



universidad de buenos aires - exactas  
departamento de Física

# **MEDICIONES DIRECTAS 3 – DETERMINACIÓN DEL PERÍODO DE UN PÉNDULO ESTADÍSTICA**

**Laboratorio 1 – 2do Cuatrimestre de 2021**

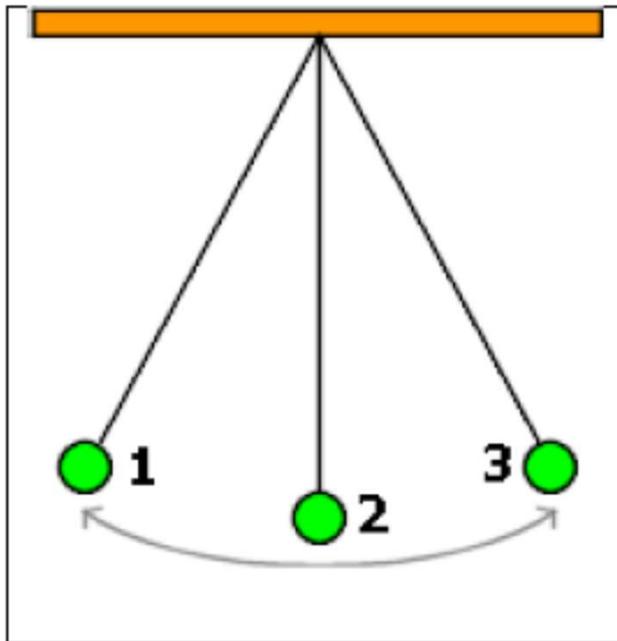
Departamento de Física

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires



## Período del péndulo

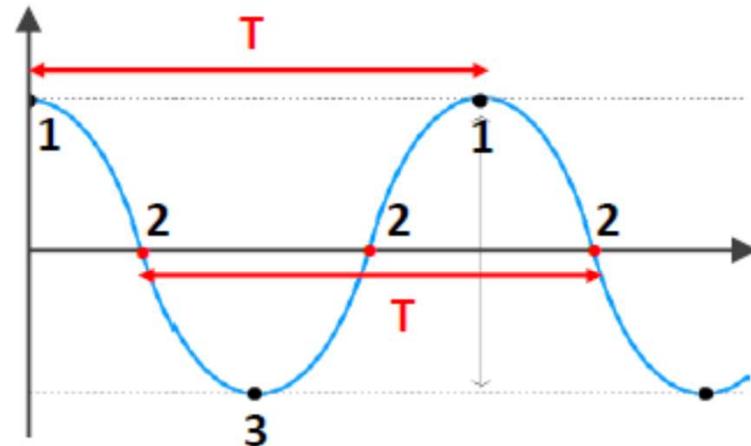


*¿Y si comienzo a medir cuando  
pasa por el punto de equilibrio (2)?*

## Repaso de la clase pasada

### Tiempo de una oscilación completa

Tiempo que tarda el péndulo en partir desde uno de sus extremos de amplitud (1), pasar por el punto de equilibrio (2), llegar al otro extremo de amplitud (3) y regresar nuevamente al primer punto (1)



## Repaso de la clase pasada

### MODA

$M_o, x_{m_o}$ : Valor de  $x$  que corresponde al máximo de frecuencia

### MEDIANA

$M_e, \tilde{x}, x_{m_o}$ : Valor de  $x$  que divide el 50% de los datos

Si es Impar

$$\bar{x} = \frac{x_{N+1}}{2}$$

Si es Par

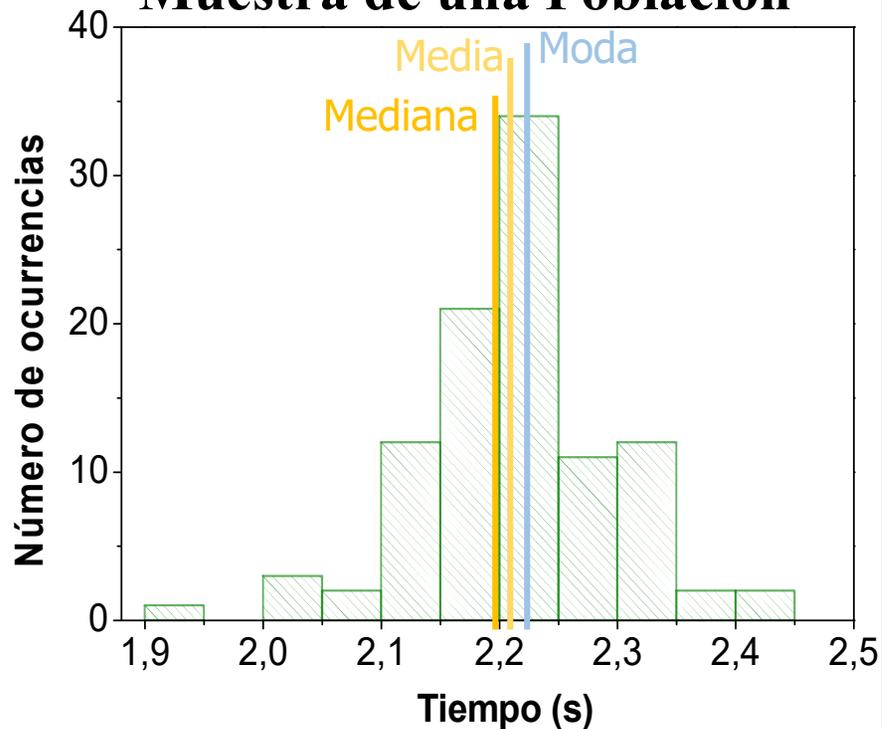
$$\bar{x} = \frac{x_{\frac{N}{2}} + x_{\frac{N}{2}+1}}{2}$$

