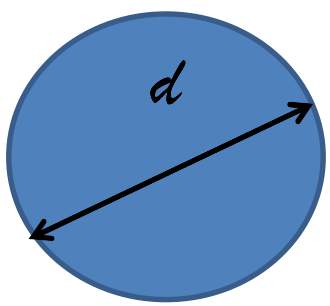
Mediciones indirectas
Propagación de errores

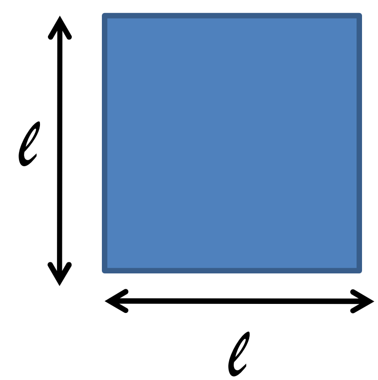
Magnitudes con incertidumbres instrumentales

Magnitudes que no pueden ser medidas directamente con un instrumento:

Por ej: AREA de un objeto



$$\mathcal{A} = \frac{\pi}{4} d^2$$



$$\mathcal{A} = \ell^2$$

$$d = d_0 \pm \Delta d$$

$$\ell = \ell_0 \pm \Delta \ell$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \pm \Delta \mathcal{A}$$

Propagación de incertidumbres

Area del cuadrado:

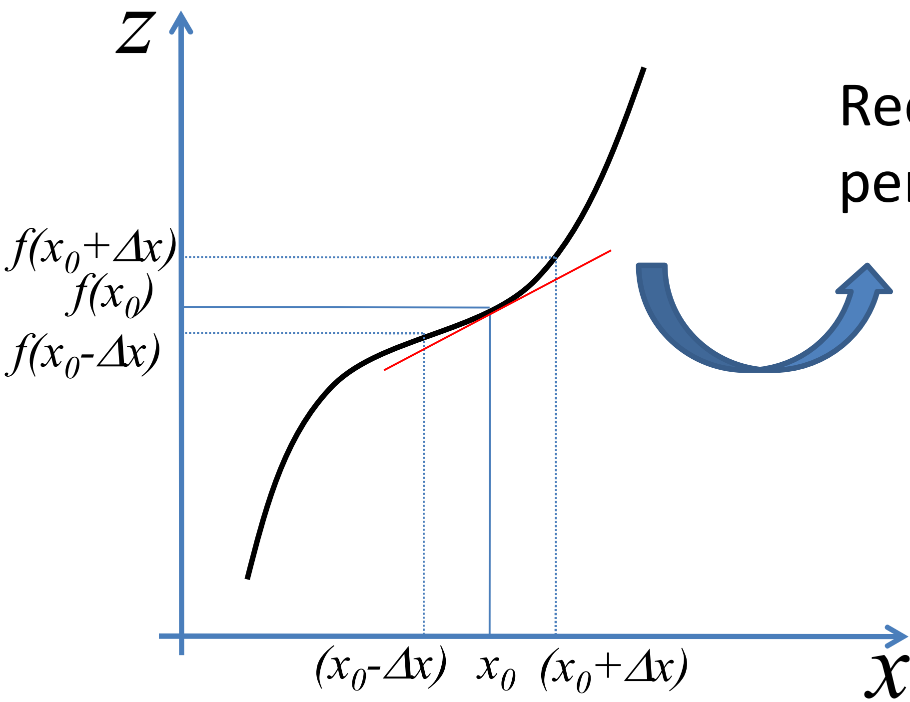
$$\mathcal{A}_{\max} = (\ell_0 + \Delta\ell)^2 \qquad \mathcal{A}_{\min} = (\ell_0 - \Delta\ell)^2$$

$$\mathcal{A}_0 = \frac{\mathcal{A}_{\max} + \mathcal{A}_{\min}}{2} \qquad \Delta\mathcal{A} = \frac{\mathcal{A}_{\max} - \mathcal{A}_{\min}}{2}$$

$$A_0 = \frac{2l_0^{\ 2} + \cancel{2\Delta l^2}}{2} \approx l_0^{\ 2} \qquad \Delta A = \frac{4l_0\Delta l}{2} = 2\ell_0\Delta\ell$$

