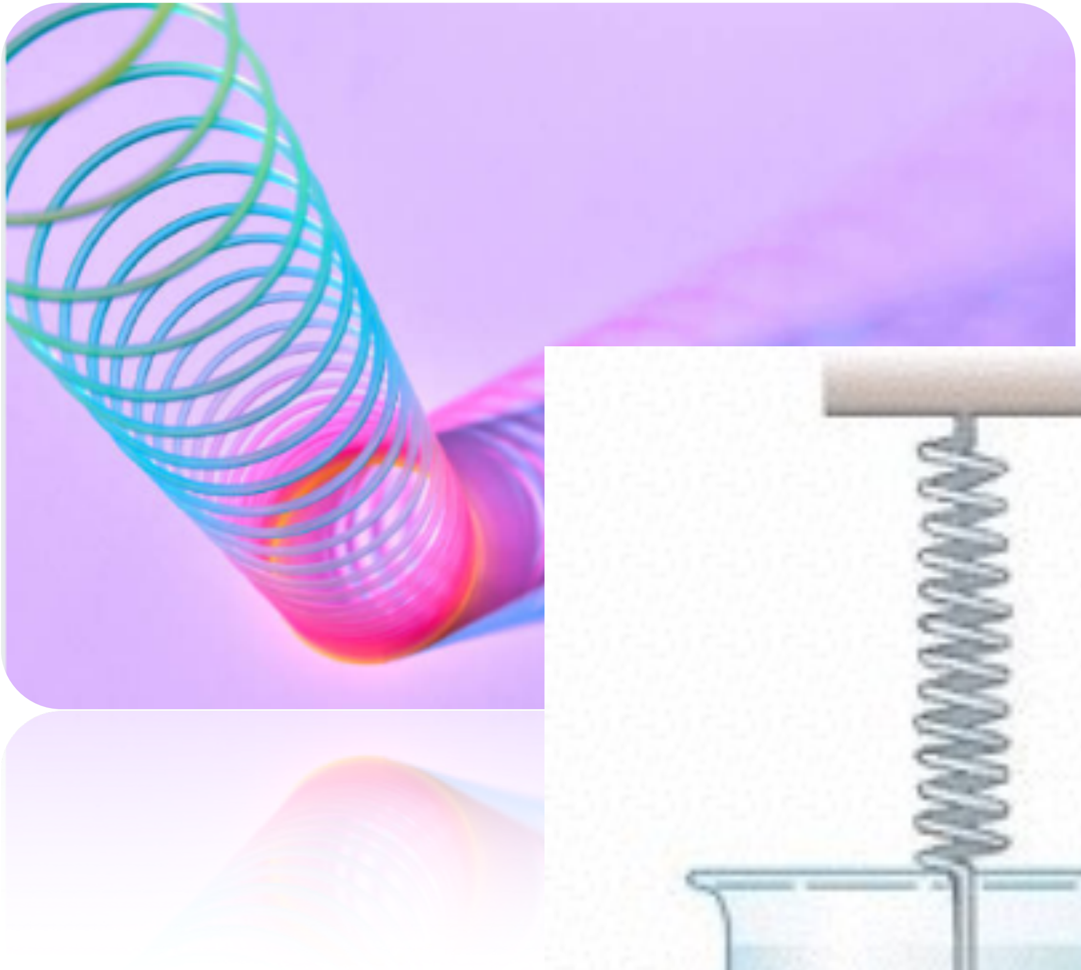
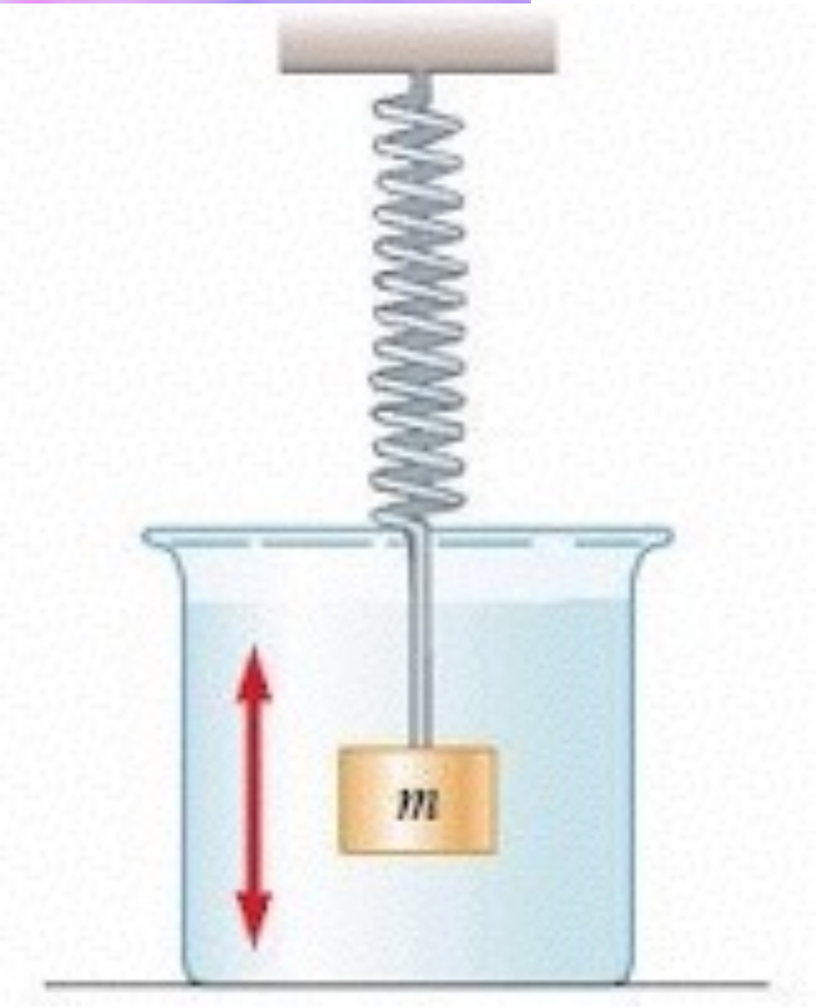
Laboratorio 1
Turno C

