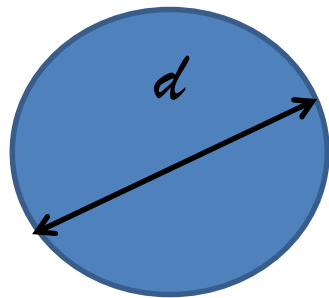


Mediciones indirectas
Propagación de errores

Magnitudes con incertidumbres instrumentales

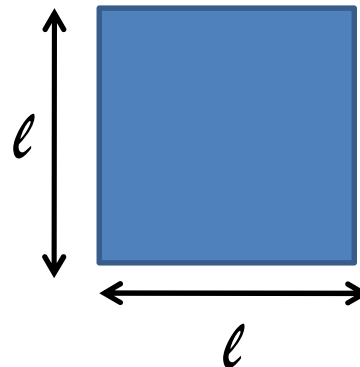
Magnitudes que no pueden ser medidas directamente con un instrumento:

Por ej: AREA de un objeto



$$A = \frac{\pi}{4} d^2$$

$$d = d_0 \pm \Delta d$$



$$A = l^2$$

$$l = l_0 \pm \Delta l$$

$$A = A_0 \pm \Delta A$$

Propagación de incertidumbres

Area del cuadrado:

$$A_{\max} = (\ell_0 + \Delta\ell)^2$$

$$A_{\min} = (\ell_0 - \Delta\ell)^2$$

$$A_0 = \frac{A_{\max} + A_{\min}}{2}$$

$$\Delta A = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{2}$$

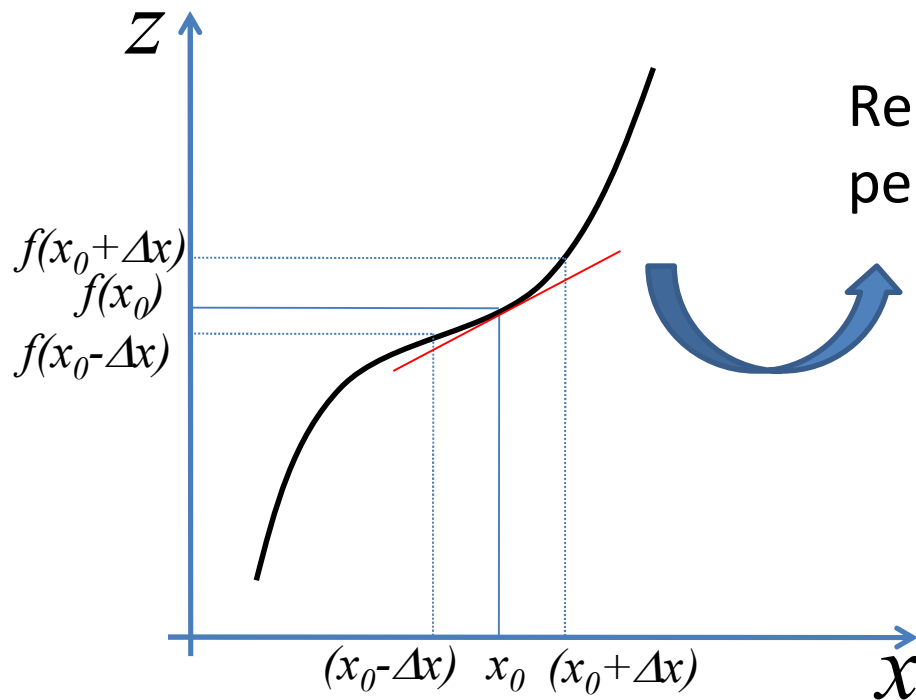
$$A_0 = \frac{2\ell_0^2 + \cancel{2\Delta\ell^2}}{2} \approx \ell_0^2$$

$$\Delta A = \frac{4\ell_0\Delta\ell}{2} = 2\ell_0\Delta\ell$$

Queremos determinar el valor de una magnitud z
partir de la medición directa de una magnitud x

$$z = f(x)$$

$$x = (x_0 \pm \Delta x)$$



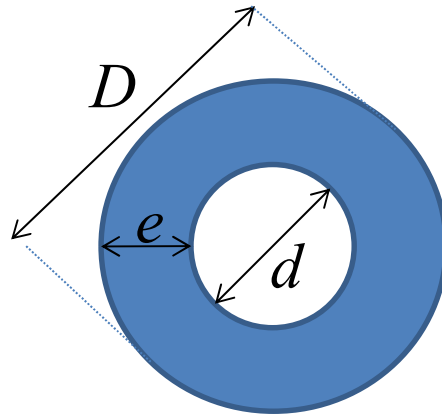
Recta tangente a $f(x_0)$
pendiente: $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0}$

$$z = (z_0 \pm \Delta z)$$

$$z_0 = f(x_0) \quad \Delta z = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} * \Delta x$$