Queremos determinar el valor de una magnitud z
partir de la medición directa de una magnitud x

$$z = f(x) \qquad\qquad x = (x_0 \pm \Delta x)$$



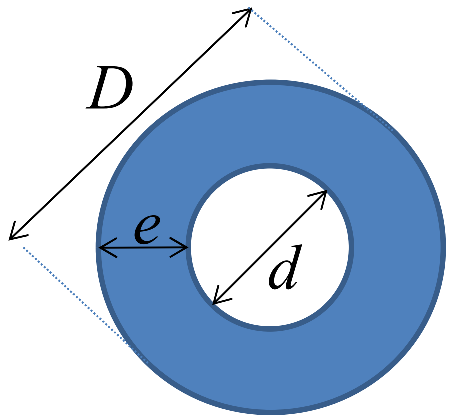
Recta tangente a $f(x_0)$
pendiente: $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0}$

$$z = (z_0 \pm \Delta z)$$

$$z_0 = f(x_0) \qquad \Delta z = \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} * \Delta x$$

Magnitudes determinadas a partir de la medición directa de varias magnitudes

Ejemplos



$$e=D\text{-}d$$

$$e_{max}= (D_0+\Delta D)-(d_0-\Delta d)= D_0-d_0+(\Delta D+\Delta d)$$

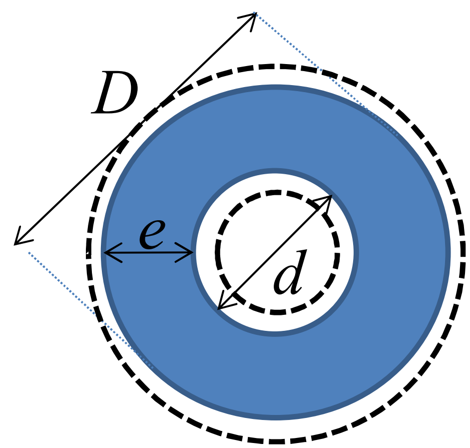
$$e_{min}= (D_0-\Delta D)-(d_0+\Delta d)= D_0-d_0-(\Delta D+\Delta d)$$

$$e= e_0 \pm \Delta e$$

$$e=D_0-d_0 \qquad \Delta e=\Delta D+\Delta d$$

Magnitudes determinadas a partir de la medición directa de varias magnitudes

Ejemplos



$$e=D-d$$

$$e_{max}= (D_0+\Delta D)-(d_0-\Delta d)= D_0-d_0+(\Delta D+\Delta d)$$

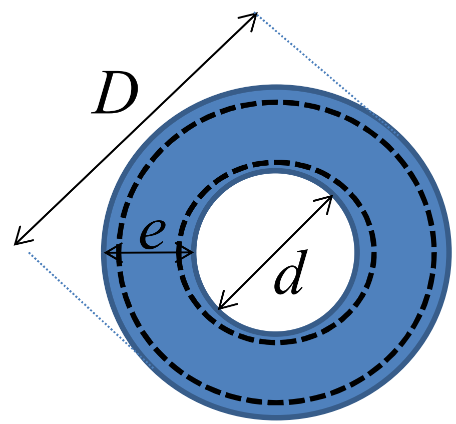
$$e_{min}= (D_0-\Delta D)-(d_0+\Delta d)= D_0-d_0-(\Delta D+\Delta d)$$

$$e= e_0\pm\Delta e$$

$$e_0=D_0-d_0 \qquad \Delta e=\Delta D+\Delta d$$

Magnitudes determinadas a partir de la medición directa de varias magnitudes

Ejemplos



$$e=D\text{-}d$$

$$e_{max}= (D_0+\Delta D)\text{-}(d_0\text{-}\Delta d)= D_0\text{-}d_0+(\Delta D+\Delta d)$$

