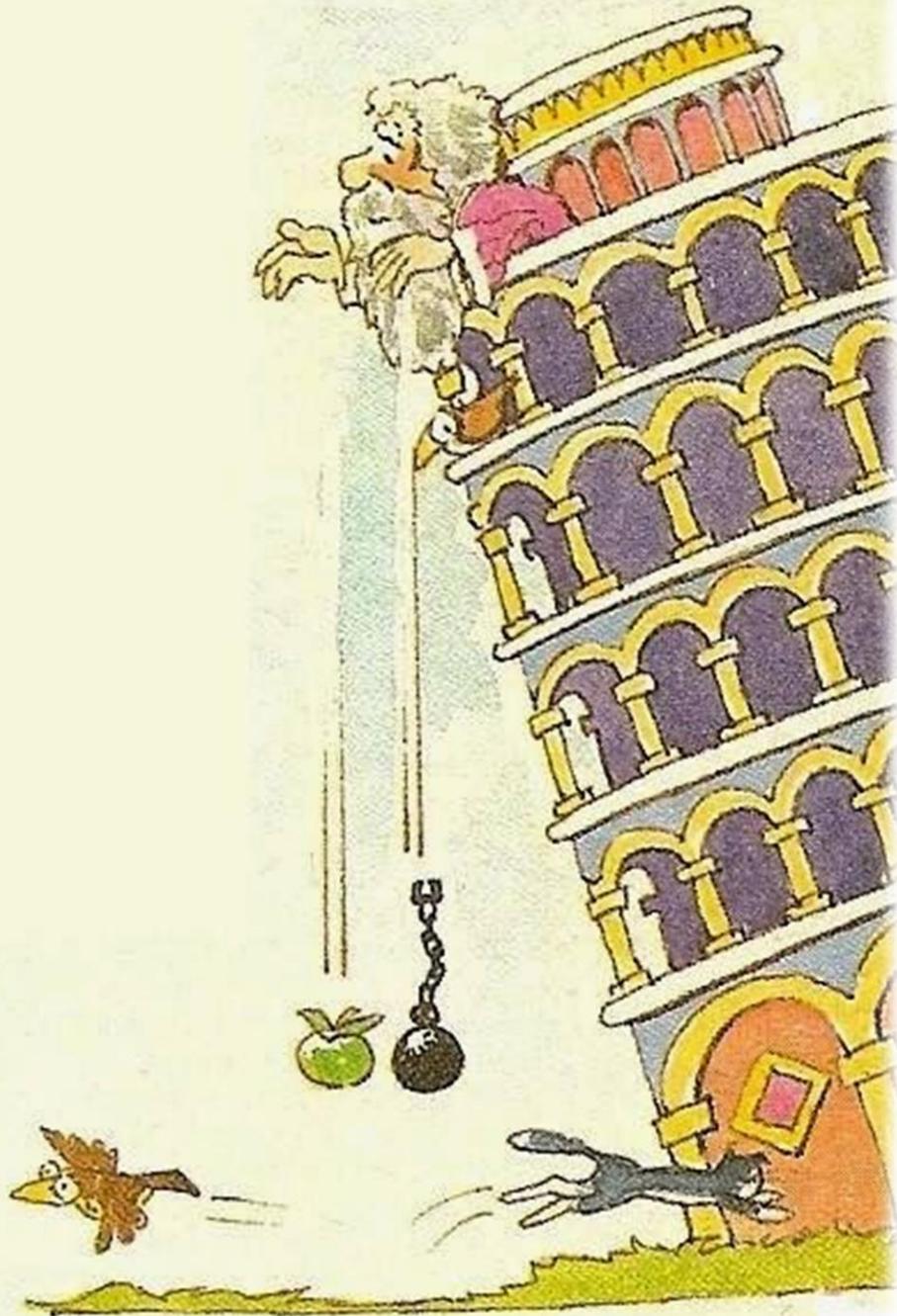


Laboratorio 1

Turno C

Clase 5

Caída libre – Tiro vertical
(8/05/2021)



Regresiones (repaso)

Mediciones indirectas III

Caída libre.

Estimación de la aceleración de la gravedad.

Tiro vertical



Ajuste por cuadrados mínimos

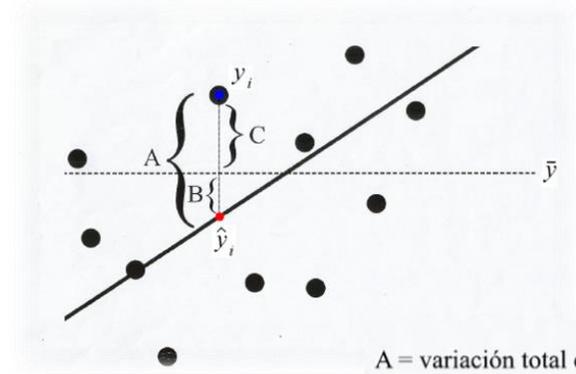
Suma residual de los cuadrados.

Suma explicada de los cuadrados.