Clase 8

Movimiento oscilatorio amortiguado

(12/06/2021)





- Complementando la última clase, vamos a estudiar el movimiento oscilatorio amortiguado de un sistema simple, compuesto por un resorte y una masa.

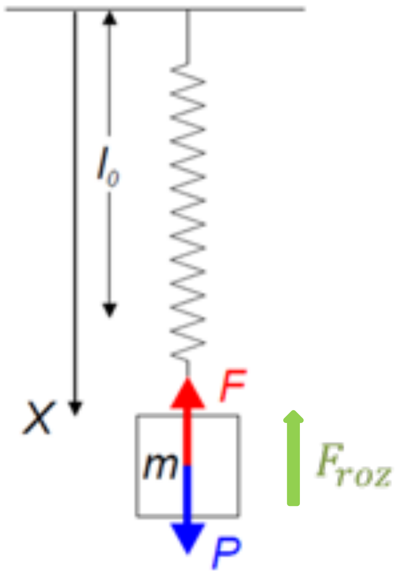
- Poniendo el sistema en oscilación estudiaremos la dependencia del sistema si existe una fuerza de fricción o rozamiento que se opone al movimiento.

Oscilaciones amortiguadas

Consideremos que sobre el sistema masa- resorte actúa una fuerza que intenta frenar el movimiento.

Supongamos esa fuerza de la forma

$$F_{roz} = -b\dot{x}$$



Aplicando la 2da Ley de Newton

$$m\ddot{x} = mg - k(x - l_o) - b\dot{x}$$

reagrupando

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = g + \frac{kl_o}{m}$$

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t)$$

La solución particular planteada en la clase anterior sigue valiendo

$$x_P(t) = l_o + \frac{mg}{k}$$

La ecuación homogénea tomo la forma

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Longrightarrow$$

Se propone la solución $x_H(t) = A\ exp(-\gamma t)$

$$\gamma^2 - \frac{b}{m}\gamma + \frac{k}{m} = 0 \Longrightarrow \gamma_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

$$x_H(t) = A\,exp(-\gamma t) \qquad \gamma_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} \quad \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4mk} \quad \gamma_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2m}$$

Δ

$\neq 0$

Hay dos soluciones diferentes $\quad x_H(t) = B\,exp(-\gamma_1 t) + C\,exp(-\gamma_2 t)$

$\Delta > 0$ → Exponenciales reales → Caso sobre-amortiguado

$\Delta < 0$ → Exponenciales complejas → Caso sub-amortiguado

$$x_H(t) = A\,exp(-\gamma t)\,sen(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2} \qquad \omega_o^2 = \frac{k}{m}$$