$$e_{min}= (D_0\text{-}\Delta D)\text{-}(d_0+\Delta d)= D_0\text{-}d_0\text{-}(\Delta D+\Delta d)$$

$$e= e_0\pm\Delta e$$

$$e_0=D_0\text{-}d_0 \qquad \Delta e=\Delta D+\Delta d$$

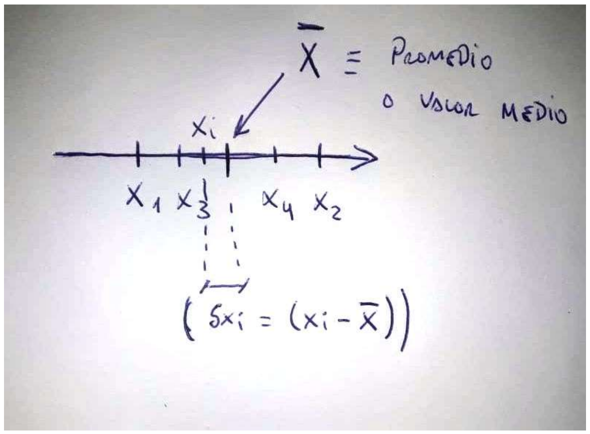
Caso general
Propagación del Error

Caso general
Propagación del Error

- Revisemos el caso en el que queremos obtener
  $z = f(x,y)$
  (después generalizaremos a $z = f(x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots)$)
- Supondremos que x está sometida a fluctuaciones aleatorias (como el T del péndulo)

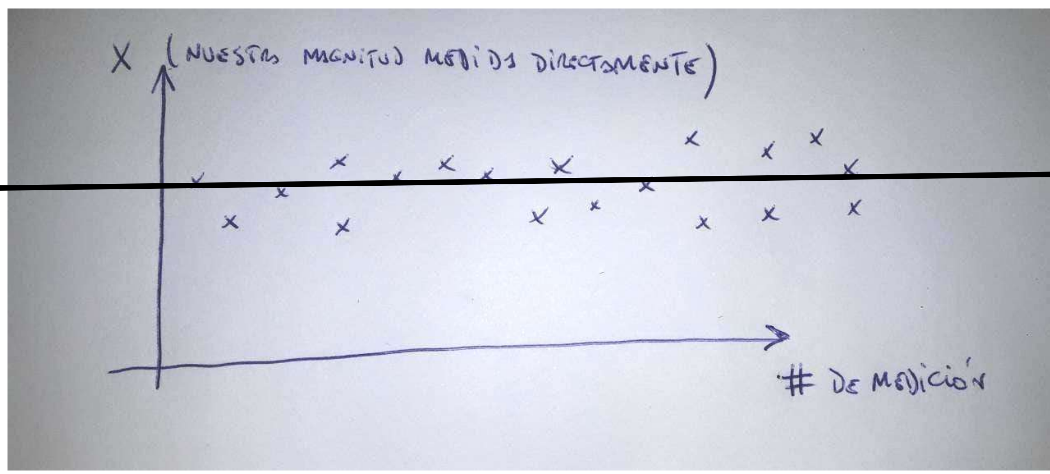
  (después generalizaremos a casos en que el error de apreciación es preponderante)

Caso general
Propagación del Error – Visión Estadística



$i = 1,\ldots\ldots\ldots\ldots,\mathrm{N}$

$\overline{x}$



El promedio es ~ centro de masa de la nube de puntos

Caso general
Propagación del Error – Visión Estadística

$$V(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2$$

$$\frac{dV}{d\bar{x}} = 0 \longrightarrow -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} 2 (x_i - \bar{x}) = 0$$

$$\longrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} - \frac{\underbrace{\sum_{i=1}^{N} \bar{x}}_{N\bar{x}}}{N} = 0$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