Suma total de los cuadrados

$$TSS = ESS + RSS$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$



A = variación total en y
B = variación explicada en y
C = residuo no explicado en y

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS}$$

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{(n - 1)}{(n - m)}$$

n = cantidad de datos

m = cantidad de parámetros del modelo

$$F = \frac{ESS/(m - 1)}{RSS/(n - m)}$$

$$t_b = \frac{b}{s_b} \Rightarrow$$

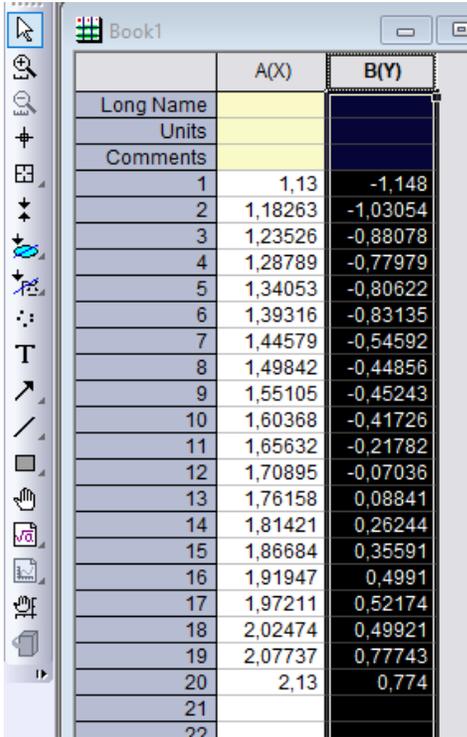
Valor t del parámetro b con desviación standard s_b

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sigma_i^2}$$

$$\chi^2_v = \frac{\chi^2}{v}$$

$$v = n - m$$

Ejemplo de ajuste lineal por cuadrados mínimos

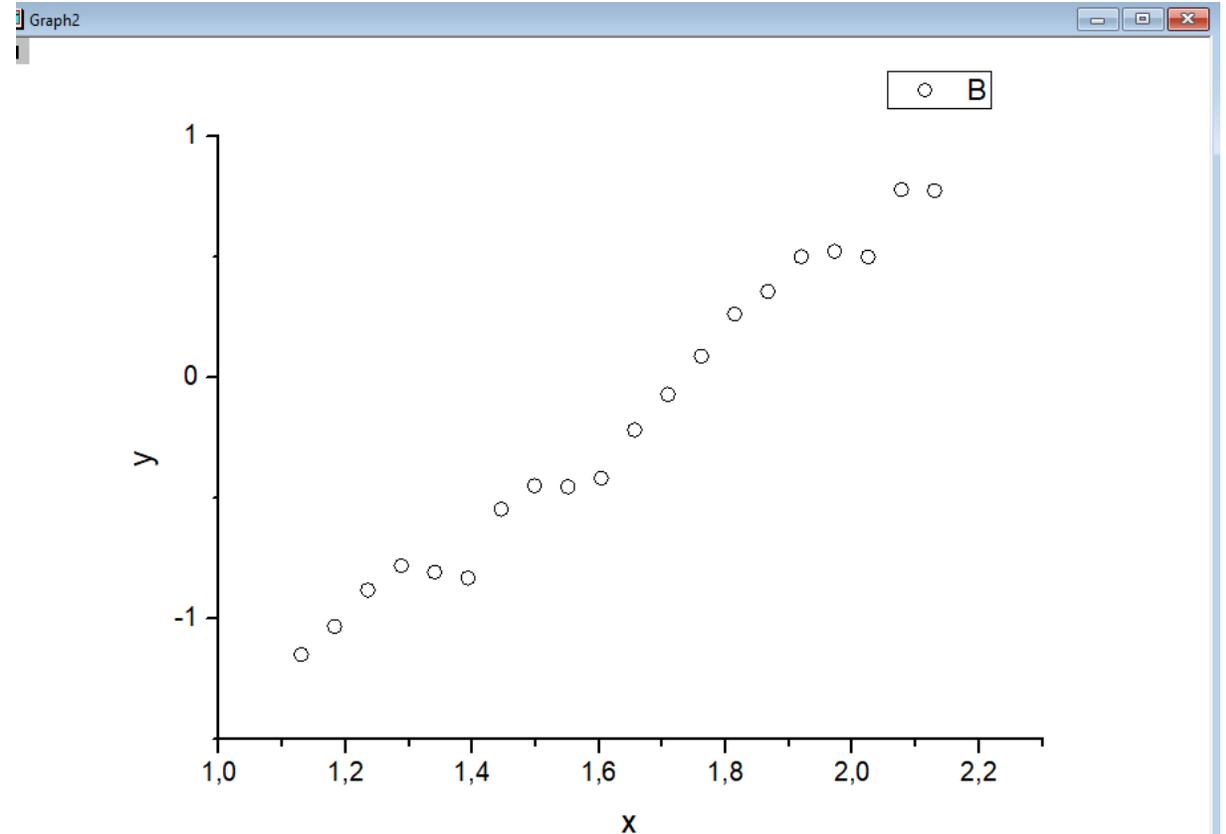


	A(X)	B(Y)
Long Name		
Units		
Comments		
1	1,13	-1,148
2	1,18263	-1,03054
3	1,23526	-0,88078
4	1,28789	-0,77979
5	1,34053	-0,80622
6	1,39316	-0,83135
7	1,44579	-0,54592
8	1,49842	-0,44856
9	1,55105	-0,45243
10	1,60368	-0,41726
11	1,65632	-0,21782
12	1,70895	-0,07036
13	1,76158	0,08841
14	1,81421	0,26244
15	1,86684	0,35591
16	1,91947	0,4991
17	1,97211	0,52174
18	2,02474	0,49921
19	2,07737	0,77743
20	2,13	0,774
21		
22		

Consideramos un conjunto de datos (x_i, y_i) productos de una medición donde se obtuvo la **variable y** en función de **la variable x**