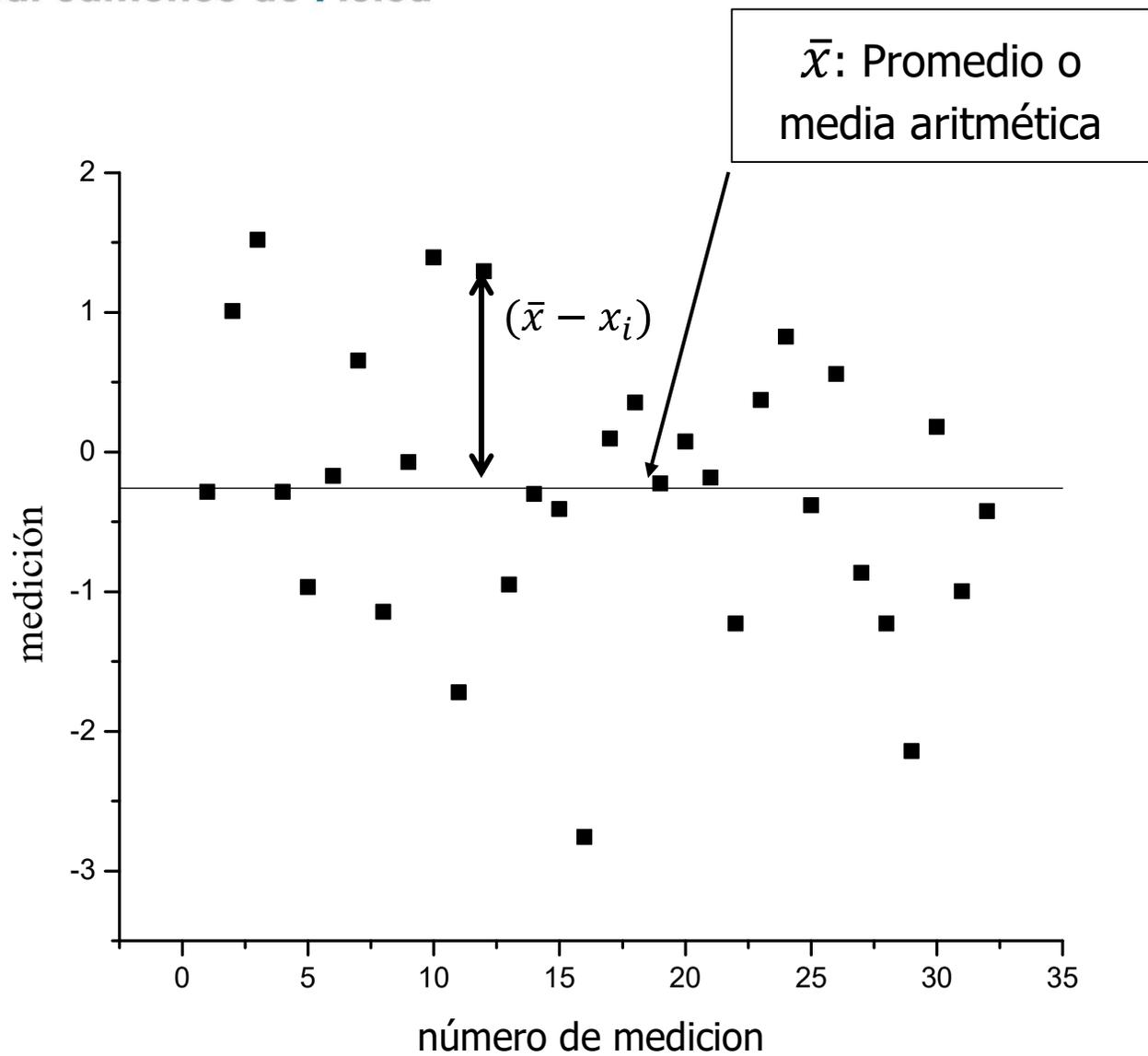
### MEDIA ( $\bar{x}$ )

$\bar{x}$ : Promedio o media aritmética

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

### Muestra de una Población





## Varianza de una VA

$$V(X) = \frac{\sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2}{N}$$

$X$ : VA;  $x_i$ : medición "i" de la VA

Propiedades de la Varianza

Supongamos  $X$  e  $Y$  VA independientes, entonces:

1.  $V(\text{cte}) = 0$
2.  $V(k.X) = k^2.V(X)$
3.  $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

Dispersión de los datos  $x_i$  respecto de la media

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

**DESVIACIÓN ESTÁNDAR ( $S$ )**

$$S^2 = Var$$

Buscamos  $\bar{x}$  que minimice la varianza  $\Rightarrow \frac{dV}{d\bar{x}} = 0$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_i \bar{x}_i$$

**HISTOGRAMA:** El valor más representativo se asocia a la Moda o la Mediana. La incerteza se asocia al ancho del histograma (ancho altura mitad)

**ESTADÍSTICA:** El valor más representativo se asocia al promedio. La incerteza se asocia a la desviación estándar.  $S$

