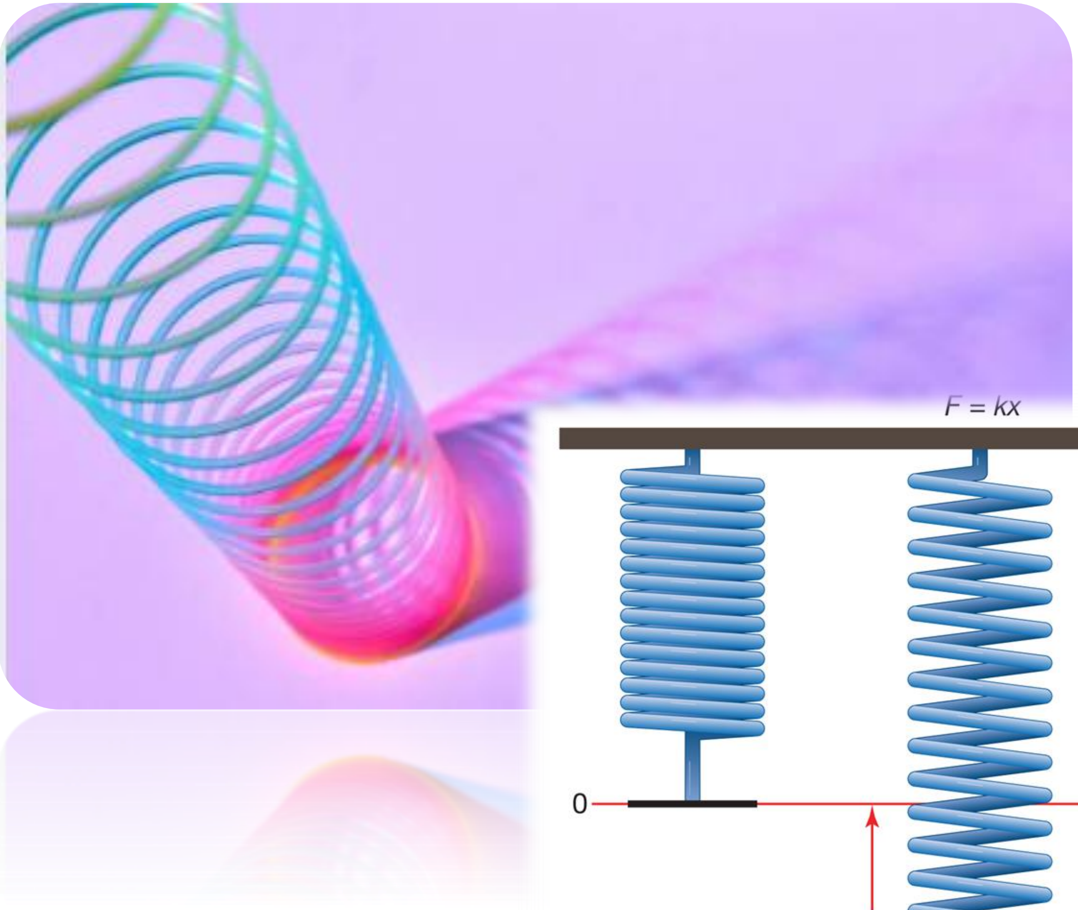
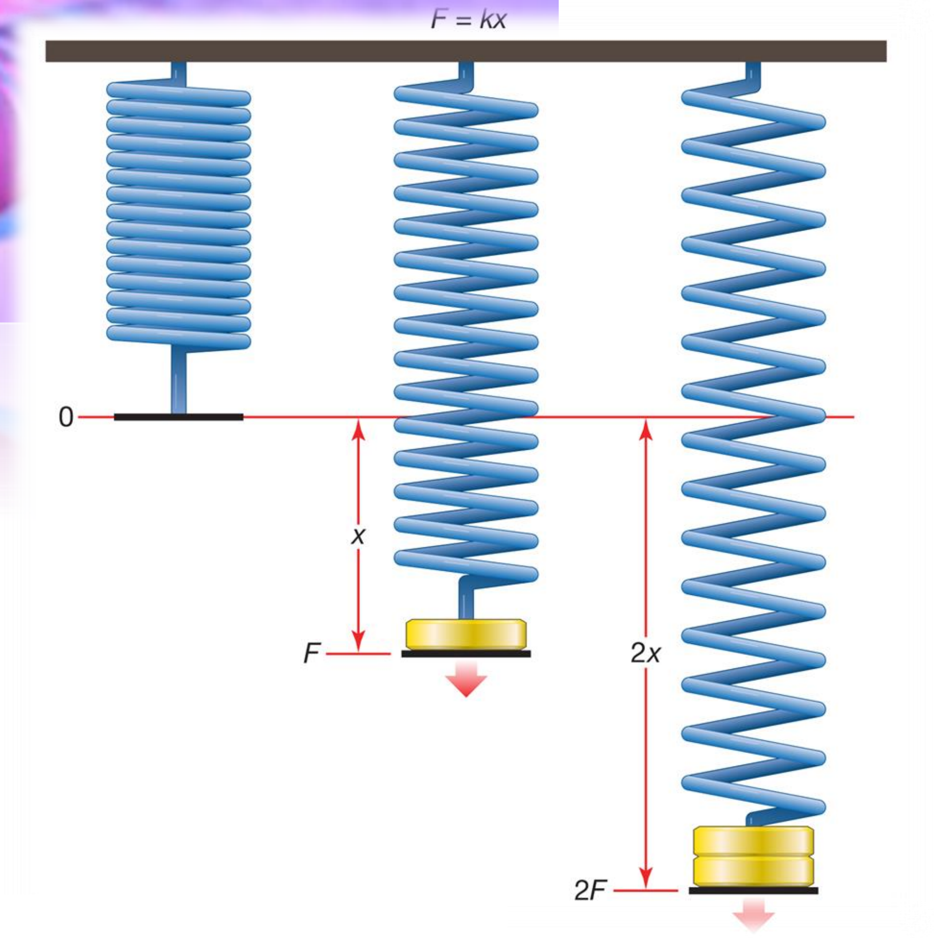
Laboratorio 1
Turno C