Magnitudes determinadas a partir de la medición directa de varias magnitudes

Ejemplos



$$e = D - d$$

$$e_{max} = (D_0 + \Delta D) - (d_0 - \Delta d) = D_0 - d_0 + (\Delta D + \Delta d)$$

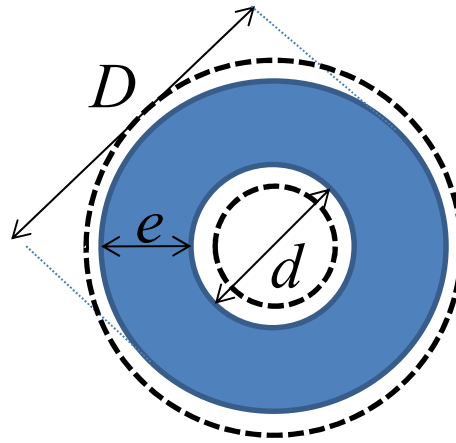
$$e_{min} = (D_0 - \Delta D) - (d_0 + \Delta d) = D_0 - d_0 - (\Delta D + \Delta d)$$

$$e = e_0 \pm \Delta e$$

$$e = D_0 - d_0 \quad \Delta e = \Delta D + \Delta d$$

Magnitudes determinadas a partir de la medición directa de varias magnitudes

Ejemplos



$$e = D - d$$

$$e_{max} = (D_0 + \Delta D) - (d_0 - \Delta d) = D_0 - d_0 + (\Delta D + \Delta d)$$

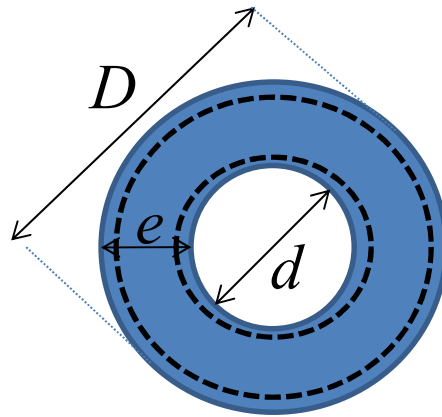
$$e_{min} = (D_0 - \Delta D) - (d_0 + \Delta d) = D_0 - d_0 - (\Delta D + \Delta d)$$

$$e = e_0 \pm \Delta e$$

$$e_0 = D_0 - d_0 \quad \Delta e = \Delta D + \Delta d$$

Magnitudes determinadas a partir de la medición directa de varias magnitudes

Ejemplos



$$e = D - d$$

$$e_{max} = (D_0 + \Delta D) - (d_0 - \Delta d) = D_0 - d_0 + (\Delta D + \Delta d)$$

$$e_{min} = (D_0 - \Delta D) - (d_0 + \Delta d) = D_0 - d_0 - (\Delta D + \Delta d)$$