$= 0$

$$\gamma = \frac{b}{2m}$$

$\Delta = b^2 - 4mk = 0$ → $4mk = b^2$

$$\omega_o^2 = \gamma^2$$

Hay dos soluciones diferentes $x_H(t) = B\ exp(-\gamma_1 t) + C\ exp(-\gamma_2 t)$ Dos constantes ajustables B y C

Si $\Delta = 0$ $\longrightarrow$ $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ Planteando condiciones iniciales

$$\begin{cases} x_H(0) = 0 \\ dx_H/dt\,(0) = 0 \end{cases}$$

Se puede demostrar que en ese caso es solución

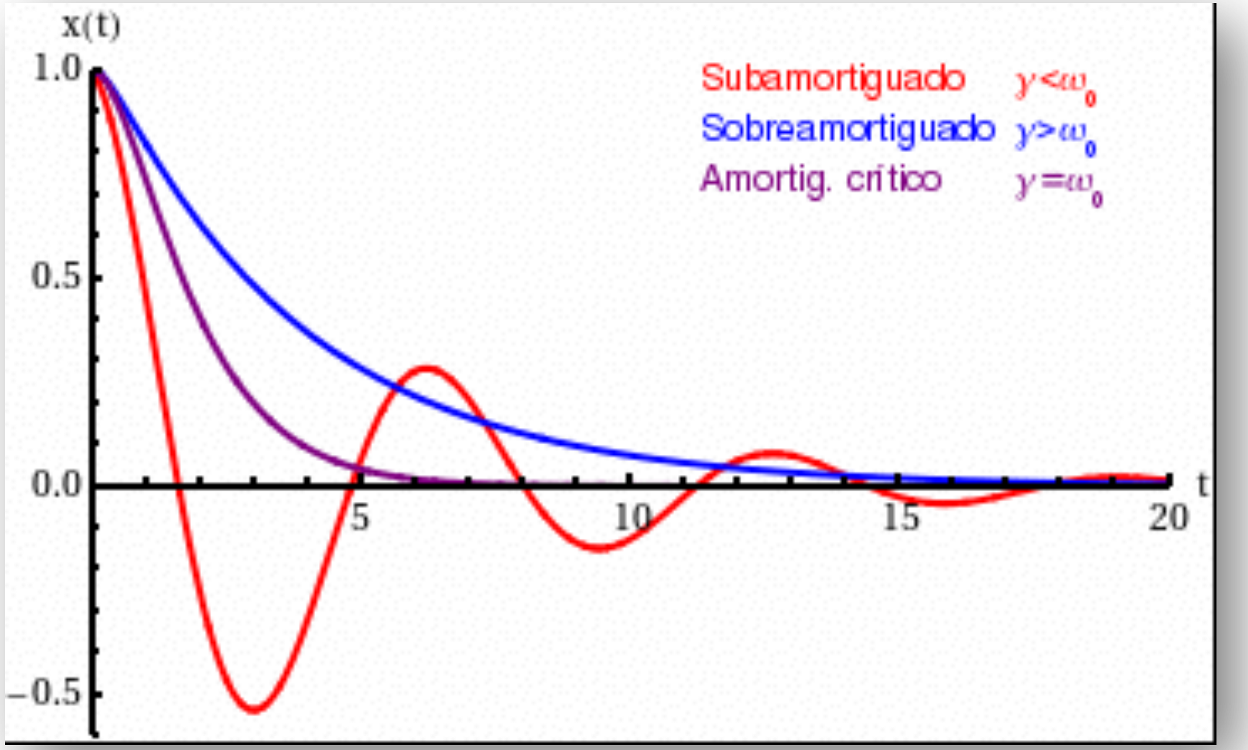
$$x_H = A\ exp\,(-\gamma t) + B\ t\ exp\,(-\gamma t)$$

Amortiguamiento crítico

En sistemas mecánicos reales esta condición se busca ex-profeso.

Si se aplica a un sistema en reposo bruscamente una fuerza constante, esta será seguida de una suave aproximación a la nueva posición de equilibrio

(desplazada de la anterior **sin oscilaciones**).



$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

(angular frequency)

$$2\beta = \frac{b}{m}$$

(decay const.)

$$\gamma = \frac{b}{2m}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2}$$

Determinación de parámetros mediante un ajuste no lineal

Supongamos que medimos x(t).