Buscamos que la varianza sea mínima

El promedio ES el valor que hace mínima a la varianza

Caso general
Propagación del Error – Visión Estadística

- x e y son VA independientes, entonces

$V(x+y) = V(x) + V(y)$

- Si conocemos $V(x)$, se cumple que:

$V(k.x) = k^2\, V(x)$ (k = cte)

$$z = f(x,y) \longrightarrow \text{MiDo } x_0, y_0 \quad ; \quad \text{Busco } z_0 = f(x_0,y_0)$$

Puedo desarrollar f en serie de Taylor en un entorno de (x_0,y_0):

$$z = \underset{\substack{\downarrow \\ x\sim x_0 \\ y\sim y_0}}{f(x,y)} \approx \underset{\substack{\downarrow \\ \text{cte}}}{f(x_0,y_0)} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{cte}}}{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x_0\\ y_0}}} (x-x_0) + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{cte}}}{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x_0\\ y_0}}} (y-y_0) + \cdots$$

Caso general
Propagación del Error – Visión Estadística

- *x* e *y* son VA independientes, entonces
$V(x+y) = V(x) + V(y)$
- Si conocemos $V(x)$, se cumple que:
$V(k.x) = k^2\ V(x)$ (k = cte)

$$Z = \underset{\substack{\downarrow \\ x \sim x_0 \\ y \sim y_0}}{f(x,y)} \approx \underset{\substack{\downarrow \\ cte}}{f(x_0,y_0)} + \underbrace{\underset{\substack{\downarrow \\ cte}}{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x_0 \\ y_0}}} (x-x_0) + \underset{\substack{\downarrow \\ cte}}{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x_0 \\ y_0}}} (y-y_0)} + \cdots$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{SUM}}}{V(z)} \cong \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{V\left(f(x_0,y_0)\right)} + V\left(\quad // \quad \right)$$

$$V(z) \approx V\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x_0 \\ y_0}} (x-x_0) \right) + V\left(\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x_0 \\ y_0}} (y-y_0) \right)$$

Caso general
Propagación del Error – Visión Estadística

- x e y son VA independientes, entonces
$V(x+y) = V(x) + V(y)$
- Si conocemos $V(x)$, se cumple que:
$V(k.x) = k^2\, V(x)$ (k = cte)

$$V(z) \approx \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{\substack{x_0\\y_0}} V(x-x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{\substack{x_0\\y_0}} V(y-y_0)$$

PROD
x cte

$$V(x-x_0) = V(x) - \overset{0}{V(x_0)} = V(x)$$

IDEM $V(y-y_0)$

Caso general
Propagación del Error – Visión Estadística

- x e y son VA independientes, entonces
$V(x+y) = V(x) + V(y)$
- Si conocemos $V(x)$, se cumple que:
$V(k.x) = k^2\, V(x)$ (k = cte)

$$\Rightarrow V(z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{\substack{x_0\\y_0}} V(x) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{\substack{x_0\\y_0}} V(y)$$

Desviación estándar

o sea

$$\sigma_z^{\,2} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{\substack{x_0\\y_0}} \sigma_x^{\,2} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{\substack{x_0\\y_0}} \sigma_y^{\,2}$$