**TENDENCIA EN PROBABILIDAD:**  $N \rightarrow \infty$

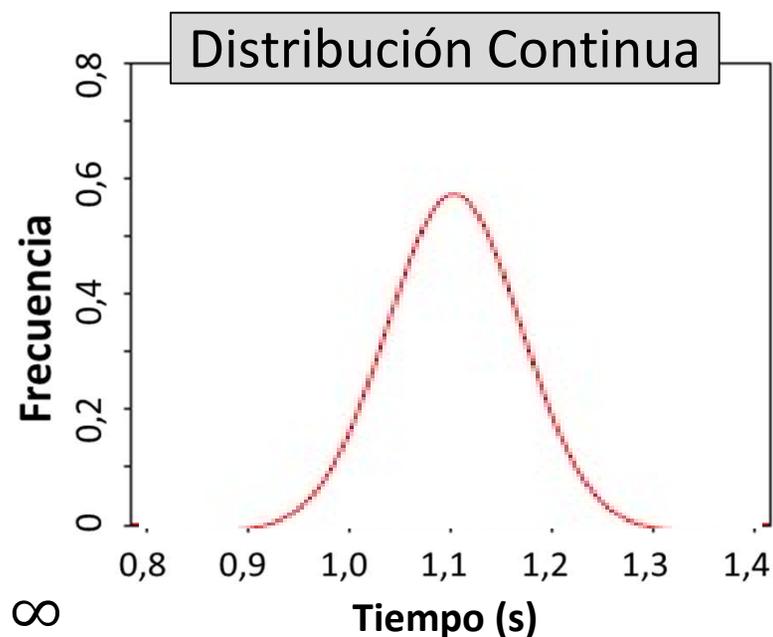
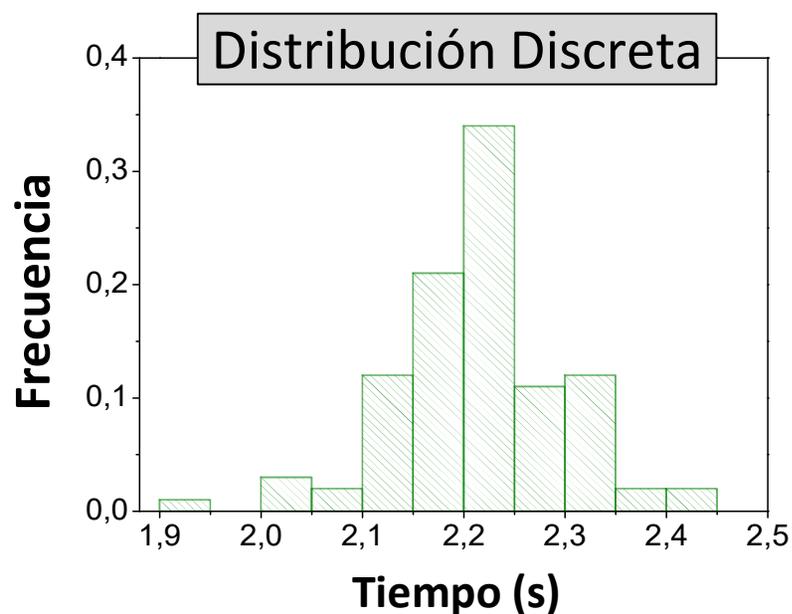
## Análisis gráfico

Estimar los parámetros de la distribución a partir de los datos medidos

Tenemos una muestra finita de datos



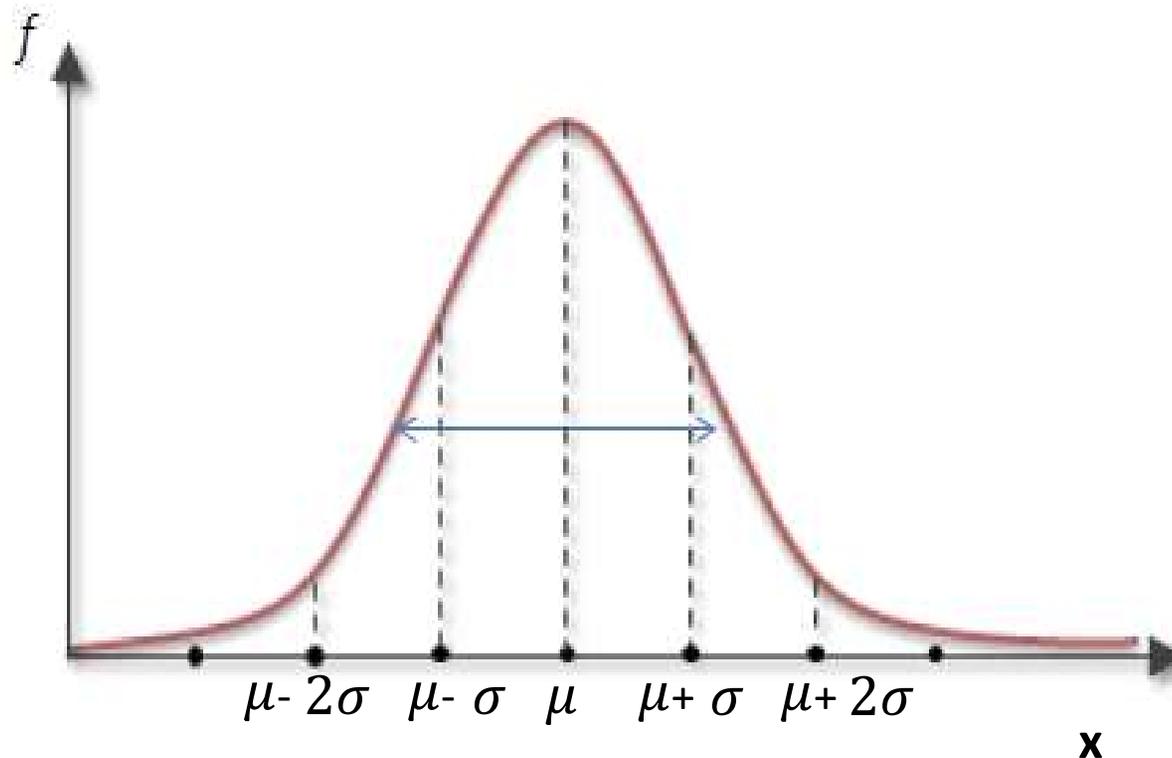
Queremos estimamos los parámetros de la distribución



$N \rightarrow \infty$

$\bar{x}$   ?  
 $S$   ?