$$e = e_0 \pm \Delta e$$

$$e_0 = D_0 - d_0 \quad \Delta e = \Delta D + \Delta d$$

Caso general
Propagación del Error

UNO NO PUEDE SIMPLEMENTE



ESTIMAR EL ERROR

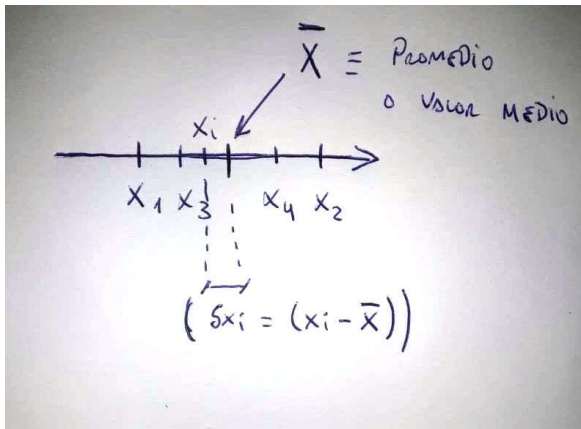
Caso general

Propagación del Error

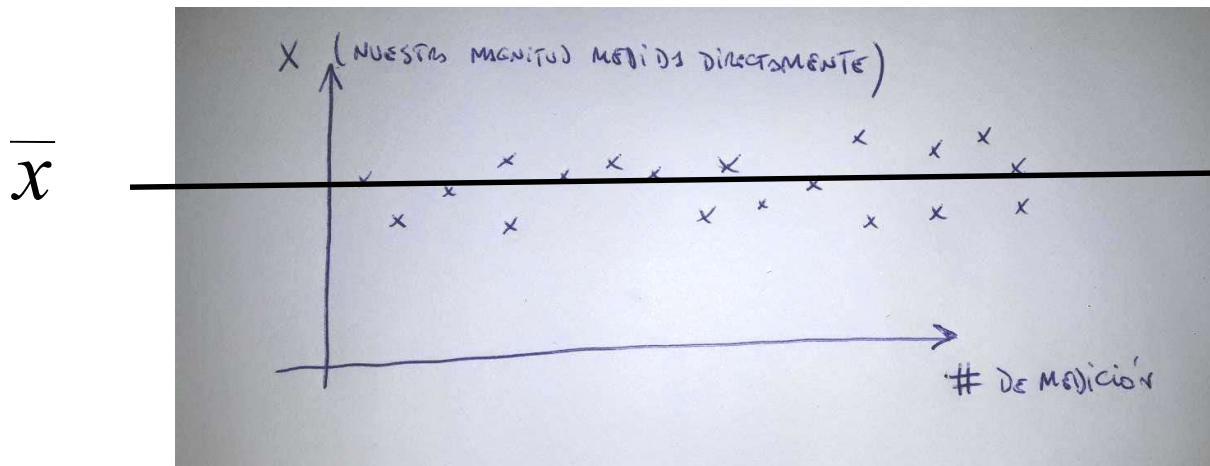
- Revisemos el caso en el que queremos obtener
 $z = f(x, y)$
(después generalizaremos a $z = f(x_1, x_2, x_3, x_4 \dots)$)
- Supondremos que x está sometida a fluctuaciones aleatorias (como el T del péndulo)
(después generalizaremos a casos en que el error de apreciación es preponderante)

Caso general

Propagación del Error – Visión Estadística



$$i = 1, \dots, N$$



El promedio es
~ centro de
masa de la
nube de puntos

Caso general

Propagación del Error – Visión Estadística

The image shows a handwritten derivation on a whiteboard. At the top, the variance formula is written as $V(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$. Below this, the derivative of the variance with respect to the mean is set to zero: $\frac{dV}{d\bar{x}} = 0 \rightarrow -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 2(x_i - \bar{x}) = 0$. This is then simplified to $\frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} - \frac{\sum_{i=1}^N \bar{x}}{N} = 0$. The term $\sum_{i=1}^N \bar{x}$ is circled, and an arrow points to the label $N\bar{x}$. Finally, the mean is defined as $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$.

Buscamos que la varianza sea mínima

El promedio ES el valor que hace mínima a la varianza

Caso general

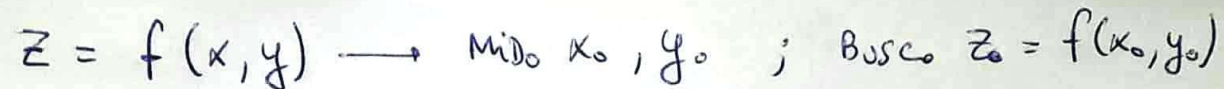
Propagación del Error – Visión Estadística

- x e y son VA independientes, entonces

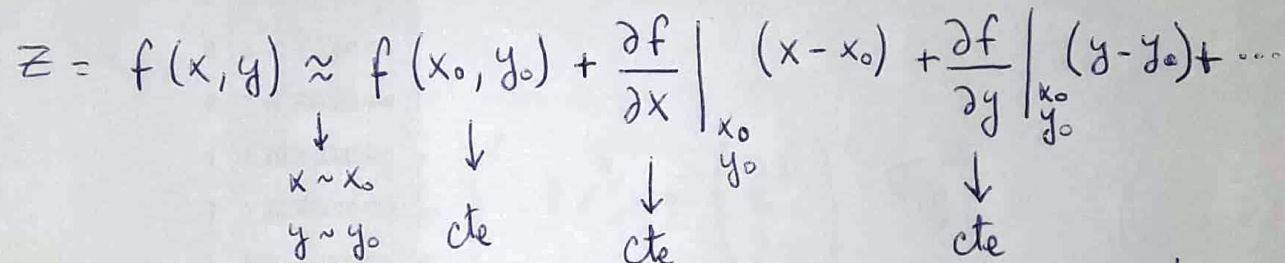
$$V(x+y) = V(x) + V(y)$$

- Si conocemos $V(x)$, se cumple que:

$$V(k.x) = k^2 V(x) \quad (k = \text{cte})$$


$$Z = f(x, y) \longrightarrow \text{Mido } x_0, y_0 \quad ; \quad \text{Busco } Z_0 = f(x_0, y_0)$$