Clase 8
Elasticidad
Movimiento oscilatorio
(5/06/2021)



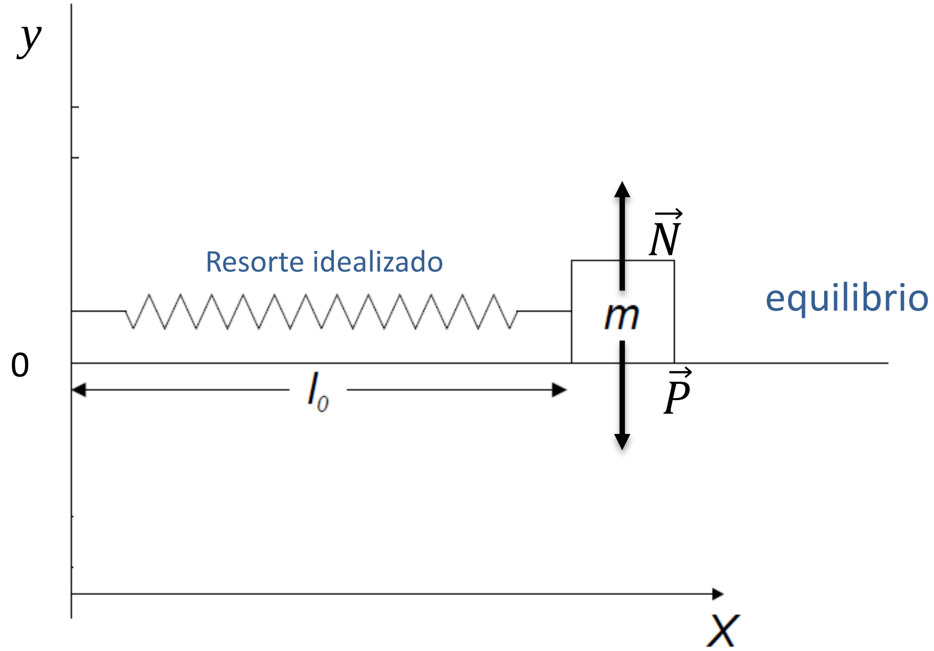


- Vamos a estudiar el movimiento oscilatorio de un sistema simple, compuesto por un resorte y una masa.
- Mediremos la fuerza restitutiva del resorte, y la posición de la masa acoplada.
- Analizaremos los resultados para determinar características del resorte.
- Poniendo el sistema en oscilación estudiaremos la dependencia de la frecuencia de oscilación con la masa.
- Analizaremos el fenómeno de la elasticidad.

Sistema Masa - Resorte

Hipótesis
- ✓ Movimiento unidireccional
- ✓ Ausencia de rozamiento
- ✓ Resorte ideal ⇒ Perfectamente elástico; Sin masa

Robert Hooke
28 julio 1635–3 marzo 1703



Fuerza elástica

$$\boxed{\vec{F} = -k(x - l_o)\,\hat{\imath}}$$

Ley de Hooke

$$k = \frac{[N]}{[m]}$$

Constante elástica

2da Ley de Newton:

$$\hat{\jmath}\ \begin{cases} m\,\ddot{y} = N - P \\ \ddot{y} = 0 \Rightarrow N = P \end{cases}$$

$$\hat{\imath}\ \big\{\ m\,\ddot{x} = -k(x - l_0)$$

$$m\,\ddot{x} = -k(x - l_0)$$

Reordenando queda: $m\,\ddot{x} + k(x - l_0) = 0$ ➡ $\ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = \dfrac{k\,l_0}{m}$

Esto es una ecuación diferencial:
- Ordinaria
- Lineal
- Coeficientes Constantes
- No homogénea
- Orden 2

La teoría nos dice que la solución es de la forma: $x(t) = x_H(t) + x_P(t)$

Solución particular

$$\boxed{\ddot{x}_H + \frac{k}{m}x_H = 0}$$

Solución de la ecuación homogénea

Necesitamos dos soluciones linealmente independientes.

Proponemos $B\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)$ y $C\cos(\omega_0 t)$. Ambas son soluciones si $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$

➡ $\boxed{x_H(t) = B\,\mathrm{sen}(\omega_0 t) + C\cos(\omega_0 t)}$

Como solución particular buscamos algo de la forma de la inhomogeneidad.

Proponiendo una constante, se llega a: $x_P(t) = l_0$

Usando identidades trigonométricas:

$$B\,\mathrm{sen}(\omega_0 t) + C\cos(\omega_0 t) = A\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \varphi)$$

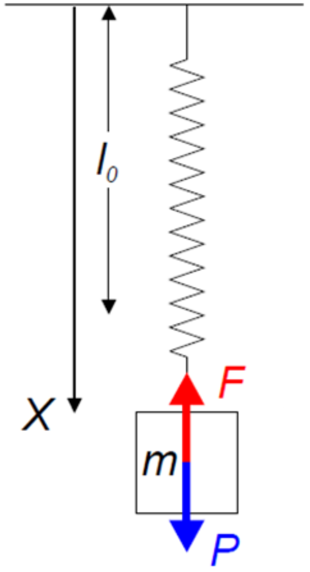
$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Solución más general:} \quad x(t) = l_0 + A\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \varphi)}$

¿De dónde salen las constantes A y φ?

$$\left.\begin{aligned} x(t=0) &= l_0 + A\,\mathrm{sen}(\varphi) \\ x'(t=0) &= l_0 - \omega_0 A\cos(\varphi) \end{aligned}\right\} \quad \text{Dos ecuaciones con dos incógnitas.}$$

No es un sistema lineal pero siempre se puede despejar.