## Función de distribución



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

$$\int_a^b f(x) dx = P(a < x < b)$$

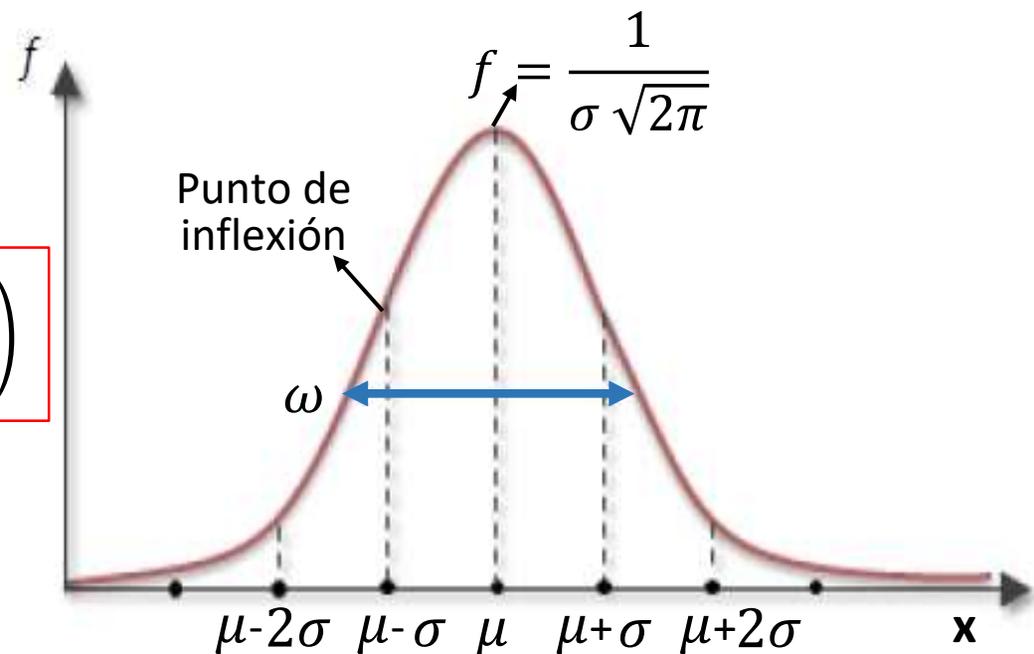
$$f(x) dx = P(x, x + dx) \quad f(x): \text{DENSIDAD DE PROBABILIDAD}$$

## Función de distribución

- Hay un sólo valor más probable ( $\mu$ ) y corresponde al promedio, la media y la moda.
- Las mediciones no están correlacionadas (ojo, aprendizaje)
- Es simétrica respecto del promedio
- La probabilidad decrece al alejarse del promedio
- Es asintótica a 0 para  $x \rightarrow \infty$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

**Gaussiana**



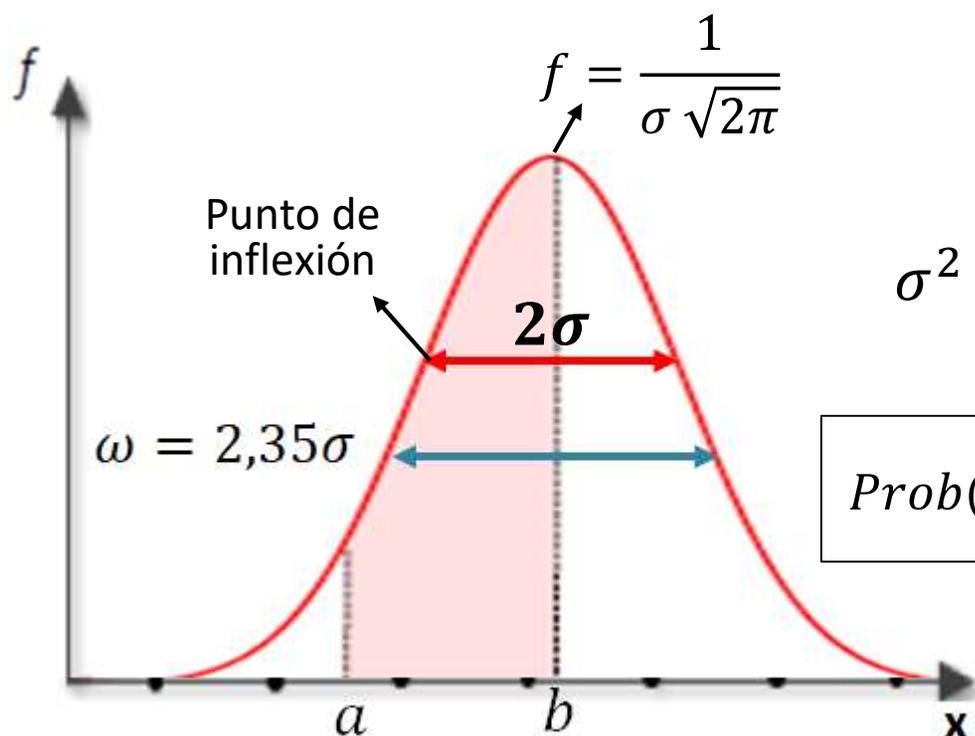
## Función de distribución: Gauss

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

$$\mu = \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

$$\sigma^2 = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx$$



$$Prob(a \leq x \leq b) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_a^b e\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

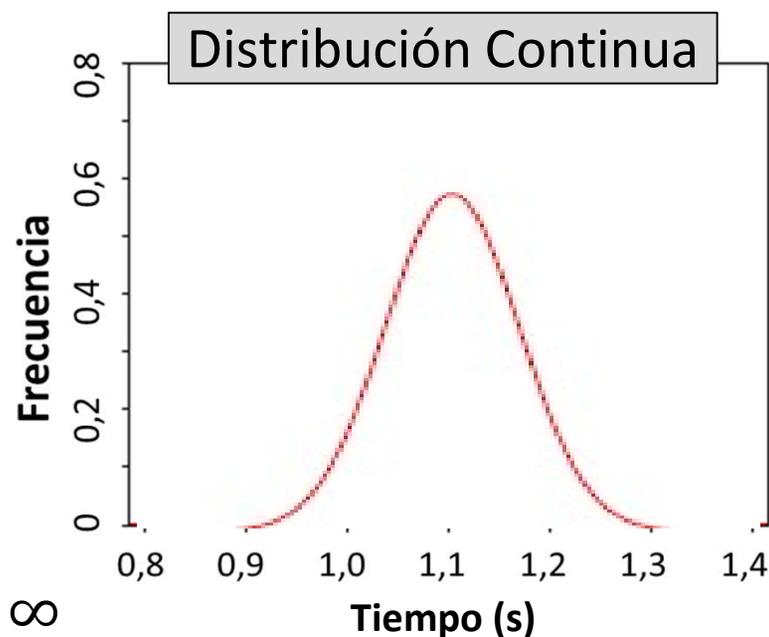
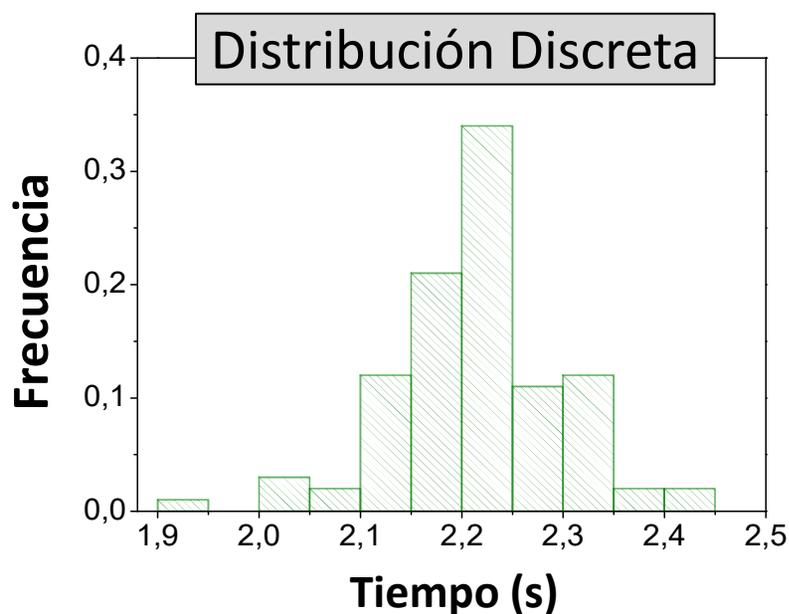
## Si nuestra VA es gaussiana