Queremos ajustar los N datos experimentales (t_i , x_i) a la función :

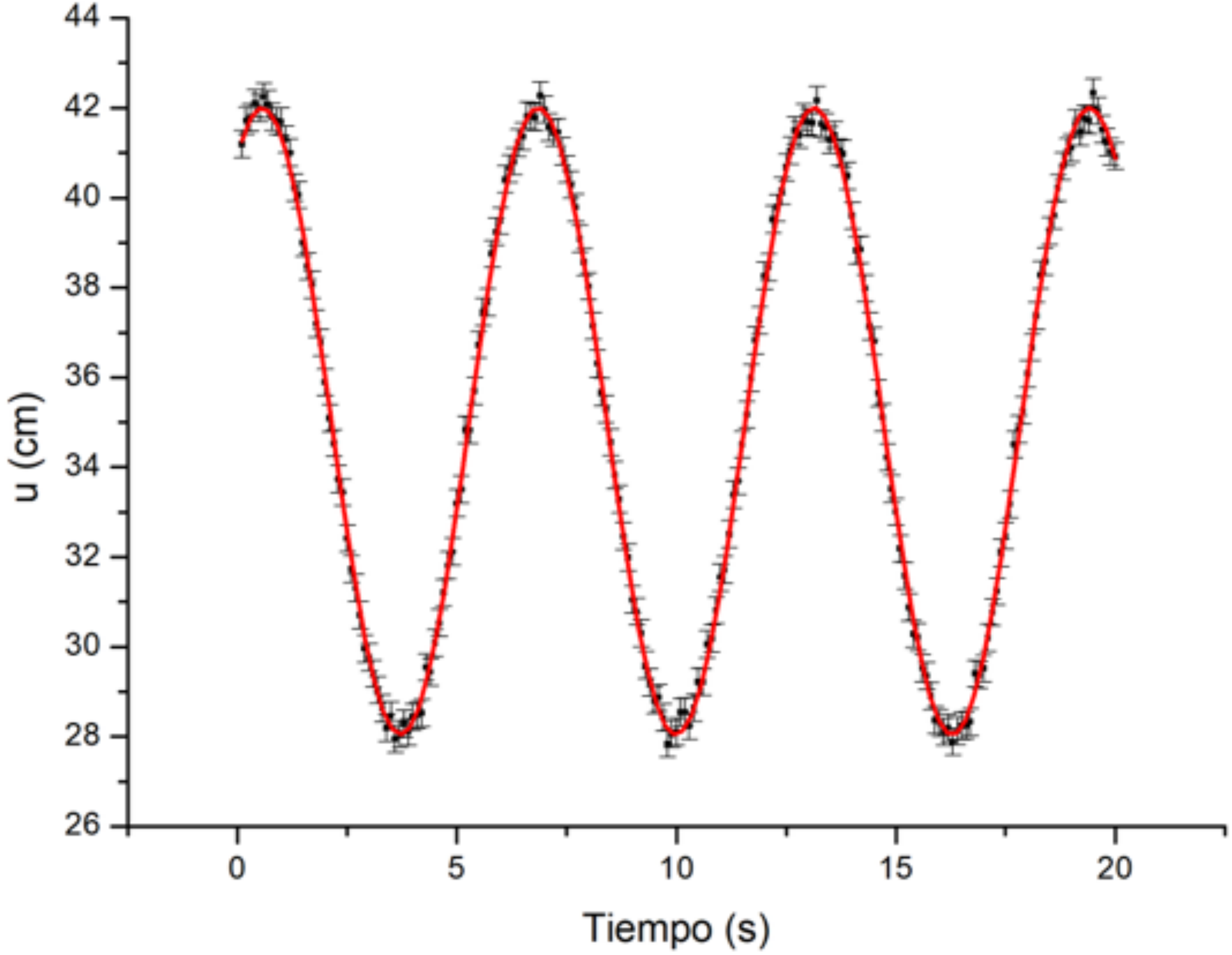
$$x(t) = C + A\, sen(\omega\, t + \varphi)$$

y obtener los parámetros C,A, ω y φ. Se debe minimizar la función

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{x_i - \left(C + Asen(\omega t_i + \varphi)\right)}{\sigma_i} \right]^2$$

En este caso hay una dependencia no lineal de los parámetros ω y φ.