Si ahora consideramos que el resorte cuelga de un punto fijo:



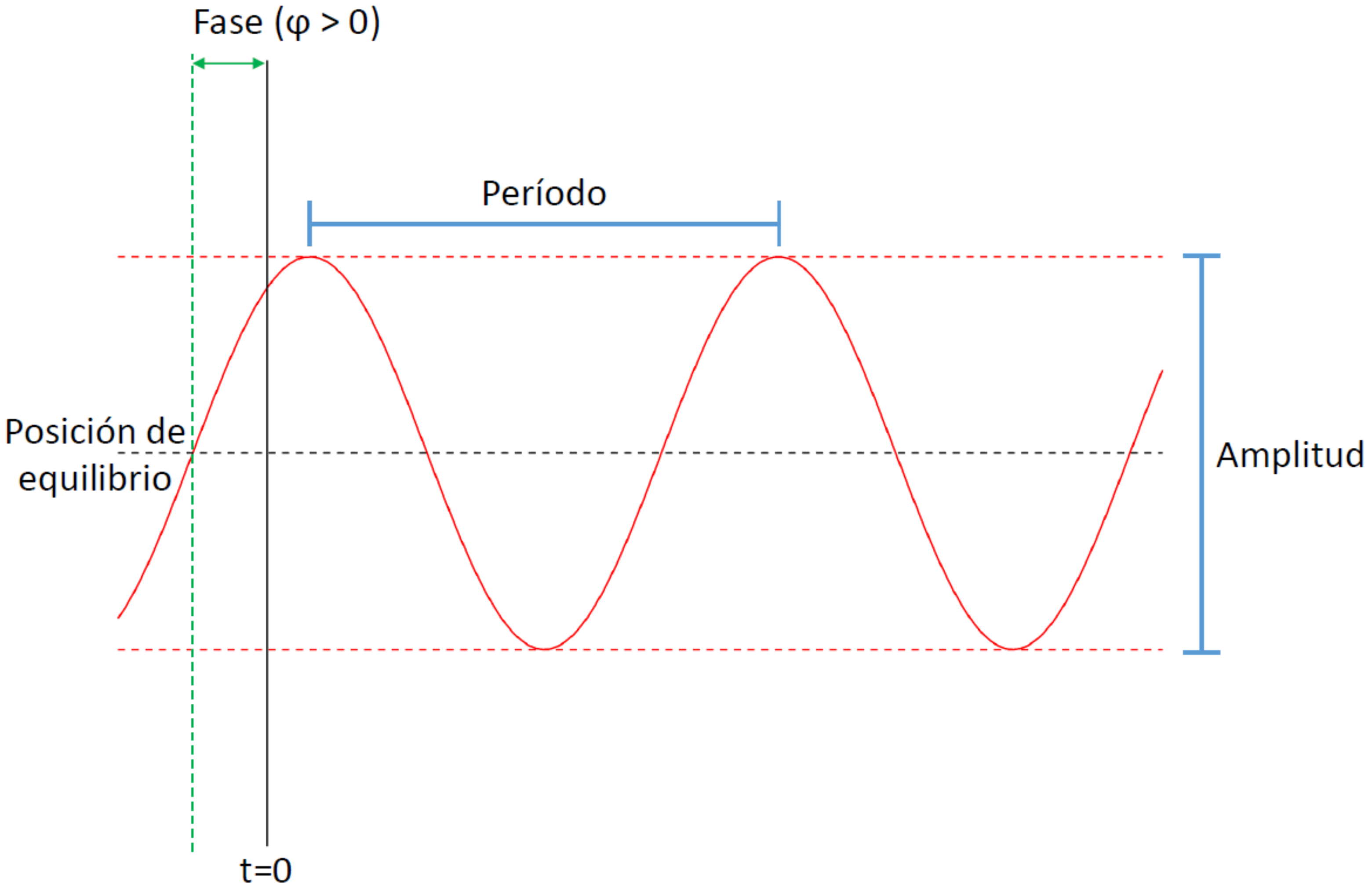
$$m\,\ddot{x} = -k(x - l_0) + m\,g$$

Lo único que cambia es la inhomogeneidad

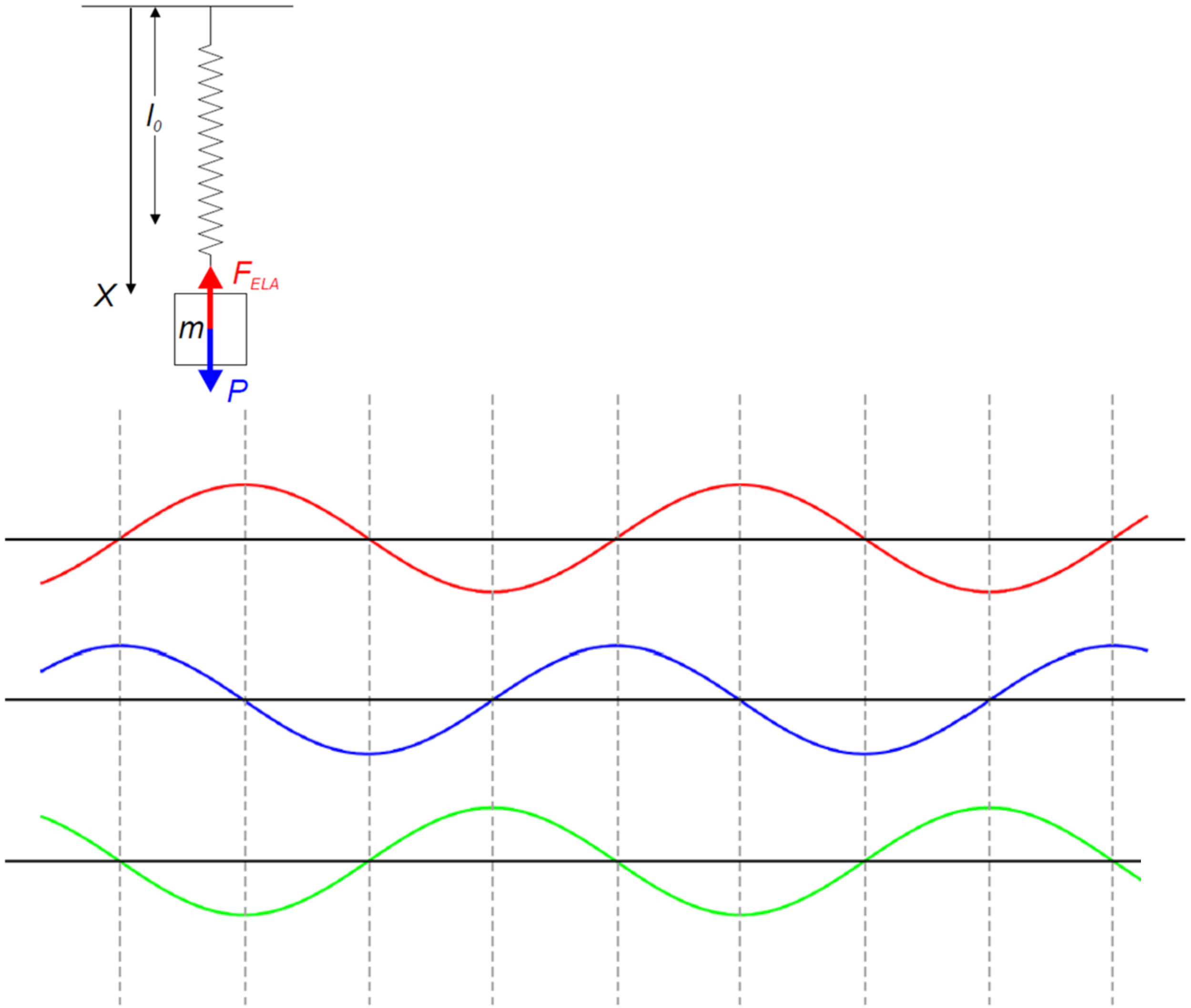
Por lo tanto, solo se modifica la solución particular

$$x_P(t) = l_0 + \frac{mg}{k}$$

$$\boxed{x(t) = l_0 + \frac{mg}{k} + A\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \varphi)}$$



Fase (φ > 0)
Período
Posición de
equilibrio
Amplitud
t=0