### ¿Qué nos dice la TENDENCIA EN PROBABILIDAD?

Tenemos una muestra finita de datos



Queremos estimamos los parámetros de la distribución



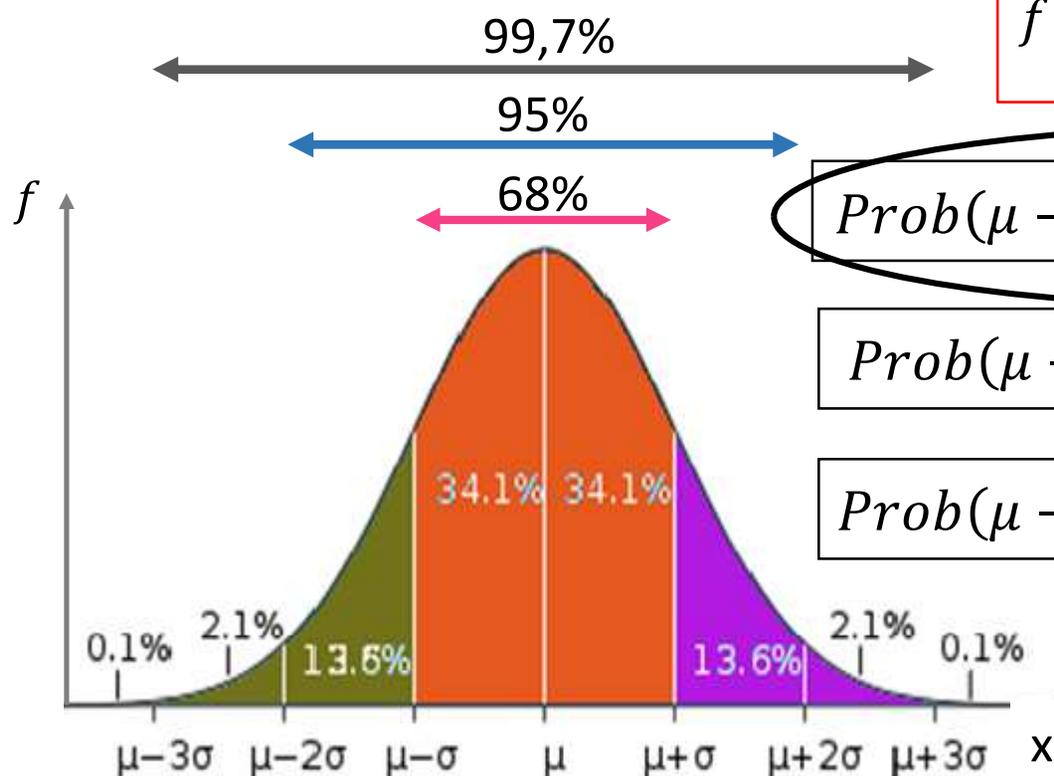
$N \rightarrow \infty$

$\bar{x} \rightarrow \mu$

$S \rightarrow \sigma$

## Función de distribución: Gauss

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$



$$Prob(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) \cong 0,6827$$

$$Prob(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) \cong 0,95$$

$$Prob(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) \cong 0,997$$

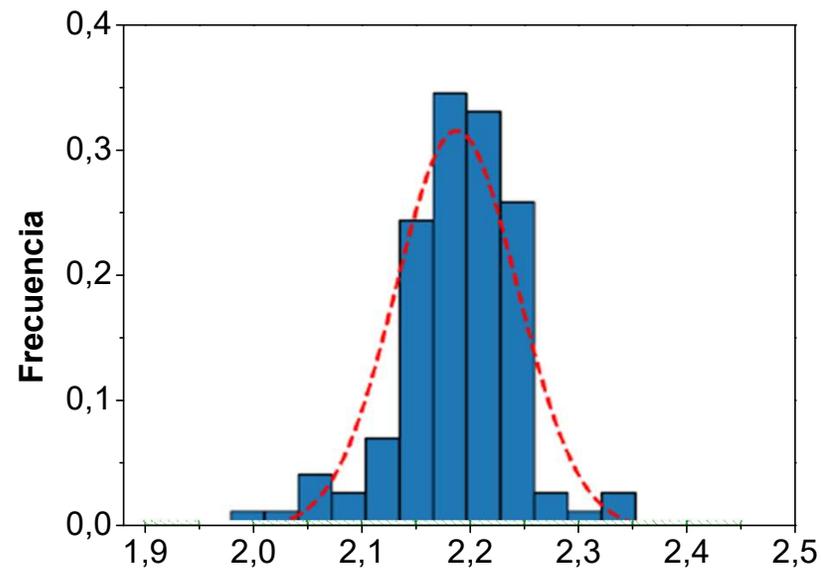
Desviación Estándar:

Asociada con el intervalo de confianza (prob. 68%) de UNA MEDICIÓN INDIVIDUAL → Incerteza

Tenemos una muestra finita  
de datos



Estimamos los parámetros de la  
distribución



Si realizamos una nueva medición  $x$ , ésta tendrá una probabilidad de  $\sim 68\%$  de encontrarse en el intervalo:

$$(\bar{x} - S, \bar{x} + S)$$

Discreto

$$(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$$

Continuo

## Parámetros de la distribución a partir de los datos de 1 Muestra con $N$ medidas

Tenemos una muestra finita de datos



Estimamos los parámetros de la distribución

Distribución Discreta

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i$$

$n \rightarrow \infty$

Distribución Continua

$$\bar{x} = \mu$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$



$$S = \sigma$$

Si realizamos una nueva medición  $x$ , ésta tendrá una probabilidad de  $\sim 68\%$  de encontrarse en el intervalo:

$$(\bar{x} - S, \bar{x} + S)$$



$$(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$$



**¿Cómo analizamos cuál es el  
intervalo de confianza que nos da la  
incerteza para EL PROMEDIO de  
1 Muestra con  $N$  medidas?**

## Para esto, repetimos $n$ veces el experimento: muestra Poblacional

$$\text{Exp. 1} \rightarrow N \text{ mediciones de } x \rightarrow \bar{x}_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad S_{x1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\bar{x}_1 - x_i)^2}{N}}$$

$$\text{Exp. 2} \rightarrow N \text{ mediciones de } x \rightarrow \bar{x}_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad S_{x2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\bar{x}_2 - x_i)^2}{N}}$$

⋮

$$\text{Exp. } n \rightarrow N \text{ mediciones de } x \rightarrow \bar{x}_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad S_{xn} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\bar{x}_n - x_i)^2}{N}}$$

Si repetimos el experimento  $n$  veces, los valores de los  $x_i$  cambiarán, y la media ( $\langle \bar{x} \rangle$ ) de las medias ( $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ ), y la desviación estándar de la media ( $S_{\bar{x}}$ ) serán (por cálculo directo):

$$\langle \bar{x} \rangle = \frac{1}{n} \sum_i \bar{x}_i$$

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\langle \bar{x} \rangle - \bar{x}_i)^2}$$

## Para esto, repetimos $n$ veces el experimento: muestra Poblacional

$$\begin{aligned}
 \text{Exp. 1} &\rightarrow N \text{ mediciones de } x \rightarrow \bar{x}_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i & S_{x1} &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\bar{x}_1 - x_i)^2}{N}} \\
 \text{Exp. 2} &\rightarrow N \text{ mediciones de } x \rightarrow \bar{x}_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i & S_{x2} &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\bar{x}_2 - x_i)^2}{N}} \\
 &\vdots & & \\
 \text{Exp. } n &\rightarrow N \text{ mediciones de } x \rightarrow \bar{x}_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i & S_{xn} &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\bar{x}_n - x_i)^2}{N}}
 \end{aligned}$$

Si repetimos el experimento  $n$  veces, los valores de los  $x_i$  cambiarán, y la media ( $\langle \bar{x} \rangle$ ) de las medias ( $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ ), y la desviación estándar de la media ( $S_{\bar{x}}$ ) serán (por cálculo directo):

Sirve para encontrar el intervalo de confianza del promedio, pero:

*Tenemos que realizar muchas muestras de  $N$  mediciones!!! (Muestra Poblacional)*

## Desviación estándar de los promedios Error estadístico

Alternativamente, si calculamos la varianza del promedio (cualquiera de los  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ ) de una serie de  $N$  mediciones, obtenemos:

$$\begin{aligned} V(\bar{x}) &= V\left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N}\right) = V\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i\right) = \frac{1}{N^2} V\left(\sum_{i=1}^N x_i\right) = \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^N V(x_i)\right) \\ &= \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^N V(x)\right) = \frac{V(x)}{N} \quad (\text{Ver demostración en el material de la clase}) \end{aligned}$$

La ventaja de este resultado es que nos permite predecir el intervalo de confianza del promedio de una serie de  $N$  mediciones (con desviación estándar “ $S$ ”). Nos dice que el promedio de una muestra de datos estará mejor definido cuanto mayor sea el número de los datos de esa muestra.

$$\rightarrow \sigma_e = S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{N}} \quad \begin{array}{l} \text{ERROR} \\ \text{ESTADÍSTICO} \\ (\sigma_e) \end{array}$$

Entonces para una muestra, una medida de  $\bar{x}$  tendrá

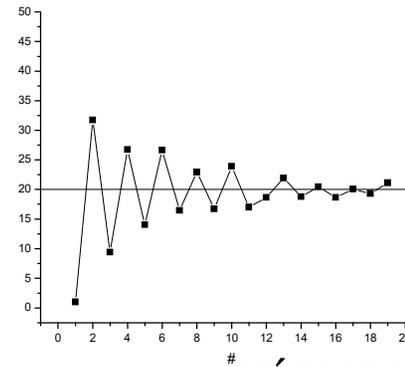
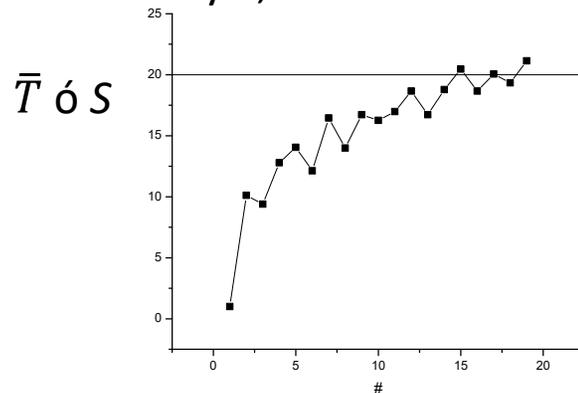
- **Probabilidad de ~68%** de encontrarse en  $(\bar{x} - \sigma_e, \bar{x} + \sigma_e)$
- **Probabilidad de ~95%** de encontrarse en  $(\bar{x} - 2\sigma_e, \bar{x} + 2\sigma_e)$
- **Probabilidad de ~99%** de encontrarse en  $(\bar{x} - 3\sigma_e, \bar{x} + 3\sigma_e)$
- En la práctica,  $\bar{x}$  puede ser un promedio o el promedio de los promedios.