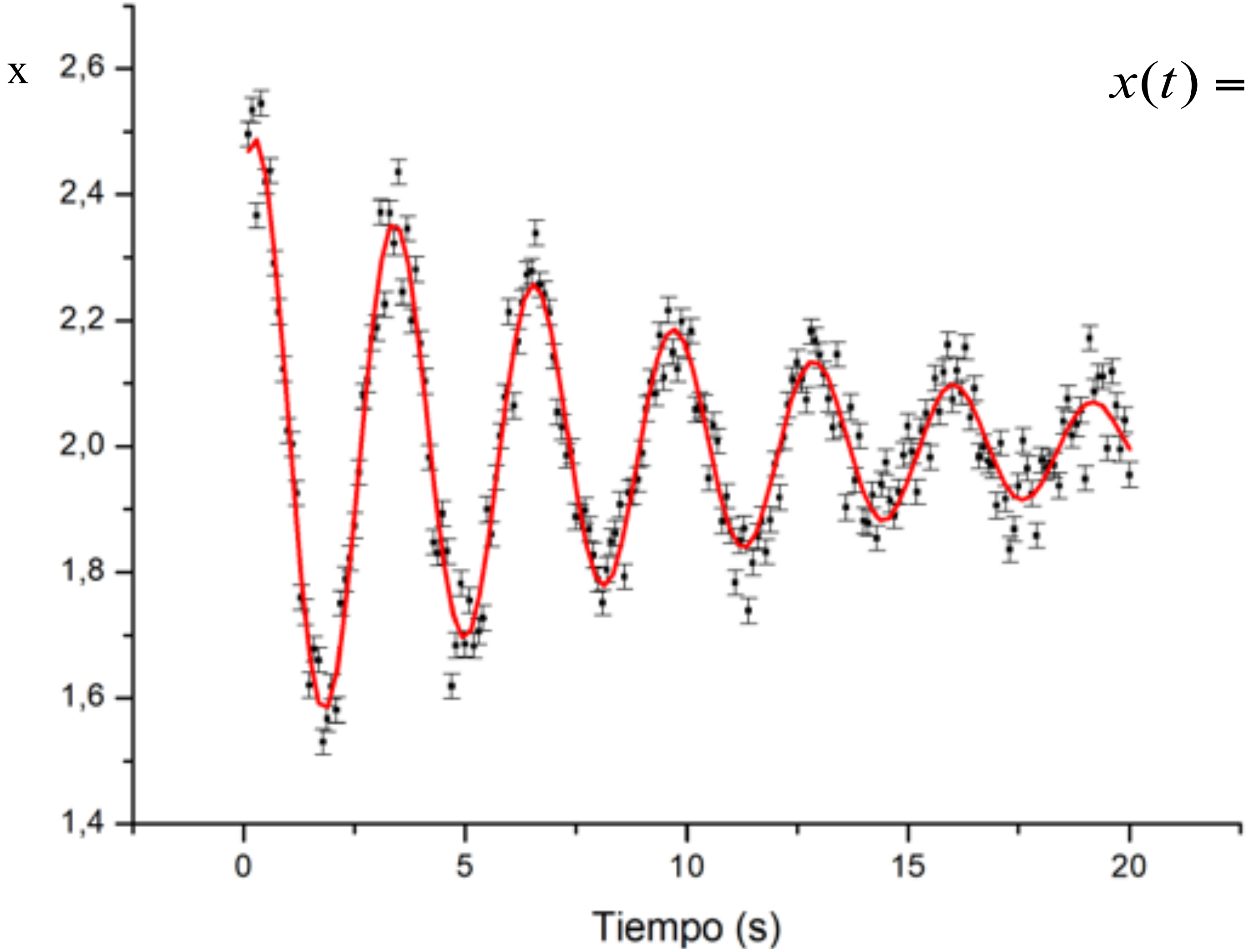
Se resuelve con métodos computacionales. Son iterativos, no tiene solución única y depende de los parámetros iniciales que se fijen.



$$x(t) = C + A\ sen(\omega\ t + \varphi)$$

Utilizando Origin se pueden ajustar estos datos a la función

Ajuste no lineal de la señal completa para determinar ω y γ



$$x(t) = C + A\ exp(-\gamma\, t)\ sen(\omega\ t + \varphi)$$

También se puede hacer en Origin

Alternativa: un ajuste lineal, después de linealizar en forma conveniente.

$$F(t) = C + A\exp(-\gamma\, t)\,\underbrace{\mathrm{sen}(\omega\, t + \varphi)}$$

Los picos de *F(t)* ocurren cuando el seno es 1.