Posición: $$x(t) = \boxed{l_0 + \frac{mg}{k} + A\ \mathrm{sen}(\omega_0 t + \varphi)}$$

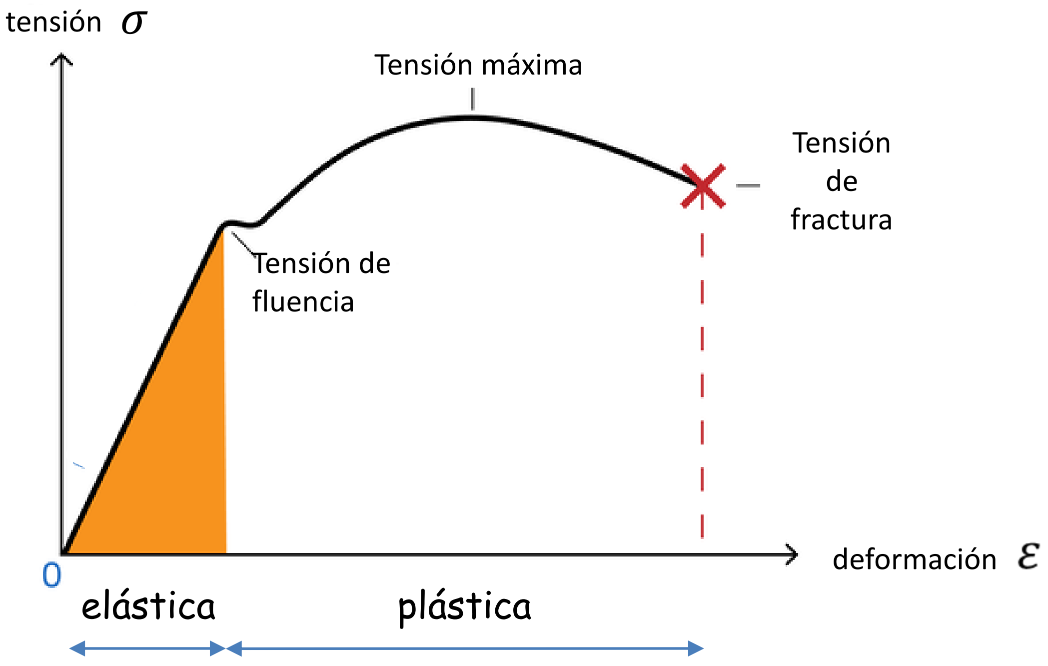
Velocidad: $$x'(t) = A\,\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Fuerza: $$F = -k(x - l_0)$$

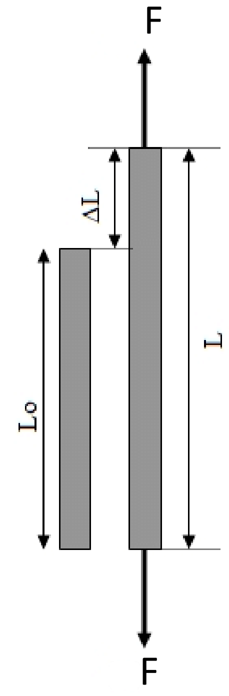
$$= -mg - k\,A\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \varphi)$$

Elasticidad

- ✓ Un material sometido a una tensión mecánica se deforma.
- ✓ La relación entre la tensión y la deformación depende del tipo de material.