Puedo desarrollar f en serie de Taylor en un entorno de (x_0, y_0) :


$$Z = f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x_0 \\ y_0}} (x - x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{x_0 \\ y_0}} (y - y_0) + \dots$$

\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow
 $x \sim x_0$ $y \sim y_0$ cte cte

Caso general

Propagación del Error – Visión Estadística

- x e y son VA independientes, entonces

$$V(x+y) = V(x) + V(y)$$

- Si conocemos $V(x)$, se cumple que:

$$V(k.x) = k^2 V(x) \quad (k = \text{cte})$$

The image shows a handwritten derivation on a piece of paper. It starts with the Taylor expansion of a function $z = f(x, y)$ around a point (x_0, y_0) . The expansion is written as $z = f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0} (y - y_0) + \dots$. Below this, arrows indicate that $x \sim x_0$ and $y \sim y_0$, and that the partial derivatives are constant (cte) at the point (x_0, y_0) . A bracket groups the linear terms. Below that, the variance of z is given as $V(z) \approx V(f(x_0, y_0)) + V(\dots)$, with a note that $V(f(x_0, y_0)) = 0$ because it is a constant. Finally, the variance is expressed as $V(z) \approx V\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0} (x - x_0)\right) + V\left(\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0} (y - y_0)\right)$.

$$z = f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0} (y - y_0) + \dots$$

\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow
 $x \sim x_0$ $y \sim y_0$ cte cte

$$V(z) \approx V(f(x_0, y_0)) + V(\dots)$$

\downarrow \parallel
 suma 0

$$V(z) \approx V\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0} (x - x_0)\right) + V\left(\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0} (y - y_0)\right)$$

Caso general

Propagación del Error – Visión Estadística

- x e y son VA independientes, entonces

$$V(x+y) = V(x) + V(y)$$

- Si conocemos $V(x)$, se cumple que:

$$V(k.x) = k^2 V(x) \quad (k = \text{cte})$$

$$V(z) \approx \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0}^2 V(x-x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{y_0}^2 V(y-y_0)$$

Proo
x cte

$$V(x-x_0) = V(x) - V(x_0) = V(x)$$

idem $V(y-y_0)$

Caso general

Propagación del Error – Visión Estadística

- x e y son VA independientes, entonces

$$V(x+y) = V(x) + V(y)$$

- Si conocemos $V(x)$, se cumple que:

$$V(k.x) = k^2 V(x) \quad (k = \text{cte})$$

$$\Rightarrow V(z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0, y_0}^2 V(x) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_0, y_0}^2 V(y)$$

Desviación estándar

o sea

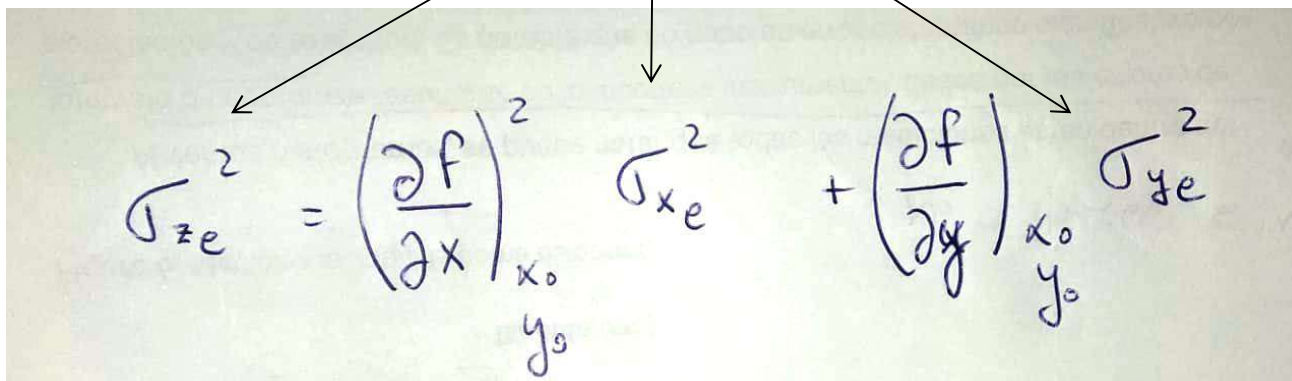
$$\sigma_z^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0, y_0}^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_0, y_0}^2 \sigma_y^2$$