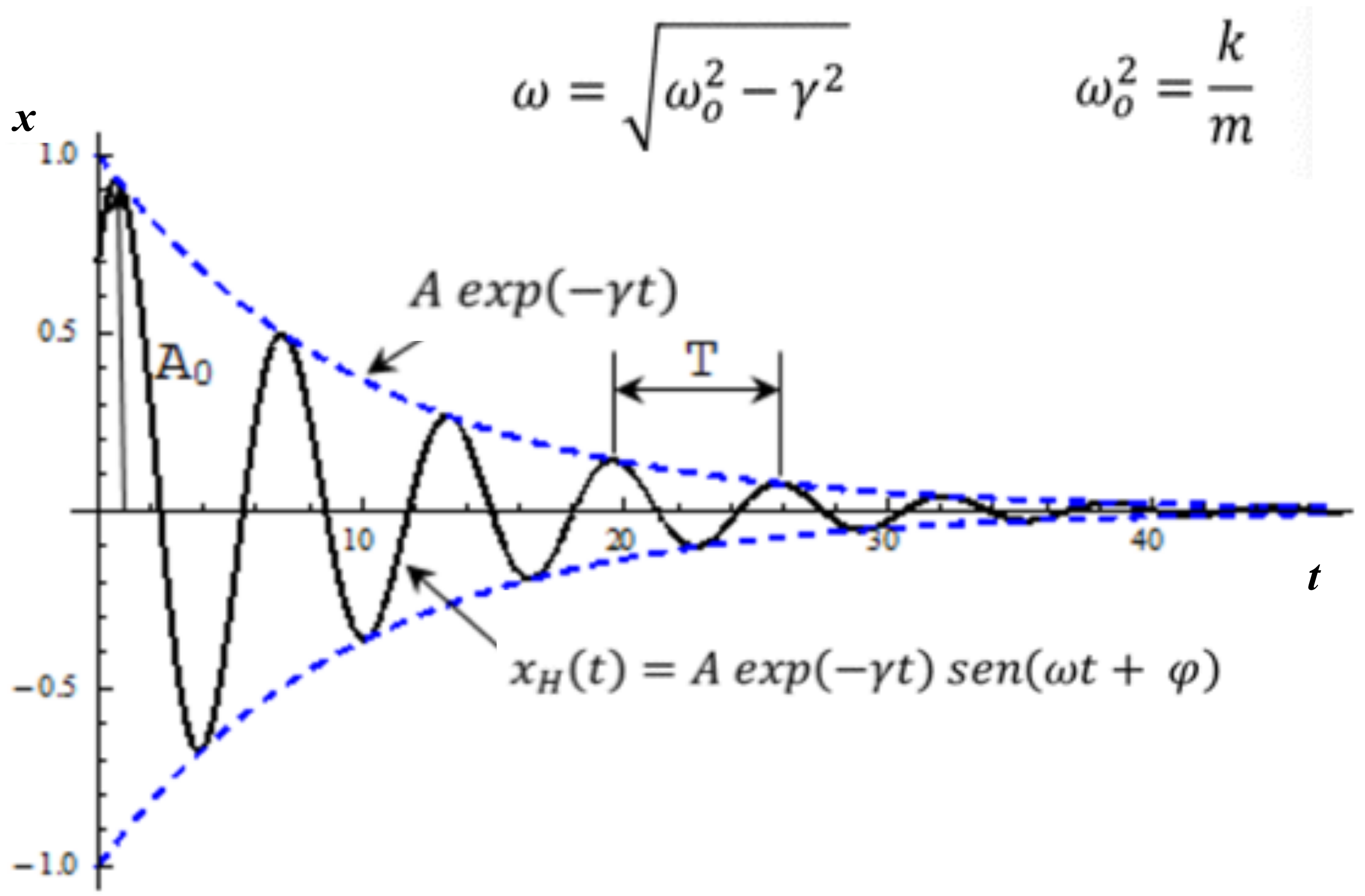
$$F_{pico}(t) = C + A\exp(-\gamma\, t_{pico})$$