Típica para metales/aleaciones



$$\sigma = \frac{F}{A}$$

A_o inicial

A instantánea

$$\varepsilon = \frac{(L - L_o)}{L_o} = \frac{\Delta L}{L_o}$$

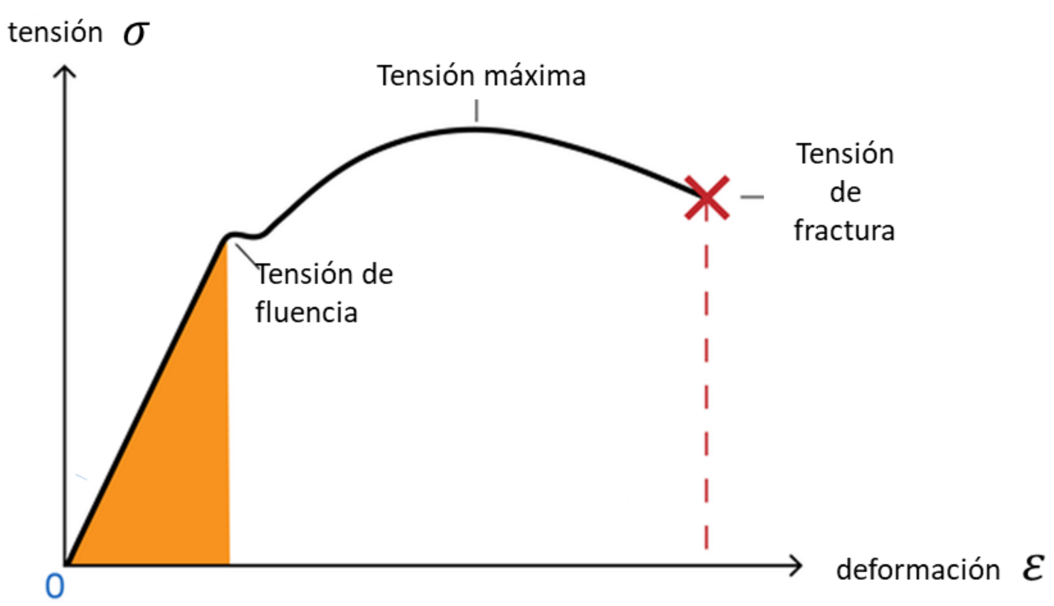
$$\varepsilon = ln(L/L_o) \longrightarrow$$ Deformación plástica

En la zona elástica (reversible) se define el módulo de Young *E* como

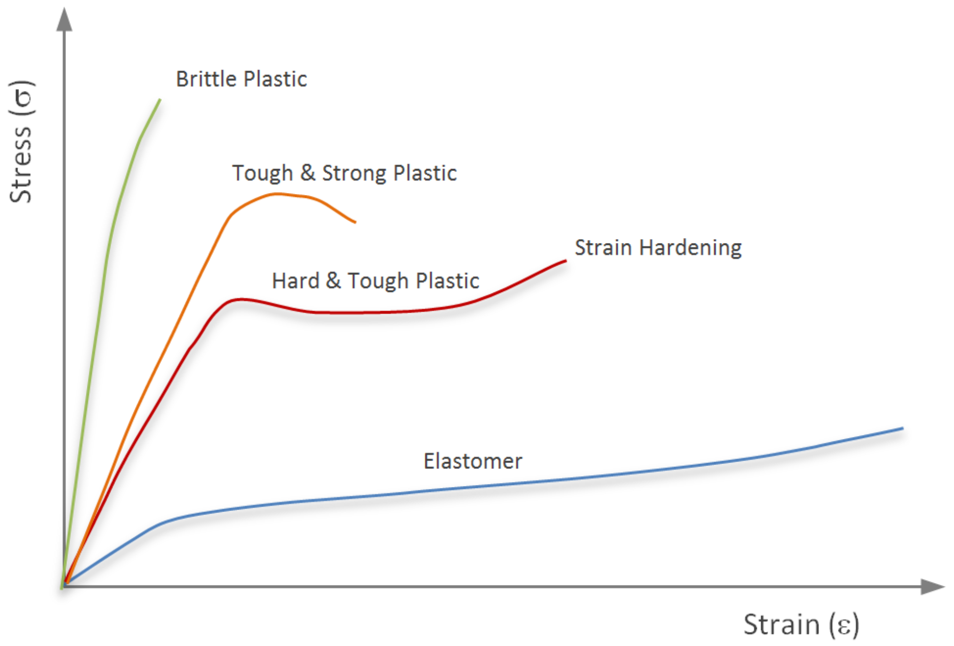
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \longrightarrow \sigma = E\varepsilon \longrightarrow \frac{F}{A} = E\frac{\Delta L}{L_o}$$

$$F = \boxed{\frac{EA}{L_o}}\Delta L$$

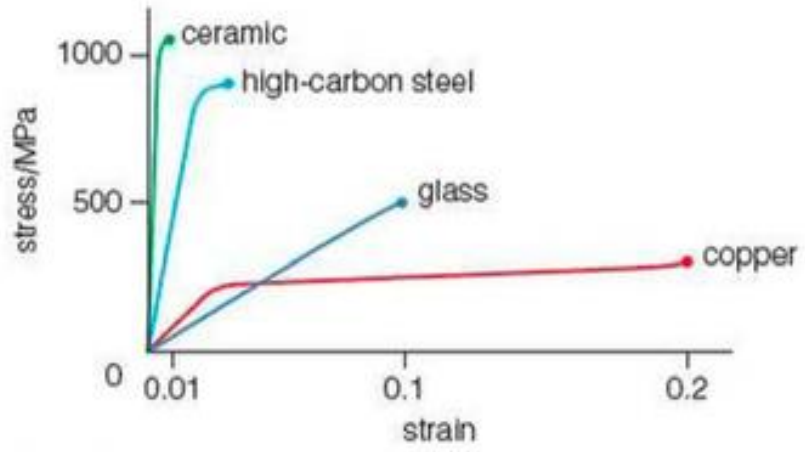
$\longrightarrow k$ Constante elástica



Metales/aleaciones



Polímeros



Comparación con cerámicos

¿ Qué es un resorte ?

Es un elemento elástico capaz de almacenar energía y desprenderse de ella sin sufrir deformación permanente cuando cesan las fuerzas o la tensión a las que es sometido.