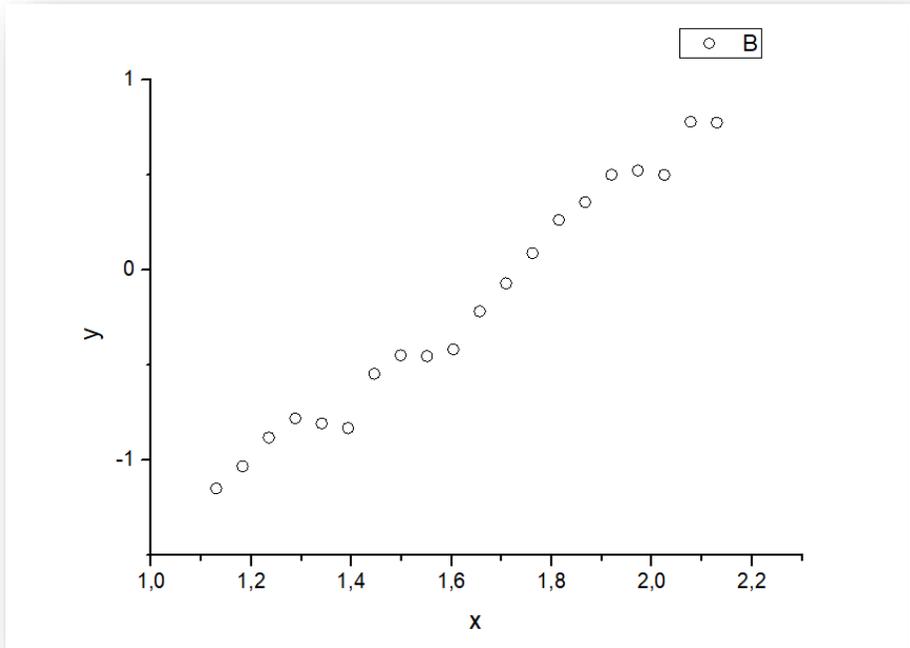
Utilizo Origin 9.0 para el análisis y quiero ver si estos datos se pueden representar por un función $y = f(X)$

En este ejemplo no estoy considerando los errores en las variables.