$$\Longrightarrow \quad F_{pico} - C = A\exp(-\gamma\, t_{pico})$$

$$\Longrightarrow \quad \ln(F_{pico} - C) = \ln(A) - \gamma\, t_{pico}$$

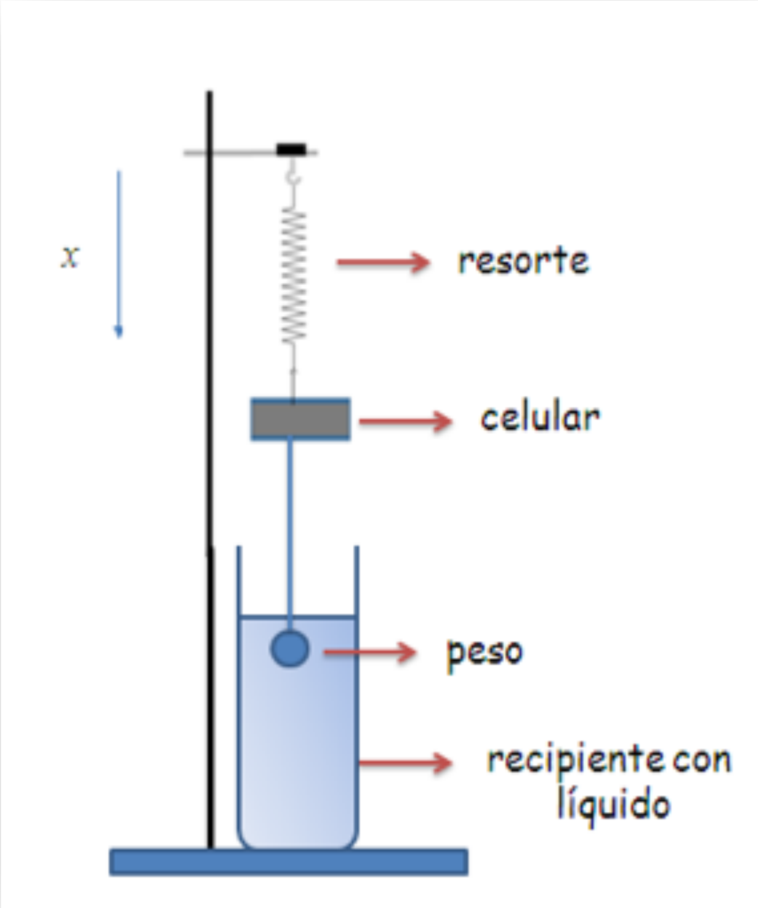
Restando y tomando logaritmo, se obtiene una expresión lineal en el coeficiente de amortiguamiento. Este se puede determinar entonces aplicando un ajuste lineal por una recta.