Se fabrican con una gran diversidad de formas y dimensiones.

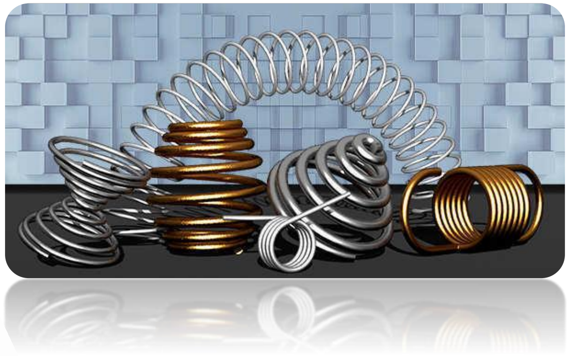
Materiales muy diversos

- ✓ Aceros
  - Aceros al carbono
  - Aceros inoxidable
  - Aceros tipo cromo-silicio
  - Aceros tipo cromo-vanadio
- ✓ Bronces
- ✓ Plásticos
- ✓ Elastómeros

Clasificación por forma (metálicos, plásticos)

<u>Planos</u>: formados a partir de láminas metálicas planas

<u>Espirales</u>: formados al enrollar sobre sí misma una larga cinta metálica, cuyo diámetro va creciendo a medida que aumenta su número de vueltas.



<u>Helicoidales</u>: Consisten en bobinas de alambre que forman una hélice arrollada alrededor de un cilindro (u otra forma de revolución).
Trabajan al variar la separación entre sus espiras.

<u>De torsión</u>: Elementos capaces de adquirir una torsión reversible cuando se les aplica un momento de giro.

<u>Clips</u>: Elementos cuya forma no se corresponde con los patrones anteriores, aunque pueden combinar los comportamientos elásticos de algunos de ellos.

Elementos elásticos mecánicos – Resorte helicoidal

En este tipo de resorte (tal vez el más usual) la constante del resorte se relaciona con la geometría y el tipo de material como :

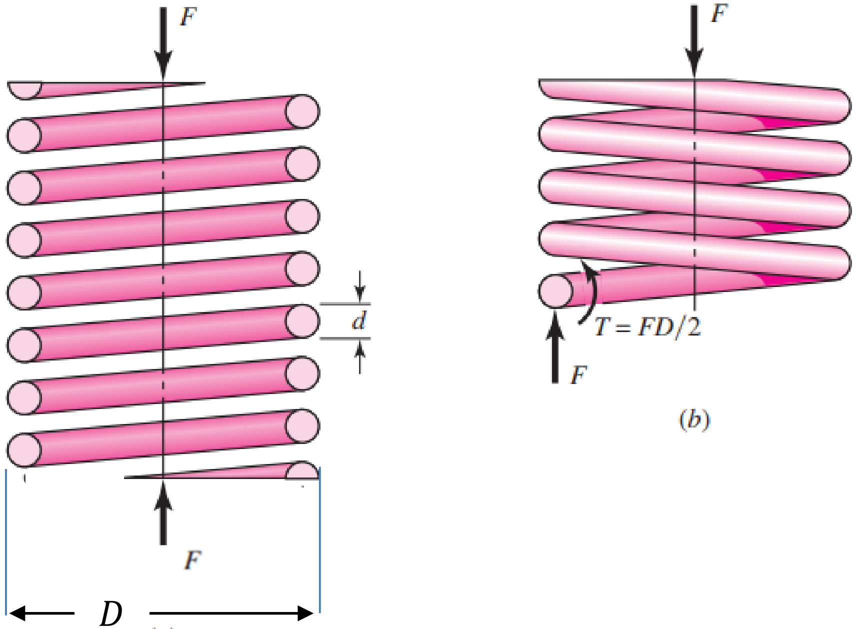
Módulo de corte del material

Número de espiras

$$k = \frac{Gd^4}{8(D-d)^3 N}.$$

Diámetro externo de la hélice

Diámetro del material

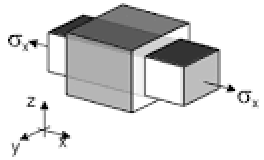


(a) (b)

Material isótropo y homogéneo

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Coeficiente de Poisson



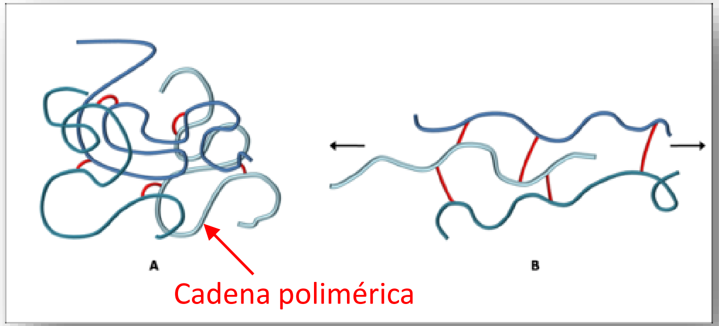
$$\nu = -\frac{\varepsilon_{transversal}}{\varepsilon_{axial}}$$

$$\boxed{k = \frac{Ed^4}{16(1+\nu)(D-d)^3 N}} \longrightarrow k = f(geometría)\frac{E}{(1+\nu)}$$

Elasticidad no Hookoniana

Los elastómero son polímeros de alto peso molecular (cadena poliméricas muy extensas)

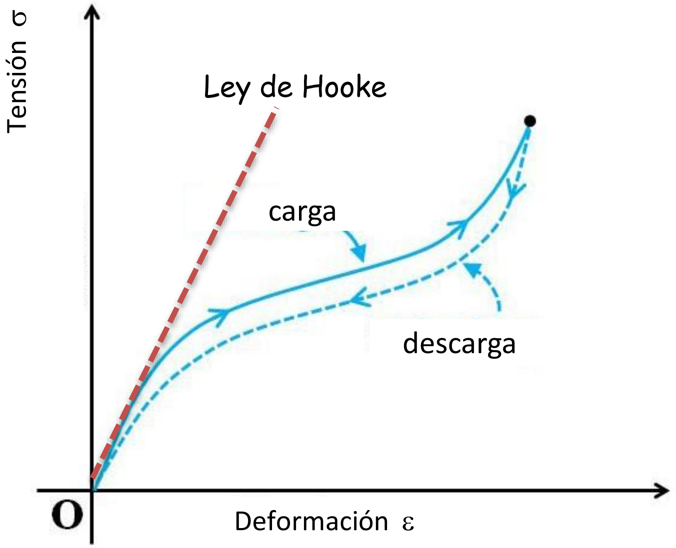
Se pueden lograr altas deformaciones elásticas con materiales elastoméricos.