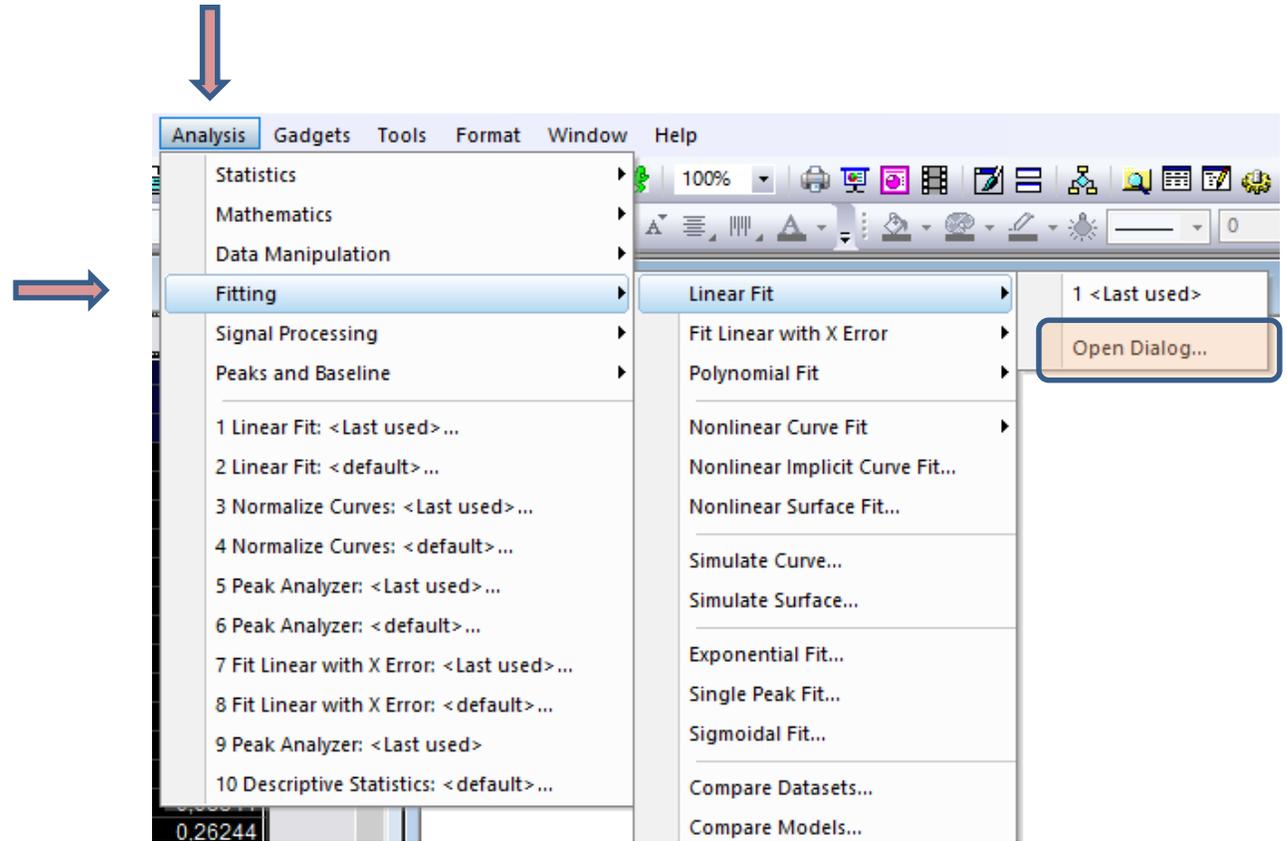


Supongamos que quiero ajustar a un modelo lineal

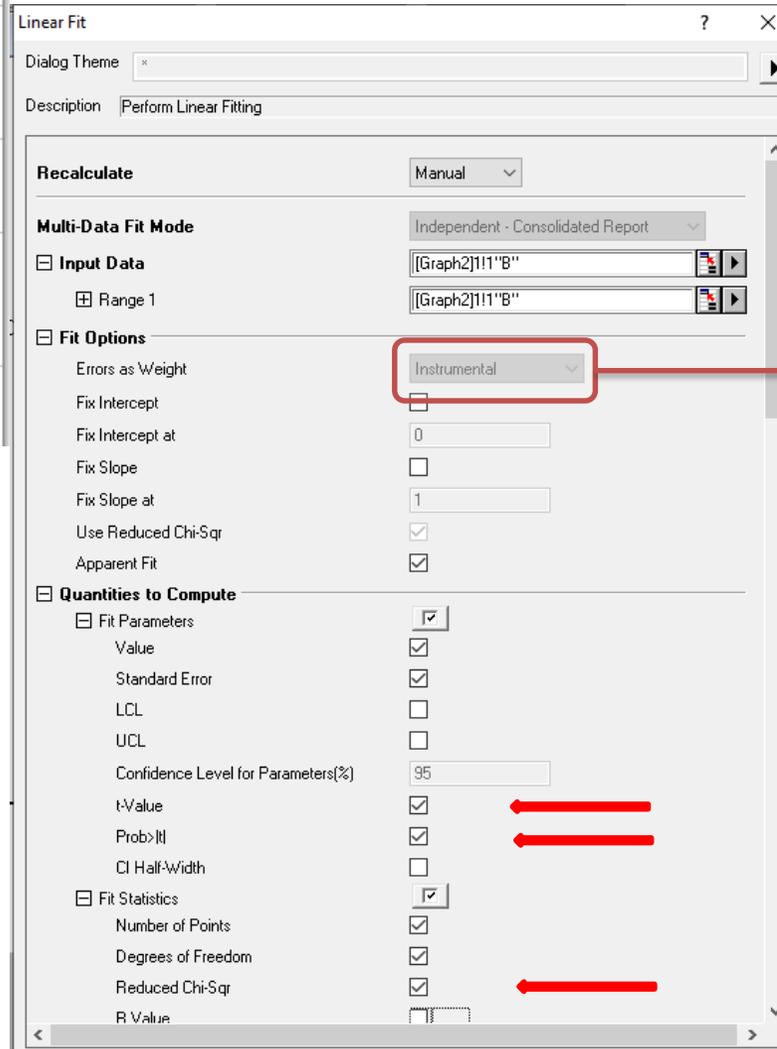
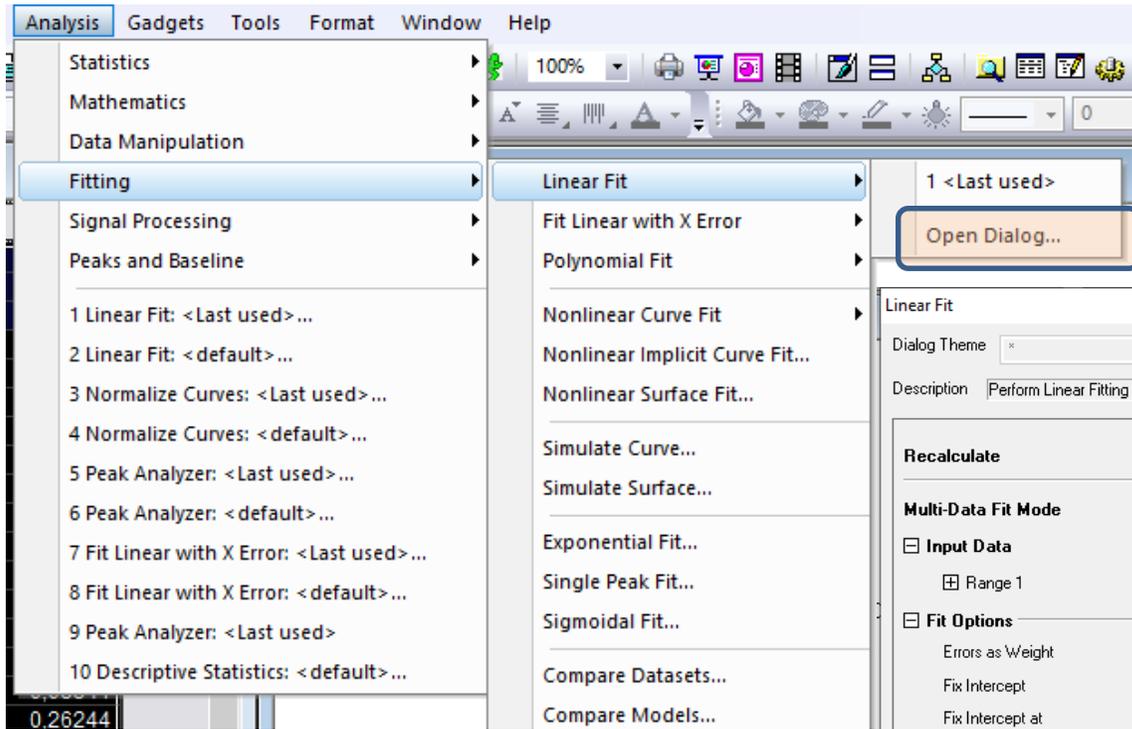
$$y = a + b x$$



Entonces, en Origin 9.0 , debo recorrer la siguiente secuencia hasta llegar a **Open Dialog**



Supongamos que quiero ajustar a un modelo lineal $y = a + b x$



Se despliega esta planilla y se debe tildar aquello que queremos calcular

Como no se asignaron errores esta casilla esta inhabilitada

Si hubiera errores en los datos se coloca **Instrumental**

Analysis Gadgets Tools Format Window Help

Statistics
Mathematics
Data Manipulation
Fitting
Signal Processing
Peaks and Baseline

Linear Fit
Fit Linear with X Error
Polynomial Fit

1 <Last used>
Open Dialog...