Caso general
Propagación del Error – Visión Estadística

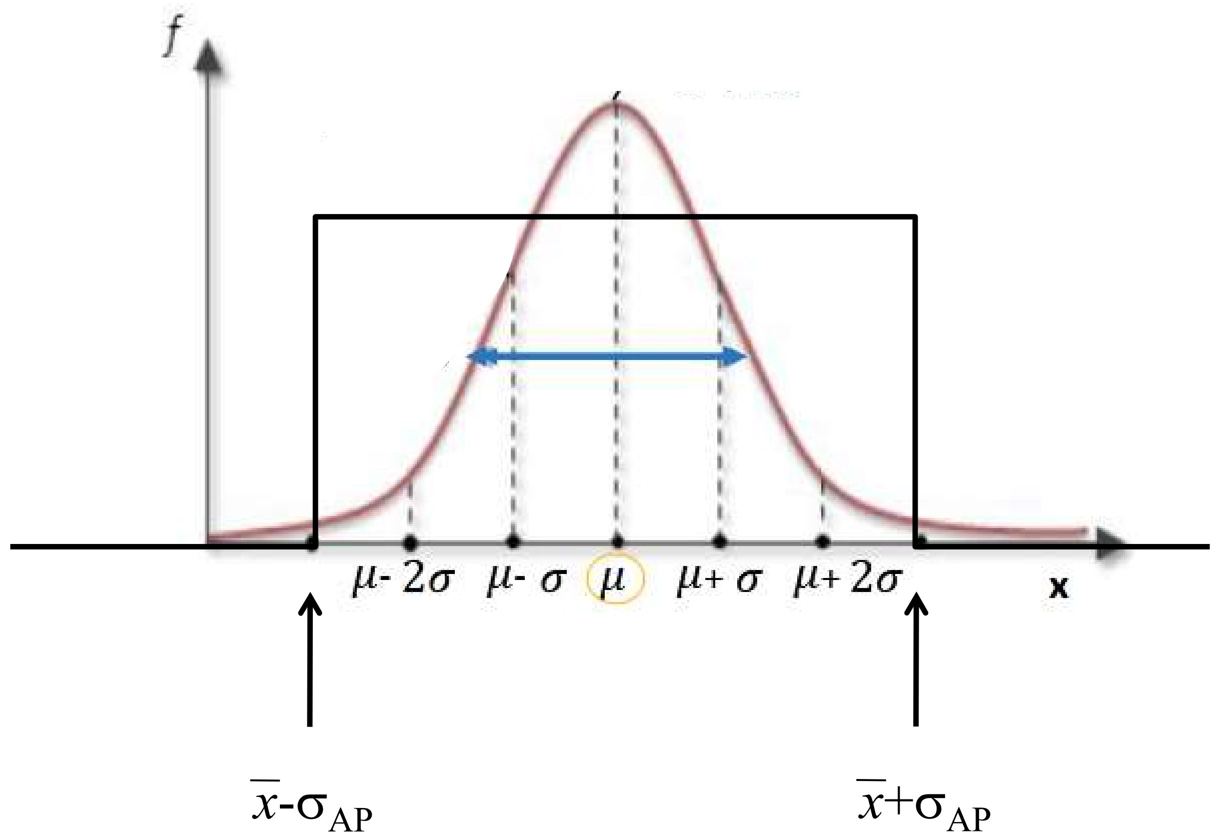
Dado que $\sigma_e = \dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}$

Error estadístico

$$\sigma_{z_e}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{\substack{x_0\\y_0}} \sigma_{x_e}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x_0\\y_0}} \sigma_{y_e}^2$$

Propagación del Error Generalización ****IMPORTANTE****

¿Qué hacemos si el error más relevante es el de apreciación?



Propagación del Error
Generalización

Recordemos $\Delta x = \sqrt{\sigma_N^2 + \sigma_e^2}$

Además, el desarrollo de Taylor mostrado para 2 variables (x e y) puede generalizarse para n variables ($x_1,\ldots..,x_n$)
Entonces, generalizando al caso de la determinación de una magnitud $z = f(x_1,\ldots..,x_n)$ a partir de las mediciones directas de $x_1,\ldots..,x_n$, llegamos a:

$$(\Delta z)^2 = \sum_{i=1}^{M} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2_{x_{10},\ldots,x_{M0}} \cdot (\Delta x_i)^2$$

Donde ($x_{10},\ldots..,x_{n0}$) son los valores medidos de ($x_1,\ldots..,x_n$), Δx_i es el error de la variable y Δz es el error de propagación de z.