Caso general

Propagación del Error – Visión Estadística

Dado que $\sigma_e = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$

Error estadístico

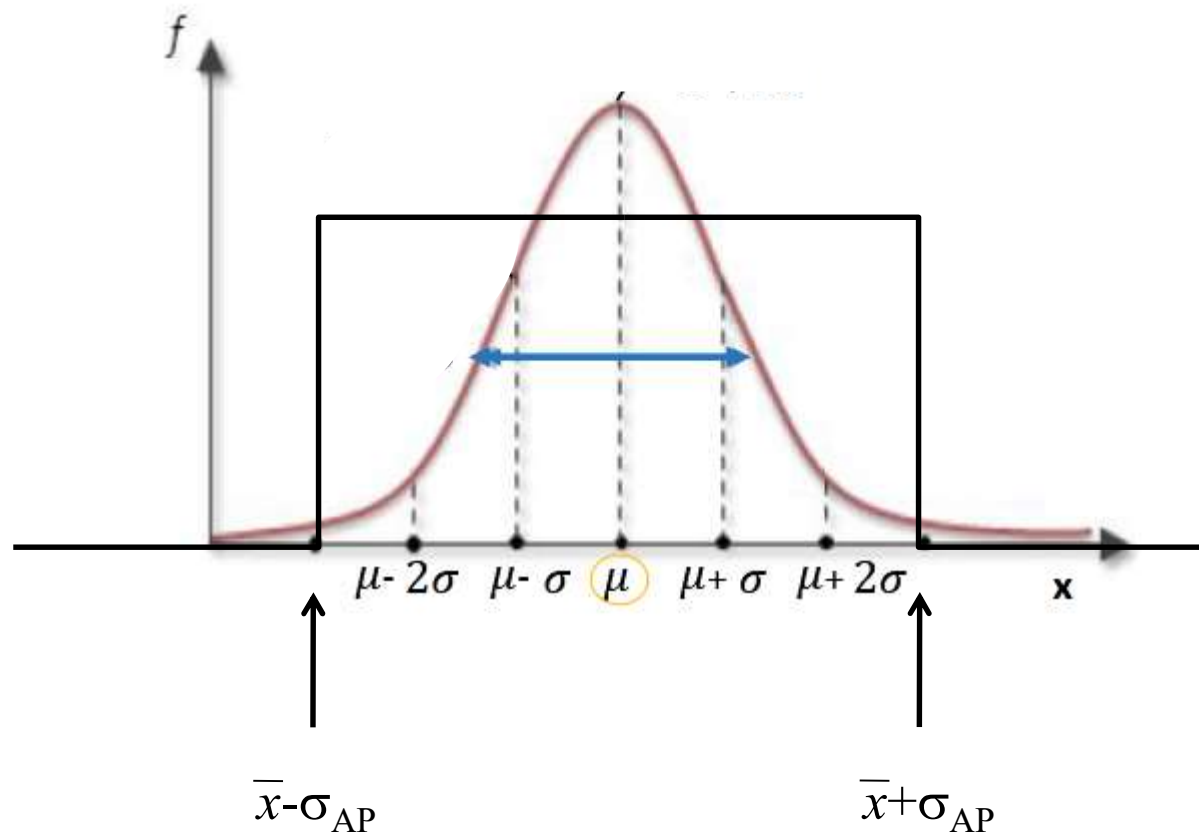


The image shows a handwritten equation on a piece of paper. The equation is:
$$\sigma_{ze}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0, y_0}^2 \sigma_{xe}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_0, y_0}^2 \sigma_{ye}^2$$
 Above the equation, the text "Error estadístico" is written, with three arrows pointing down to the three main terms of the equation: the left-hand side, the first term, and the second term.

Propagación del Error Generalización

******IMPORTANTE******

¿Qué hacemos si el error más relevante es el de apreciación?