Linear Fit

Dialog Theme

Description Perform Linear Fitting

Confidence Level for Parameters(%) 95

t-Value
Prob>|t|
CI Half-Width

Fit Statistics

Number of Points
Degrees of Freedom
Reduced Chi-Sqr
R Value
Residual Sum of Squares
Pearson's r
R-Square(COD)
Adj. R-Square
Root-MSE (SD)
Norm of Residuals

Fit Summary

Value
Standard Error
LCL
UCL
Adj. R-Square
R-Square(COD)

ANOVA
Covariance matrix
Correlation matrix

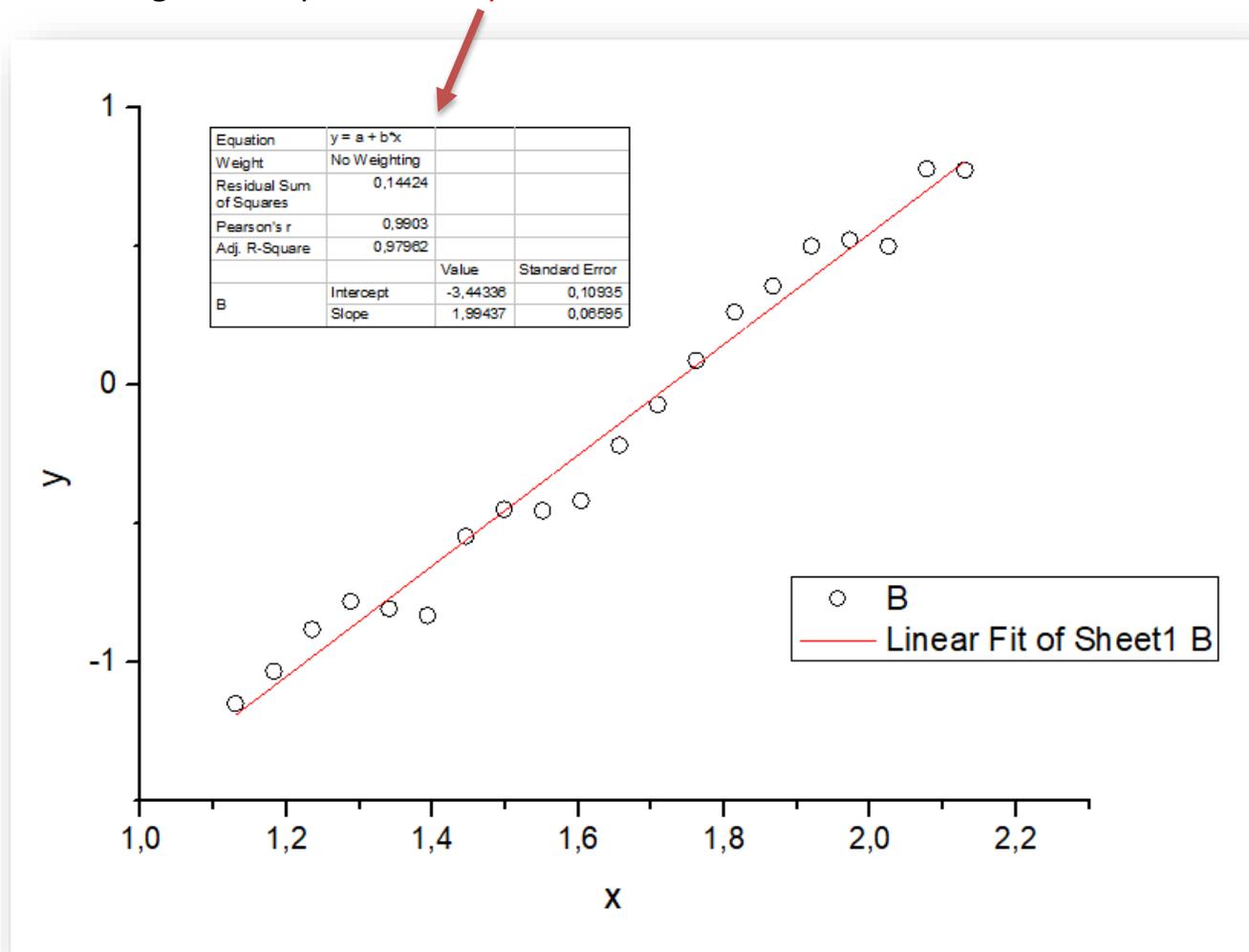
Residual Analysis

Regular
Standardized
Studentized

0.26244

Supongamos que quiero ajustar a un modelo lineal $y = a + b x$

En el gráfico aparece una parte de la información solicitada



La información está en una planilla del Book (donde están los datos) de Origin

¿ Qué es importante analizar ?

- ANOVA**
Ver que se dice del modelo. Es analizar la función de probabilidad F. Si $p < 0.05$ la probabilidad que la función ajuste bien es mayor del 95 %.
- Parámetros**
Se mira la función de probabilidad t. Si $p < 0.05$ la probabilidad que el parámetro sea significativo es mayor del 95 %.
- Coeficiente de regresión R^2**
Cuanto más próximo a 1 mucho mejor el ajuste
- χ^2_{ν} Chi-cuadrado reducido.** Se usa para analizar la bondad del ajuste.
 - $\chi^2_{\nu} \gg 1$ Modelo pobre para representar los datos
 - $\chi^2_{\nu} > 1$ El ajuste al modelo no logró capturar los datos, que subestimo la varianza del error
 - $\chi^2_{\nu} \sim 1$ La coincidencia entre observaciones y estimaciones está de acuerdo con la varianza del error
 - $\chi^2_{\nu} < 1$ El modelo está sobre-ajustando los datos. El modelo se ajusta incorrectamente al ruido o la varianza del error se ha sobreestimado.
- Distribución de los residuos**

1 Linear Fit (7/5/2021 11:14:31)

Notes

Input Data

Masked Data - Values Excluded from Computations

Bad Data (missing values) -- Values that are invalid and thus not used in computations

Parameters

		Value	Standard Error	t-Value	Prob> t
B	Intercept	-3,44336	0,10935	-31,48831	0
	Slope	1,99437	0,06595	30,23849	0

Statistics

	B
Number of Points	20
Degrees of Freedom	18
Reduced Chi-Sqr	0,00801
Residual Sum of Squares	0,14424
Pearson's r	0,9903
R-Square(COD)	0,98069
Adj. R-Square	0,97962
Root-MSE (SD)	0,08952

Summary

	Intercept		Slope		Statistics
	Value	Standard Error	Value	Standard Error	Adj. R-Square
B	-3,44336	0,10935	1,99437	0,06595	0,97962

ANOVA

	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	1	7,327	7,327	914,36602	1,11022E-16
B Error	18	0,14424	0,00801		
Total	19	7,47124			

At the 0.05 level, the slope is significantly different from zero.