Propagación del Error
Casos más comunes

- $f(x,y,z) = ax + by - cz$; $\Delta x, \Delta y, \Delta z$

$$\Delta f^2 = a^2 \Delta x^2 + b^2 \Delta y^2 + c^2 \Delta z^2$$

- $g(x,y,z) = G\, x^a\, y^b\, z^c$

$$\Delta g^2 = \left[\left(G\, a\, x^{a-1} y^b z^c \right)^2 \Delta x^2 + \left(G\, x^a\, b\, y^{b-1} z^c \right)^2 \Delta y^2 + \left(G\, x^a y^b\, c\, z^{c-1} \right)^2 \Delta z^2 \right]$$

$$\frac{\Delta g^2}{g^2} = \frac{[\quad]}{\left(G\, x^a y^b z^c \right)^2}$$

$$\frac{\Delta g^2}{g^2} = a^2 \frac{\Delta x^2}{x^2} + b^2 \frac{\Delta y^2}{y^2} + c^2 \frac{\Delta z^2}{z^2}$$

Propagación del Error
Casos más comunes

$$h(x,y) = y \ln x$$

$$\Delta h^2 = \underbrace{\left(y \frac{1}{x}\right)^2 \Delta x^2}_{\text{DIVERGE p/ } x \to 0} + (\ln x)^2 \Delta y^2$$

Medir el volumen de cuerpos
Moneda: V = $(\bar{V} \pm \Delta V)$

- Misma moneda, único material

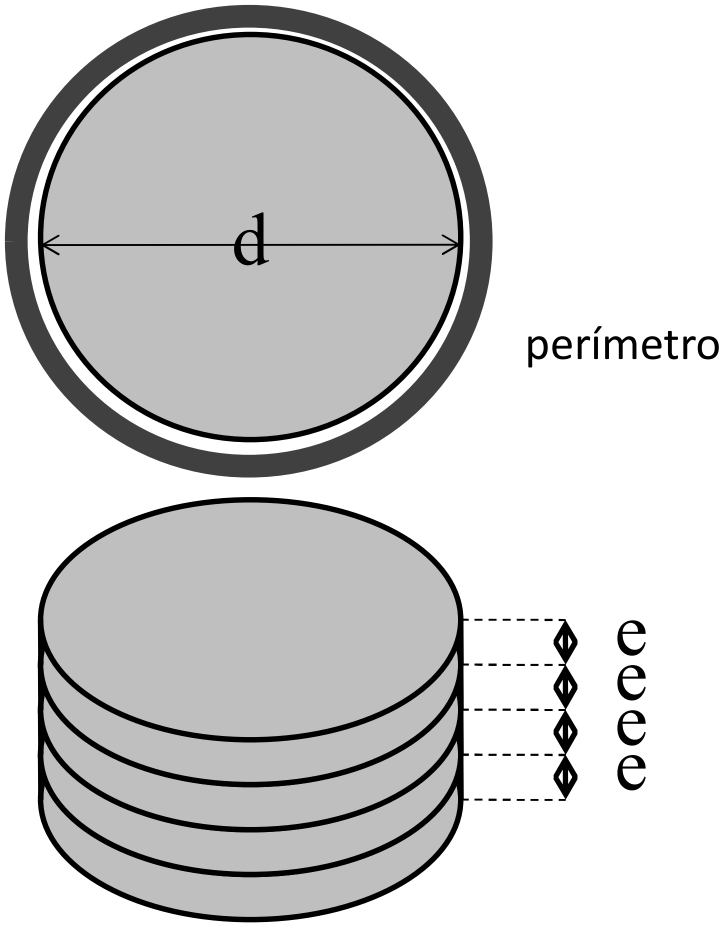
- Al menos 2 métodos

- Análisis de la influencia de los errores de las magnitudes de medición directa en la magnitud indirecta (V).