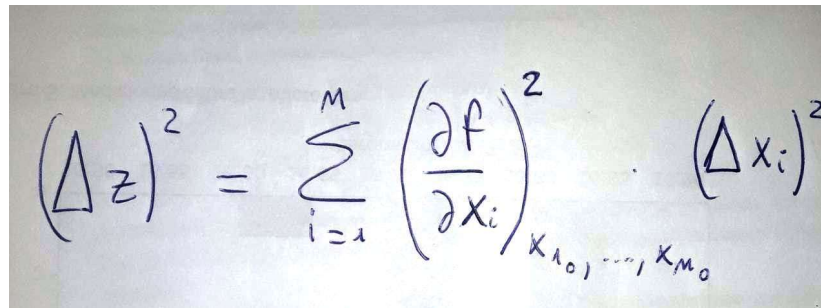
Propagación del Error

Generalización

Recordemos $\Delta x = \sqrt{\sigma_N^2 + \sigma_e^2}$

Además, el desarrollo de Taylor mostrado para 2 variables (x e y) puede generalizarse para n variables (x_1, \dots, x_n)

Entonces, generalizando al caso de la determinación de una magnitud $z = f(x_1, \dots, x_n)$ a partir de las mediciones directas de x_1, \dots, x_n , llegamos a:


$$(\Delta z)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{x_{10}, \dots, x_{n0}}^2 (\Delta x_i)^2$$

Donde (x_{10}, \dots, x_{n0}) son los valores medidos de (x_1, \dots, x_n) , Δx_i es el error de la variable y Δz es el error de propagación de z .

Propagación del Error

Casos más comunes

$$- f(x, y, z) = ax + by - cz \quad ; \quad \Delta x, \Delta y, \Delta z$$

$$\Delta f^2 = a^2 \Delta x^2 + b^2 \Delta y^2 + c^2 \Delta z^2$$

$$- g(x, y, z) = G x^a y^b z^c$$

$$\Delta g^2 = \left[\left(C a x^{a-1} y^b z^c \right)^2 \Delta x^2 + \left(C x^a b y^{b-1} z^c \right)^2 \Delta y^2 + \left(C x^a y^b c z^{c-1} \right)^2 \Delta z^2 \right]$$

$$\frac{\Delta g^2}{g^2} = \left[\frac{\quad}{(G x^a y^b z^c)^2} \right]$$

$$\frac{\Delta g^2}{g^2} = a^2 \frac{\Delta x^2}{x^2} + b^2 \frac{\Delta y^2}{y^2} + c^2 \frac{\Delta z^2}{z^2}$$

Propagación del Error

Casos más comunes

$$h(x, y) = y \ln x$$

$$\Delta h^2 = \underbrace{\left(y \frac{1}{x}\right)^2}_{\text{DIVERGES } P/x \rightarrow 0} \Delta x^2 + (\ln x)^2 \Delta y^2$$

Medir el volumen de cuerpos

$$\text{Moneda: } V = (\bar{V} \pm \Delta V)$$

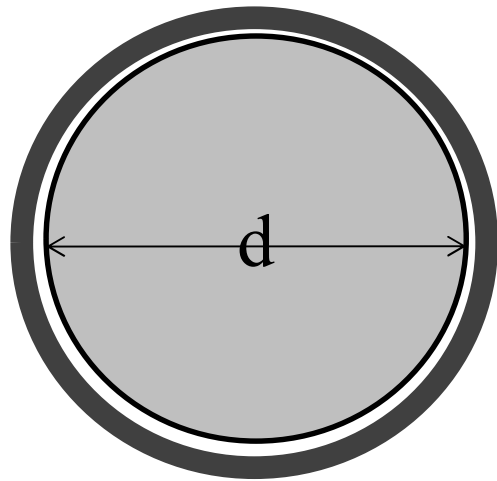
- Misma moneda, único material
- Al menos 2 métodos
- Análisis de la influencia de los errores de las magnitudes de medición directa en la magnitud indirecta (V).