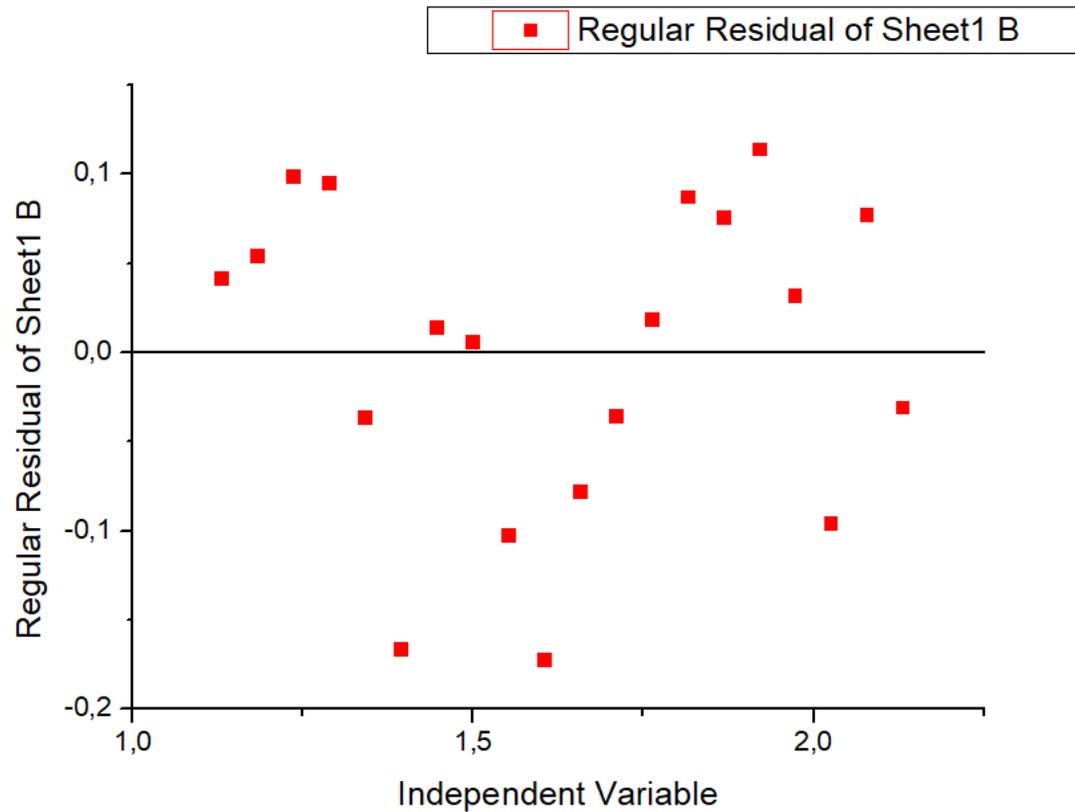
Fitted Curves Plot

Residual vs. Independent Plot

Annotations:

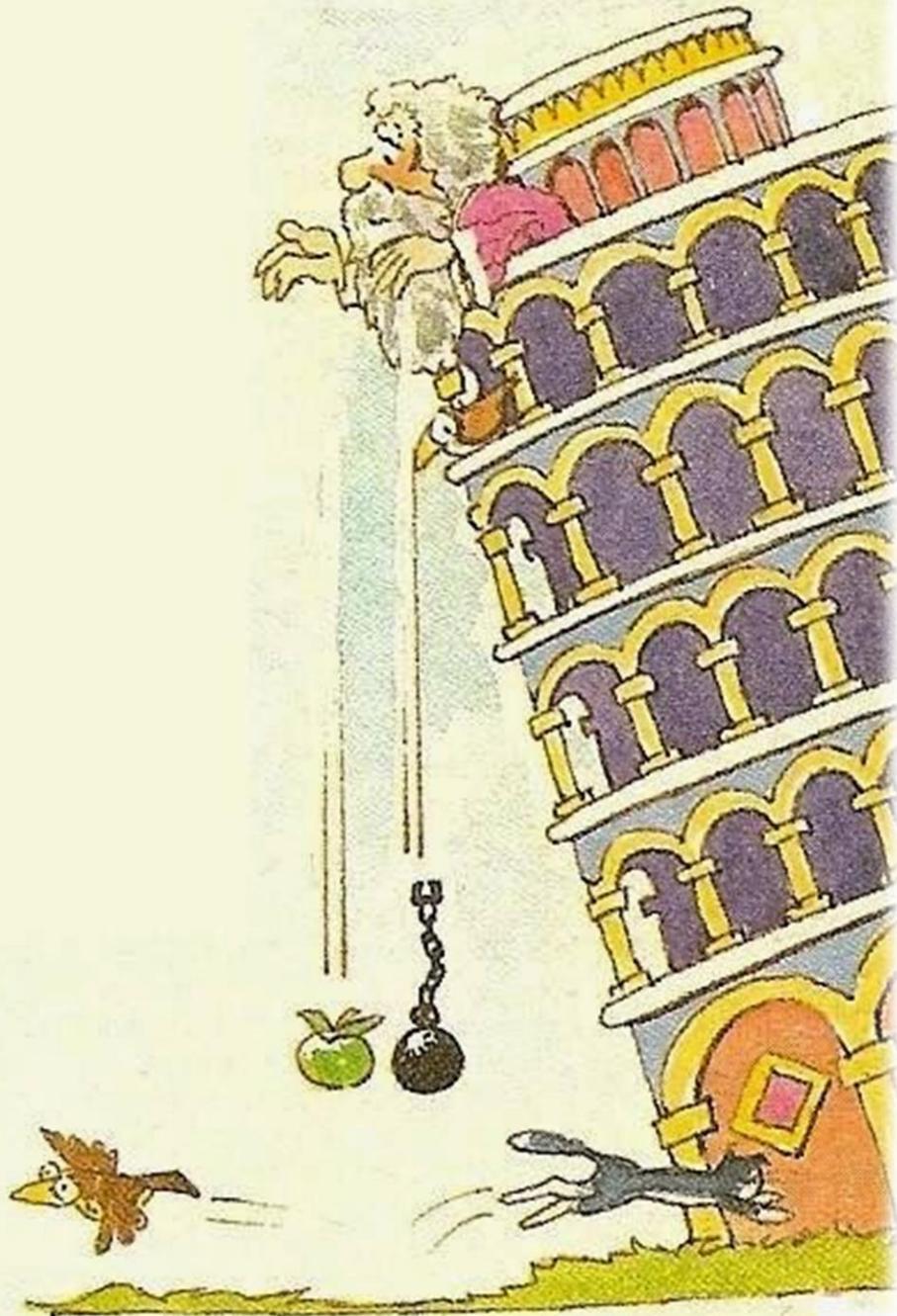
- Red arrow pointing to the t-value for the slope in the Parameters table: $t_b = \frac{b}{s_b}$
- Red arrow pointing to the R-Square value in the Statistics table.
- Red arrow pointing to the F-value in the ANOVA table.
- Red arrow pointing to the F-statistic formula: $F = \frac{ESS/(m-1)}{RSS/(n-m)}$