Caso sub-amortiguado



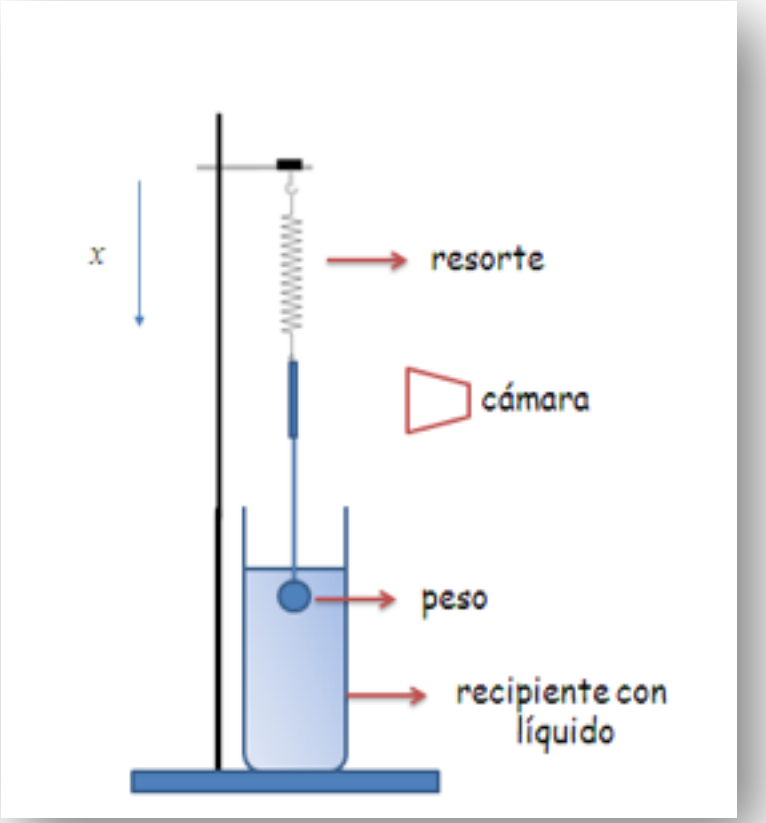
Trabajo Práctico N° 5

- Se utilizara una configuración parecida a la del TP N°5
- De ser posible, se debe conocer el peso de los elementos que componen el sistema (sin considerar el resorte).
- Se quiere registrar el movimiento oscilatorio del sistema y se pueden plantear **dos opciones** para obtener la variación de la posición del sistema oscilante (representada por la coordenada x en la figura) en función del tiempo.
- En ambas alternativas hay que registrar el movimiento primero sin el recipiente de la figura y luego con el recipiente con algún líquido.
- **Opción 1**
  - ✓ El celular es parte del sistema oscilante.
  - ✓ Se debe poner a oscilar el sistema.
  - ✓ Se utiliza la app **Phyphox** y se registra la aceleración en el tiempo. En Campus está subido un video que muestra cómo proceder en este caso y algunas indicaciones de cómo colgar el celular.



Opción 1

- **Opción 2**
  - ✓ No se usa el celular como parte del sistema sino para filmar un video.
  - ✓ Se debe poner a oscilar el sistema y se realiza la filmación.
  - ✓ Posteriormente, con el programa Tracker, se debe obtener el movimiento de una parte del sistema (por ejemplo una espira del resorte o algún elemento distintivo del sistema).
  - ✓ No se debe elegir como referencia un elemento que entre en el fluido.



Opción 2

- A partir de los datos se debe verificar que el sistema no trabaje en condición sobre-amortiguado ni crítico.
- De ser así, busque una condición donde el sistema oscile en forma sub-amortiguada.
- En ese caso se cumple :

fase

$$x_H(t) = A\, exp(-\gamma t)\, sen(\omega t + \varphi)$$

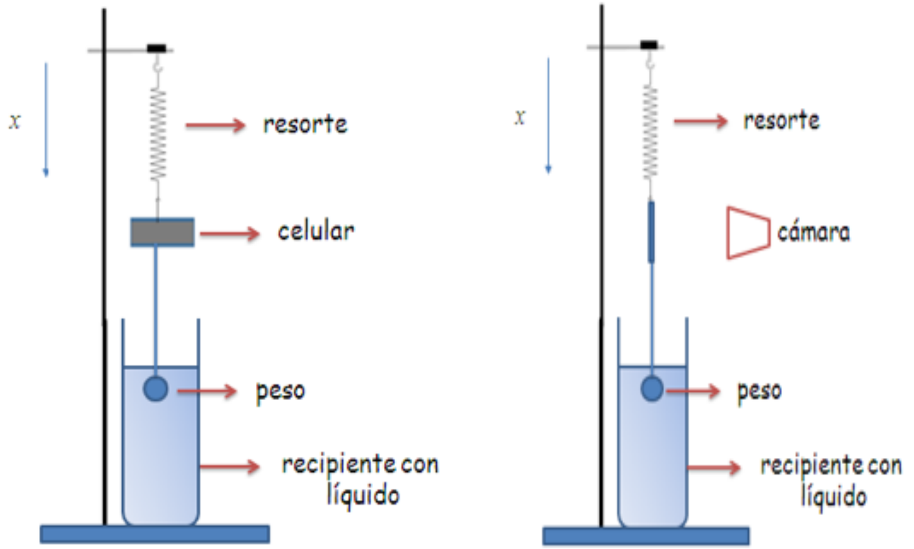
Coeficiente de amortiguación

Frecuencia angular de oscilación

$$x_H(t) = A\,exp(-\gamma t)\,sen(\omega t + \varphi) \qquad (1)$$

- ¿Cómo incluiría la solución particular en esta expresión?
- Si utilizó la Opción 1, ¿cómo cambia esta expresión?

- ¿Cómo calcular γ sin ajustar los datos experimentales a la ec. (1) en forma completa?
- A partir del ajuste (no lineal) de los datos a la ec.(1) obtenga A, ω y φ, para cada caso usando Origin o Phyton.
- **En la clase pasada se calculó la constante del resorte k**. Si no usa el mismo resorte en esta experiencia, debe calcular la constante **k**.
- **Estime ω_o y verifique si se cumple:** $\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2}$



Opción 1 **Opción 2**

¿Si no conoce el peso de la masa total que cuelga del resorte, como la estimaría a partir de esta expresión y los parámetros obtenidos del ajuste de la ec. (1)?

¿ PREGUNTAS ?