# Actividad 1

## Análisis de la tendencia en probabilidad

Para las series de 10, 20, 50, 100 y 200 datos.

a) Obtener  $\bar{T}$  y  $S$ , analizar



# *número de mediciones*

b) Compatibilidad con la distribución gaussiana.

Superponer a cada histograma la gaussiana correspondiente (guía). Analizar.

c) Analizar proporción de mediciones en el intervalo  $(\bar{T} \pm S)$

d) ¿cuál es la función de distribución que describe al período del péndulo medido en estas condiciones? ¿depende del número de mediciones de la serie? ¿cuál es la mejor forma de determinar el período y la desviación estándar de mi variable aleatoria?

## Actividad 2

### Error estadístico, Error del promedio

Arme 10 series de 20 mediciones cada una.

a) Obtener  $\bar{T}_1, \dots, \bar{T}_{10}$  y  $S_1, \dots, S_{10}$ ; Comparar los  $S_i$ . ¿Son “similares”? ¿Cómo se comparan con el  $S$  de la serie completa de 200 mediciones? ¿Cuál elegiría si tiene que caracterizar la desviación estándar de la variable aleatoria?

b) Obtener  $\langle \bar{T} \rangle$  y  $S_{\bar{T}}$ . ¿Cómo se compara  $S_{\bar{T}}$  con  $S$  (200 datos)? ¿Cuál es el significado estadístico de  $S_{\bar{T}}$ ?

c) Haga un histograma de los promedios  $\bar{T}_1, \dots, \bar{T}_{10}$ . Superponga una gaussiana centrada en  $\langle \bar{T} \rangle$  usando  $\frac{S}{\sqrt{20}}$  como desviación estándar ( $S$  es la desviación estándar de las 200 mediciones, la usamos en la hipótesis de que tiende en probabilidad hacia  $\sigma$ , la desviación estándar de la variable aleatoria). El objetivo de este punto es analizar si este valor puede asociarse al error estadístico. Compare  $\frac{S}{\sqrt{20}}$  con  $S_{\bar{T}}$  obtenido en b). La gaussiana obtenida ¿describe adecuadamente la distribución de los promedios  $\bar{T}_i$ ? ¿qué probabilidad hay de que, si realizo una nueva serie de 20 mediciones, su promedio se encuentre en el intervalo  $(\langle \bar{T} \rangle \pm \frac{S}{\sqrt{20}})$ ? ¿Tiene sentido decir que  $\frac{S}{\sqrt{n}}$  es el error estadístico del promedio de una serie de  $n$  mediciones?

## Actividad 3

Volvemos a la variable aleatoria original, con  $N=200$  mediciones

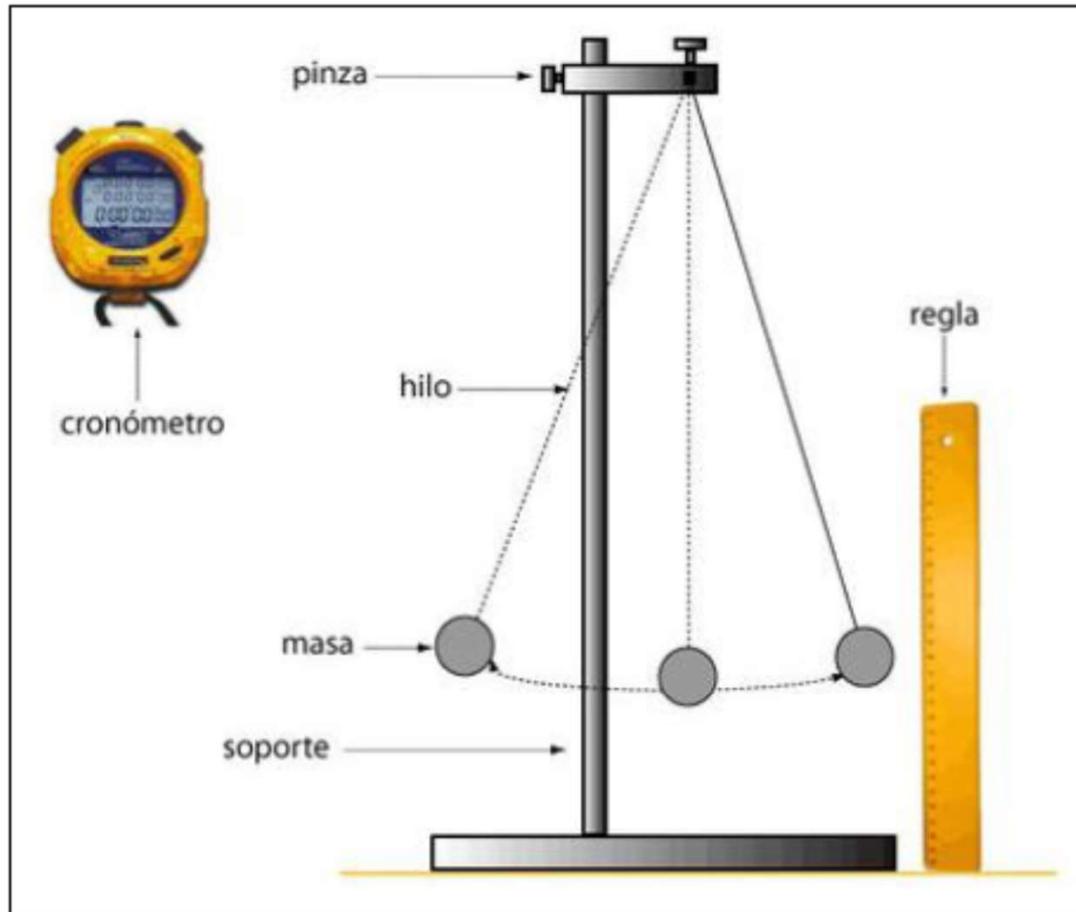
Use lo aprendido en las actividades 1 y 2 para determinar el resultado correspondiente a la serie completa, con su error:  $\bar{T} \pm \Delta T$ .