5. Distribución de los residuos



Observar que la distribución de los residuos sea normal alrededor del cero (mas o menos los puntos por encima y debajo sin tendencia)

¿ Se puede aplicar todo lo visto a una función que no sea la ecuación de la recta (por ejemplo polinómica) ?



Regresiones (repaso)

Mediciones indirectas III

Caída libre.

Estimación de la aceleración de la gravedad.

Tiro vertical



Caída libre → Movimiento de un cuerpo bajo la acción exclusiva de un campo gravitatorio

Caída real → Incluye las caídas reales influenciadas en mayor o menor medida por la resistencia aerodinámica del aire u otra que tenga lugar en el seno de un fluido

También se aplica a objetos en movimiento vertical ascendente sometidos a la acción de la gravedad (desaceleración).



Disparo o tiro vertical



Tanto en tiro vertical como en caída libre la aceleración es la de la gravedad



En la caída libre ideal

Se desprecia la resistencia aerodinámica que presenta el aire al movimiento del cuerpo, analizando lo que pasaría en el vacío.

La aceleración que adquiriría el cuerpo sería debida exclusivamente de la gravedad, siendo independiente de su masa

Si asumimos que no hay resistencia del aire podemos usar la ecuaciones conocidas del **Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado**.

La diferencia es que vamos a considerar la coordenada y en vez de x .

$$v = v_0 + at \xrightarrow{\text{aceleración}} v = v_0 + gt \xrightarrow{\text{aceleración de la gravedad}} v = gt$$