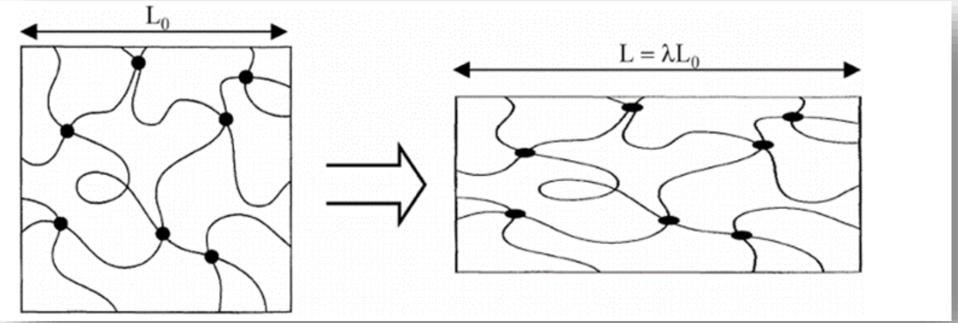


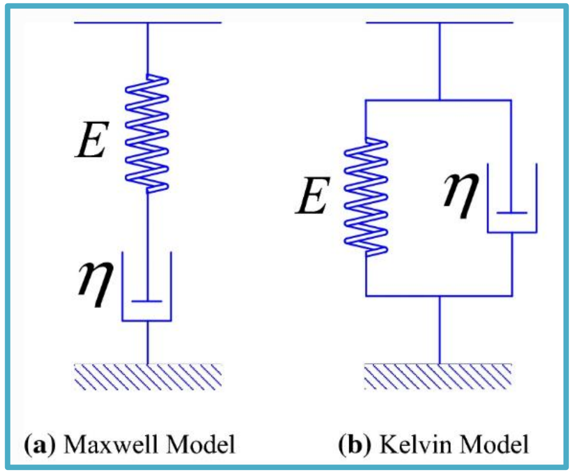
No responden a la ley de Hooke

$$\varepsilon = \frac{(L-L_o)}{L_o} = \frac{\Delta L}{L_o} \longrightarrow \varepsilon = \frac{(L-L_o)}{L_o} = \frac{L}{L_o} - 1$$

$$\varepsilon = \lambda - 1 \qquad \lambda = \frac{L}{L_o} \qquad \varepsilon \to 0 \Rightarrow \lambda \to 1$$







Modelos simples

$\sigma = f(\varepsilon) \longrightarrow$ Relación no lineal con respuesta elástica

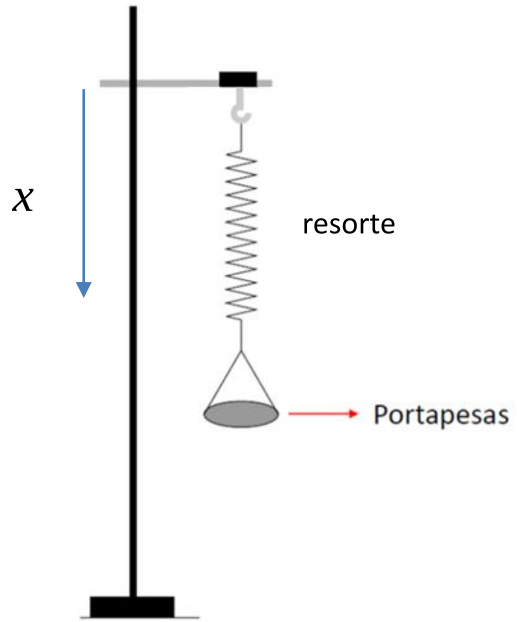
¿ Area bajo la curva ?

$$\sigma = 2\left(C_1 + \frac{C_2}{\lambda}\right)\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)$$

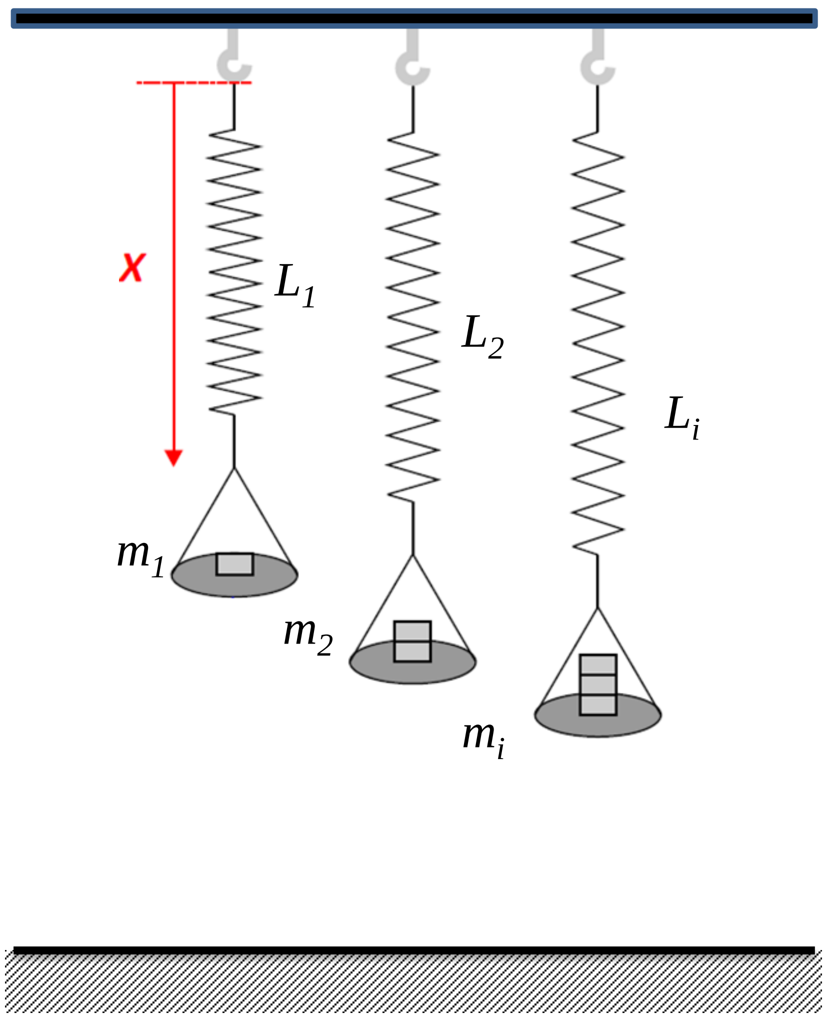
Ecuación de Mooney-Rivlin (deformación axial)