Medir el volumen de cuerpos
Moneda: V = $(\bar{V} \pm \Delta V)$

1. Medir las dimensiones y determinar el volumen a partir de su geometría
2. Medir el volumen sumergiendo el cuerpo en agua
3. Medir la masa y determinar el volumen tomando el valor de densidad del material

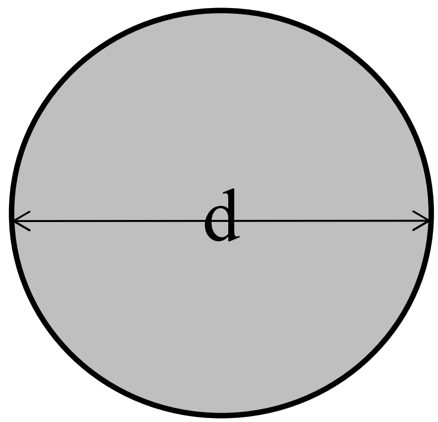
1. Medir el volumen a partir de las dimensiones



- Instrumento

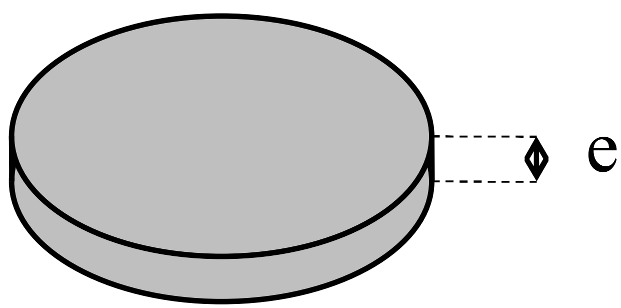
- Método

1. Medir el volumen a partir de las dimensiones



$$V = \pi r^2 e$$

$$\Delta V^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 (\Delta r)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial e}\right)^2 (\Delta e)^2$$



¿y cómo obtengo Δr y Δe?

-Instrumento

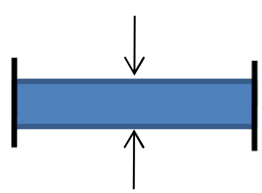
-Método

1. Medir el volumen a partir de las dimensiones

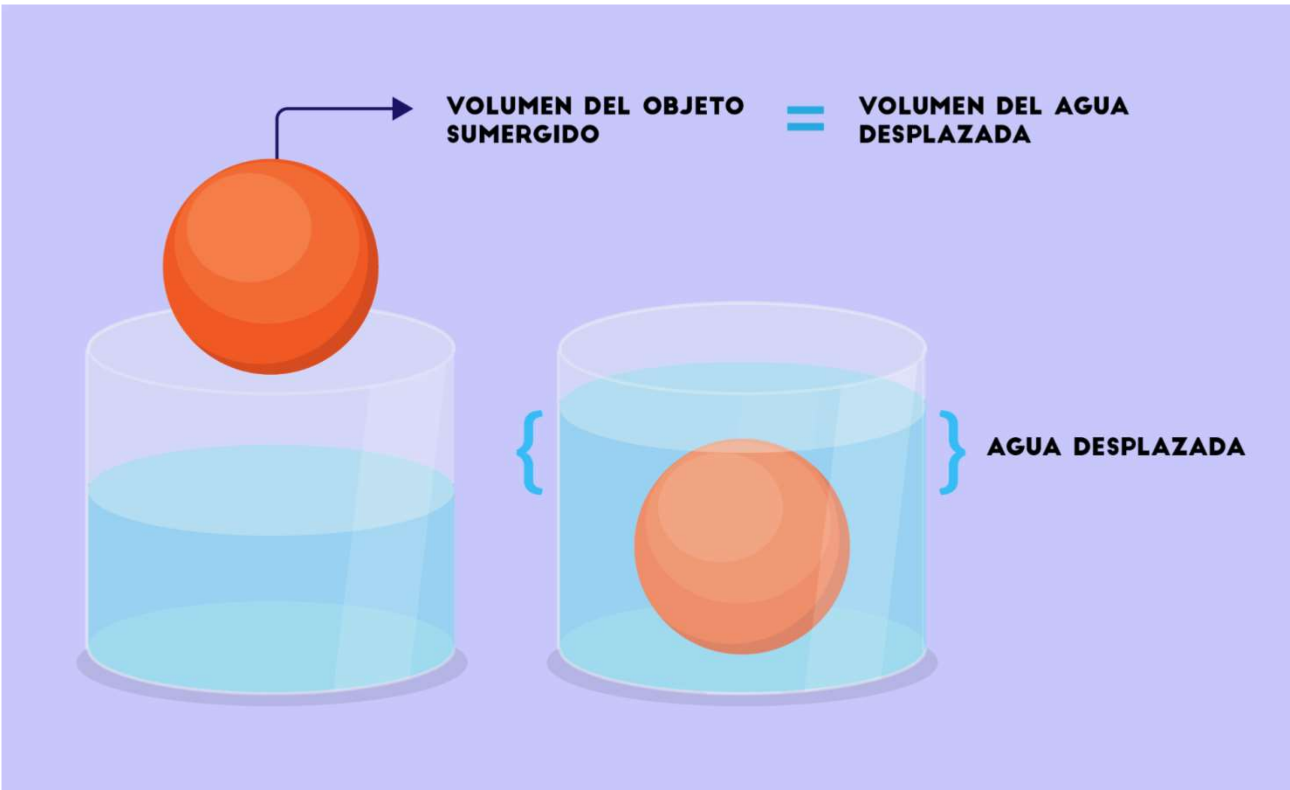
- Si uso $r = d/2 \rightarrow$ propagar el error de d
- Si uso $p = 2\pi r^2 \rightarrow$ propagar el error de p