Medir el volumen de cuerpos

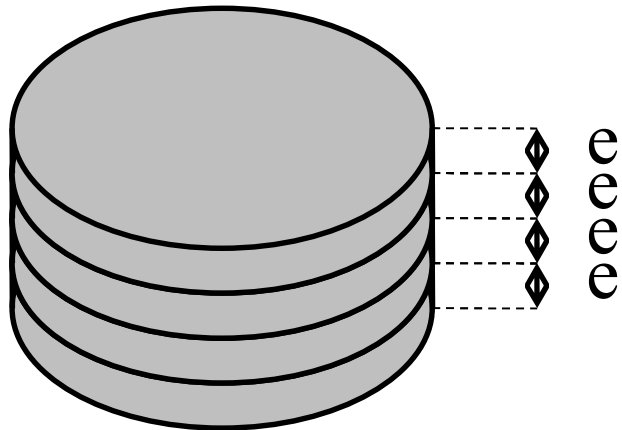
$$\text{Moneda: } V = (\bar{V} \pm \Delta V)$$

1. Medir las dimensiones y determinar el volumen a partir de su geometría
2. Medir el volumen sumergiendo el cuerpo en agua
3. Medir la masa y determinar el volumen tomando el valor de densidad del material

1. Medir el volumen a partir de las dimensiones

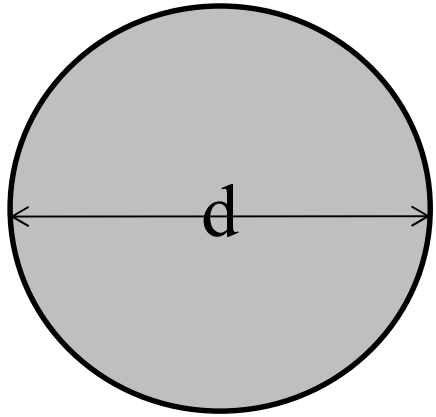


- Instrumento



- Método

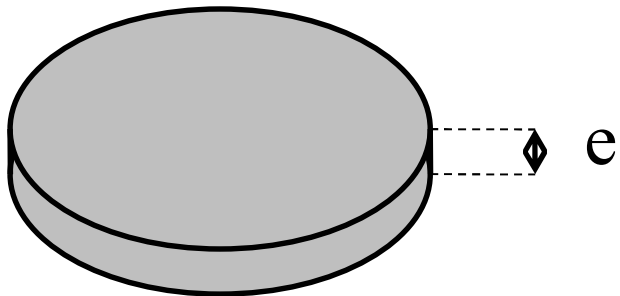
1. Medir el volumen a partir de las dimensiones



$$V = \pi r^2 e$$

$$\Delta V^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 (\Delta r)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial e} \right)^2 (\Delta e)^2$$

¿y cómo obtengo Δr y Δe ?



- Instrumento
- Método

1. Medir el volumen a partir de las dimensiones

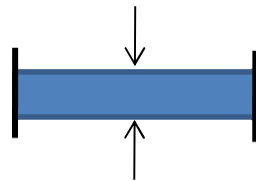
- Si uso $r = d/2 \rightarrow$ propagar el error de d
- Si uso $p = 2\pi r^2 \rightarrow$ propagar el error de p

-Si mido e directamente $\rightarrow \sqrt{\quad}$

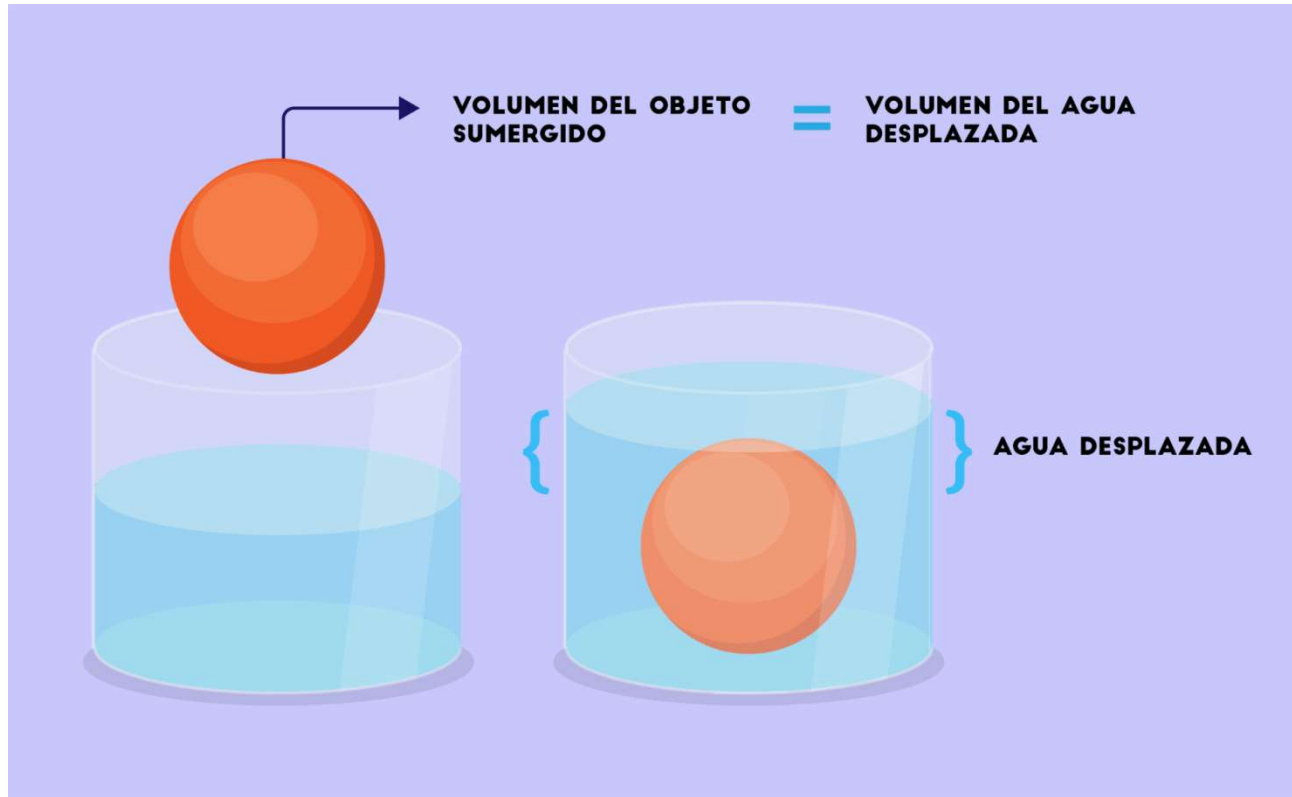
-Si uso $E = ne \rightarrow$ propagar el error de E