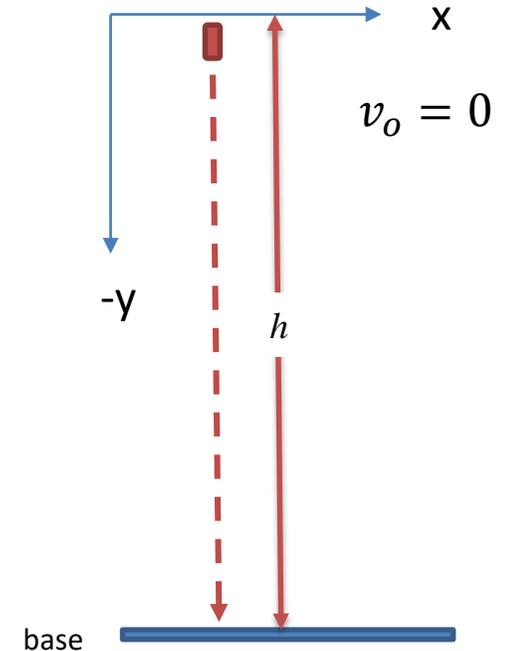
caída libre

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$$

$$h = \frac{1}{2}gt_h^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ay$$

Sale de la conservación de la energía



Que pasa si se aplica una fuerza para elevar el cuerpo y luego cae

$$v^2 = v_0^2 + 2ay$$

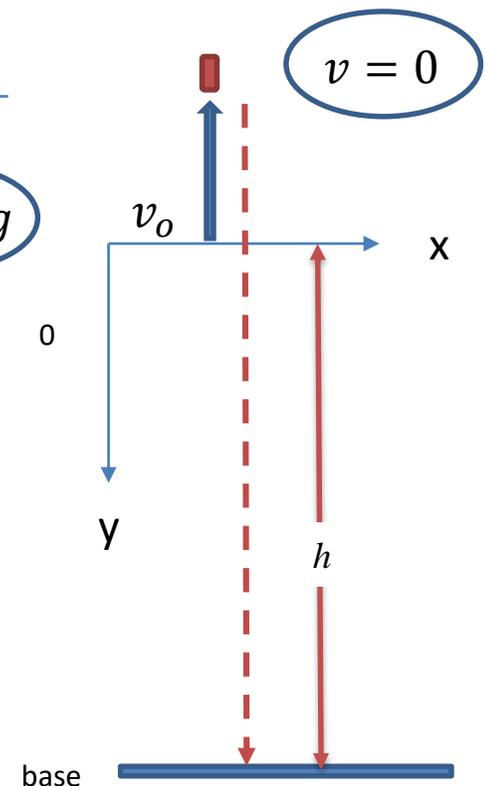


$$0 = v_0^2 - 2gy$$

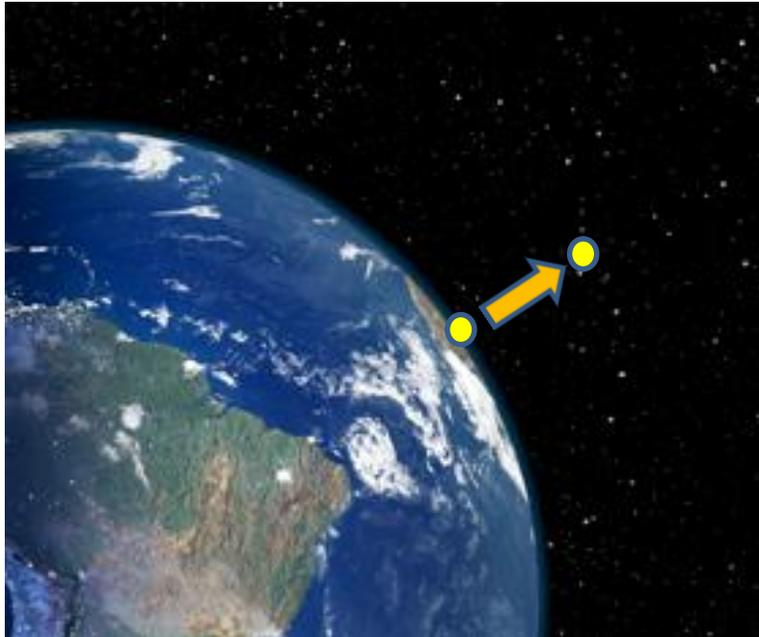
$$y = \frac{v_0^2}{2g}$$

Distancia recorrida

$$a = -g$$



Si aumento la velocidad aumenta la distancia recorrida
La velocidad a la cual se escapa de la atracción gravitacional de la Tierra es la velocidad de escape v_{esc}



$$EC = \frac{1}{2}mv^2$$

$$EP = -\frac{GMm}{R}$$

$$ET = E_1 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R}$$

A una distancia infinita de la Tierra

$$EC = 0$$

$$EP = -\frac{GMm}{\infty} = 0$$

$$ET = E_2 = 0$$

Por Conservación de Energía

$$E_1 = E_2 \implies 0 = \frac{1}{2}mv_{esc}^2 - \frac{GMm}{R}$$



$$v_{esc}^2 = \frac{2GM}{R}$$

$$v_{esp} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

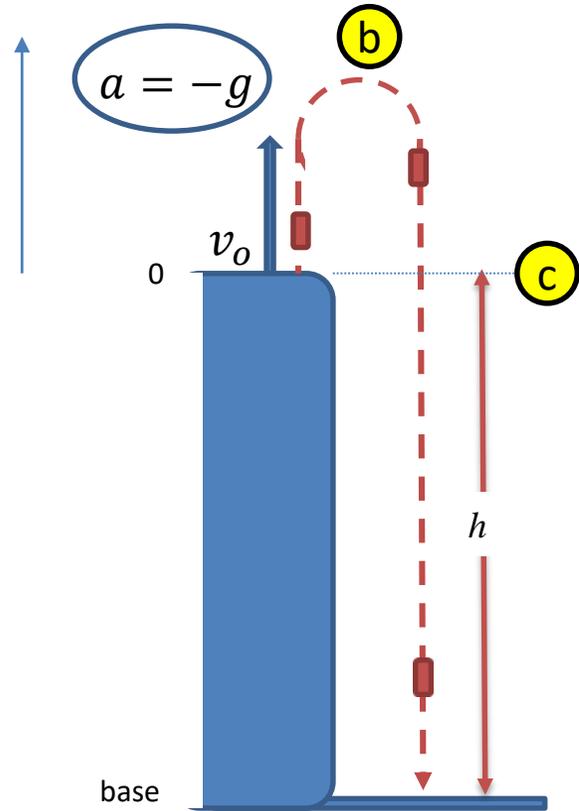
$$g = \frac{GM}{R^2}$$

$$v_{esp} = \sqrt{2gR}$$

$$v_{esp} = 11.2 \text{ km/s}$$

$$R \approx 6400 \text{ km}$$

Que pasa si se aplica una fuerza para elevar el cuerpo y luego cae



b $v = 0$

c $v = -v_0$

$$v = -v_0 + gt$$

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$-h = -v_0 t_b + \frac{1}{2} g t_b^2$$

Preguntas

¿Cuál es la altura máxima ?

¿Cual es la velocidad en puntos extremos ?

¿Cual es la aceleración ?

¿Cuanto tiempo se tarde en alcanzar la altura máxima y el fondo ?

Trabajo Práctico N° 3. Parte A

- Estudiar el fenómeno de caída libre.
- Se filmará la caída de un objeto desde una cierta altura y se analizará el video usando Tracker.

<https://www.youtube.com/watch?v=3iABAnaeQ3M>

- Pensar que objeto conviene usar.
- Con la información obtenida, se debe graficar la trayectoria en función del tiempo, verificar si se cumplen las ecuaciones de trayectoria en caída libre.

Estimar la aceleración de la gravedad g .

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

- Realizar la experiencia por lo menos 4 veces desde la misma altura. Considerar la propagación de errores.
- Utilizando regresión por cuadrados mínimos calcular g (considerando alturas diferente)

$$h = \frac{1}{2} g t_h^2$$

- Hacer la experiencia lanzando el objeto hacia arriba (tratar de mantener la vertical) y analizar los resultados. Solo la ecuación de movimiento. Estimar la velocidad inicial.

A