-Si mido e directamente $\rightarrow \surd$
-Si uso $E = ne \rightarrow$ propagar el error de E

“Sencillo”, precisión (calibre, regla),
“comodidad”/exactitud, error relativo (n apiladas).



2. Medir el volumen a partir de sumergir el objeto en un líquido



$$V = V_f - V_i$$

Precisión (cantidad, ojo 2 pasos).

Irregularidades.

$$\boxed{\Delta V^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial V_f}\right)^2_{V_{f0},V_{i0}} (\Delta V_f)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial V_i}\right)^2_{V_{f0},V_{i0}} (\Delta V_i)^2}$$

3. Medir el volumen a partir de su masa y su densidad

$V = M/\rho$; ρ: densidad de “masa”

Balanza $\rightarrow$ Peso ; Para obtener V necesito $\rightarrow$ masa

$P = M.g$; Pero además $\rightarrow$ la balanza usa g “fuerza”

$$\Delta V^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)^2 (\Delta\rho)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial M}\right)^2 (\Delta M)^2$$

3. Medir el volumen a partir de su masa y su densidad

Ojo con ρ: Moneda uniforme

- Material puro $\rightarrow$ OK
- Aleación :
  (sólo para la de 50c)
  f_1 de M_1 y f_2 de M_2
  $\rho = f_1 . \rho_1 + f_2 . \rho_2$
  NO CONFUNDIR f CON %

Moneda no uniforme

Si no tienen balanza: Tabla. Error?

Medir el volumen de cuerpos

Datos útiles

ρ_{Cu} = 8,96 g/cm^3

ρ_{Al} = 2,7 g/cm^3

ρ_{Ni} = 8,91 g/cm^3

¿Los materiales serán libres de impurezas?

Medir el volumen de cuerpos

http://www.bcra.gob.ar/MediosPago/Nueva_familia_monedas.asp

Datos útiles

ρ_{acero} = 7,85 g/cm^3

ρ_{Alpaca} = 8,73 g/cm^3

¿y el depósito de
Cu o Latón?

¿Qué error asignamos a la
densidad

Consideraciones

- Identificar claramente las magnitudes de medición directa, las intermedias y las finales (no es necesario que sea explícito, pero define el número de pasos)
- Analizar cómo influye el error de cada magnitud en el error del volumen. Error absoluto/error relativo. Magnitudes con distintas unidades
- Precisión de los instrumentos utilizados
- Ventajas y desventajas de cada método, precauciones
- Confiabilidad de las magnitudes utilizadas (la medí yo?, la obtuve?, qué tan confiable es?)

A Laburar!!!