“Sencillo”, precisión (calibre, regla),

“comodidad”/exactitud, error relativo (n apiladas).



2. Medir el volumen a partir de sumergir el objeto en un líquido



$$V = V_f - V_i$$

Precisión
(cantidad,
ojo 2 pasos).

Irregularidades.

$$\Delta V^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial V_f} \right)_{V_{f0}, V_{i0}}^2 (\Delta V_f)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial V_i} \right)_{V_{f0}, V_{i0}}^2 (\Delta V_i)^2$$

3. Medir el volumen a partir de su masa y su densidad

$$V = M/\rho ; \rho: \text{densidad de "masa"}$$

Balanza \rightarrow Peso ; Para obtener V necesito \rightarrow masa

$P = M.g$; Pero además \rightarrow la balanza usa g "fuerza"

$$\Delta V^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \right)^2 (\Delta \rho)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial M} \right)^2 (\Delta M)^2$$

3. Medir el volumen a partir de su masa y su densidad

Ojo con ρ : Moneda uniforme

Material puro \rightarrow OK

Aleación :

(sólo para la de 50c)

f_1 de M1 y f_2 de M2

$\rho = f_1 \cdot \rho_1 + f_2 \cdot \rho_2$

NO CONFUNDIR f CON %

Moneda  uniforme

Si no tienen balanza: Tabla. Error?

Medir el volumen de cuerpos



Datos útiles

$$\rho_{\text{Cu}} = 8,96 \text{ g/cm}^3$$

$$\rho_{\text{Al}} = 2,7 \text{ g/cm}^3$$

$$\rho_{\text{Ni}} = 8,91 \text{ g/cm}^3$$

¿Los materiales serán libres de impurezas?

Medir el volumen de cuerpos

http://www.bcra.gob.ar/MediosPago/Nueva_familia_monedas.asp



Acero electrodepositado con Cu



Acero electrodepositado con Latón



Alpaca

Datos útiles

$$\rho_{\text{acero}} = 7,85 \text{ g/cm}^3$$

$$\rho_{\text{Alpaca}} = 8,73 \text{ g/cm}^3$$

¿y el depósito de
Cu o Latón?

¿Qué error asignamos a la
densidad

Consideraciones

- Identificar claramente las magnitudes de medición directa, las intermedias y las finales (no es necesario que sea explícito, pero define el número de pasos)
- Analizar cómo influye el error de cada magnitud en el error del volumen. Error absoluto/error relativo. Magnitudes con distintas unidades
- Precisión de los instrumentos utilizados
- Ventajas y desventajas de cada método, precauciones
- Confiabilidad de las magnitudes utilizadas (la medí yo?, la obtuve?, qué tan confiable es?)

A Laburar!!!