Recuerde que  $\Delta T^2 = \Delta T_{ap}^2 + \sigma_e^2 = \Delta T_{ap}^2 + \left(\frac{s}{\sqrt{N}}\right)^2$

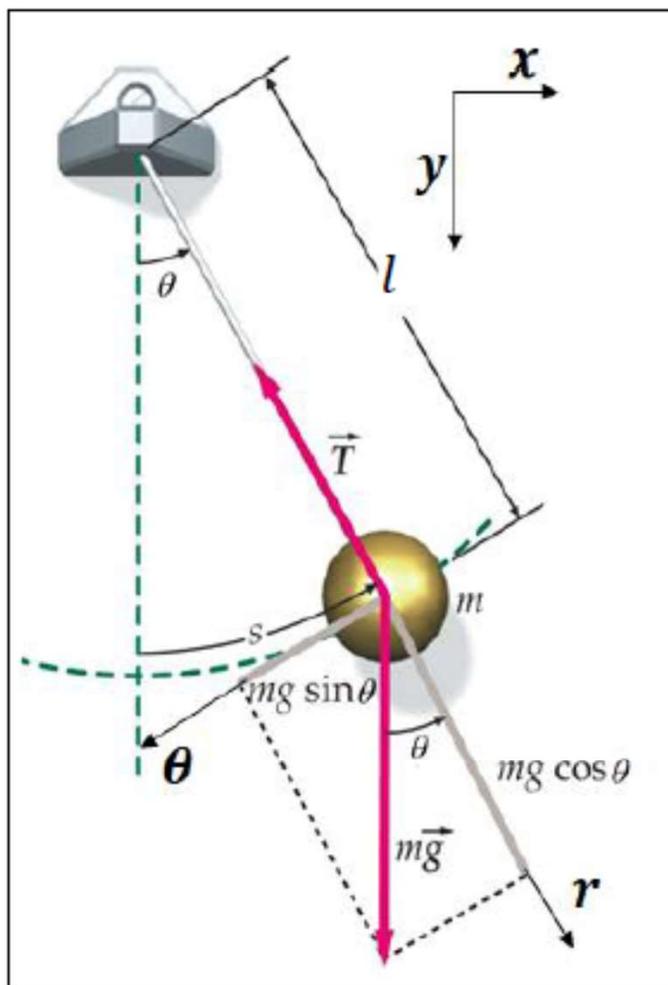
Halle el número de mediciones “óptimo”, tal que  $\Delta T \sim \Delta T_{ap}$ . ¿Puede despreciar al error estadístico considerando sus mediciones?



### DETERMINAR EL PERÍODO DE UN PÉNDULO



## Diagrama de cuerpo libre



## Período de un Péndulo Simple

2da Ley de Newton:  $\sum F_{ext} = ma$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{r}: mg \cos \theta - T = ma_r \rightarrow a_r = 0 \\ \hat{\theta}: -mg \sin \theta = ma_\theta \rightarrow a_\theta = -g \sin \theta \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} s &= l\theta \\ v &= \frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \\ a_\theta &= \frac{d^2s}{dt^2} = l \frac{d^2\theta}{dt^2} \end{aligned}$$

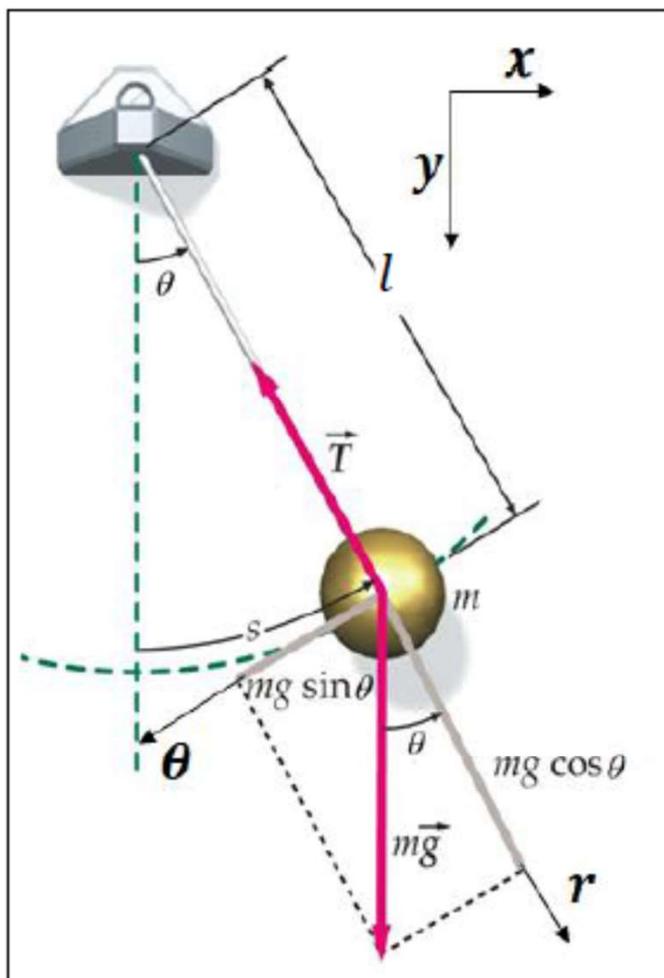
$$l \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \sin \theta$$

$$l \frac{d^2\theta}{dt^2} + g \sin \theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

Ecuación  
diferencias  
de 2<sup>do</sup> orden

## Diagrama de cuerpo libre



## Período de un Péndulo Simple

Resolviendo la Ecuación de 2do orden

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \text{sen}\theta = 0$$

$$\theta \ll 1 \Rightarrow \text{sen}\theta \approx \theta \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

Solución:  $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$   $\theta_0 \ll 1$

donde  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$   $f = \frac{\omega}{2\pi}$   $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Período de un péndulo de longitud  $l$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$