Trabajo Práctico N° 4 – Parte A

- Obtener el coeficiente elástico de un resorte con un Método Estático.
- Armar un dispositivo como el de la figura.
- Un resorte que pueda estirarse con el peso de algunas monedas (resorte blando).
- Si no poseen el resorte en su casa, también puede utilizarse el espiral del lomo de un cuaderno o una banda elástica resistente.
- Algunos objetos que se usan como peso (debemos conocer su peso previamente).
- Un objeto que se usa como portapesas (pesarlo previamente).
- Balanza de cocina (digital).
- Celular, cinta métrica, regla, programa Image J.



L_o = *longitud inicial del resorte (sin carga)*



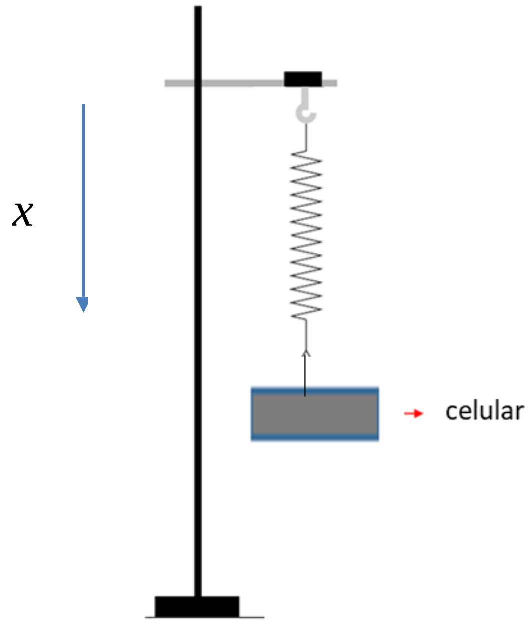
- Mida la longitud del resorte para al menos 7 pesos diferentes. El peso más grande que utilice debe ser de al menos el peso del celular.
- Elija la forma de medir esas longitudes y estime los errores.
- Construya el gráfico de Peso vs elongación del resorte.
- Utilizando la ley de Hooke

$$F = -k\Delta x$$

obtenga, utilizando una regresión por cuadrados mínimos, el valor de la constante elástica del resorte.

Trabajo Práctico N° 4 – Parte B

- Obtener el coeficiente elástico de un resorte con un Método Dinámico.
- Usar el mismo dispositivo que en el caso estático. El celular es parte del sistema.
- Se elongará el sistema hasta una nueva posición de equilibrio. El teléfono debe tener activada la App Phyphox en su modo Aceleración con g (se recomienda activar el modo remoto previamente para agilizar el proceso de toma de datos).
- Se procede a poner a oscilar el sistema y lectura del sensor de aceleración en función del tiempo. Verificar que ese trate de un sistema en pequeñas oscilaciones.
- Realice este procedimiento para 5 pesos distintos.

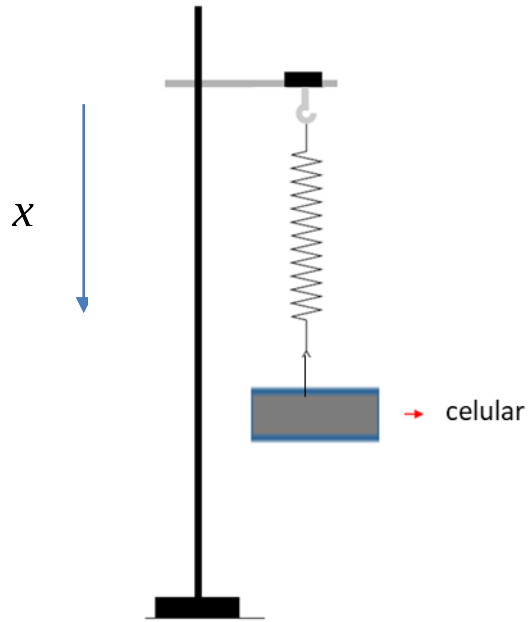


Trabajo Práctico N° 4 – Parte B

- Una vez registrada la oscilación en función del tiempo, estudie la dependencia de la frecuencia ω_O con la masa.

$$\omega_o^2 = \frac{k}{m}$$

- ¿Cómo debería graficar estas variables para obtener una relación lineal?
- ¿Cuál es la variable con mayor incertidumbre relativa?
- Determine la constante elástica del resorte y su incertidumbre por este método. Compare con el valor obtenido por el método estático.
- A partir de sus mediciones, evalúe si el sistema estudiado verifica la ecuación de movimiento propuesta.



¿ PREGUNTAS ?