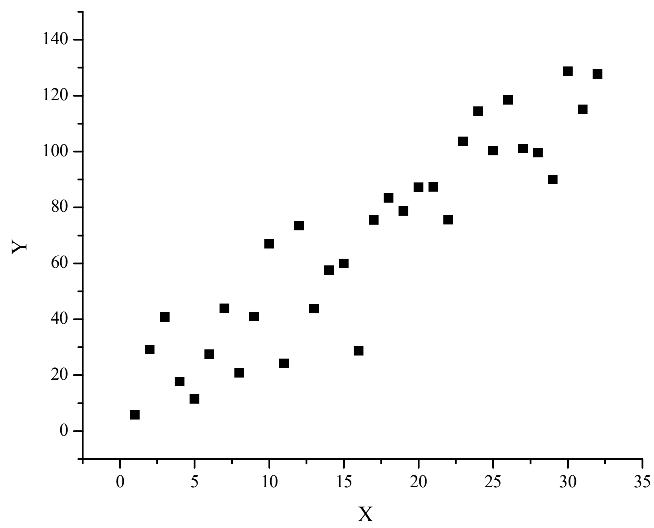
Péndulo Simple Cuadrados Mínimos

Laboratorio 1

Departamento de Física –FCEyN - UBA

Supongo que tengo 2 variables x e y, y quiero analizar una eventual relación entre ambas



x e y, son VA, surgen de la realización de mediciones independientes.

Por cada valor de x hay uno de y.

Puede ocurrir:

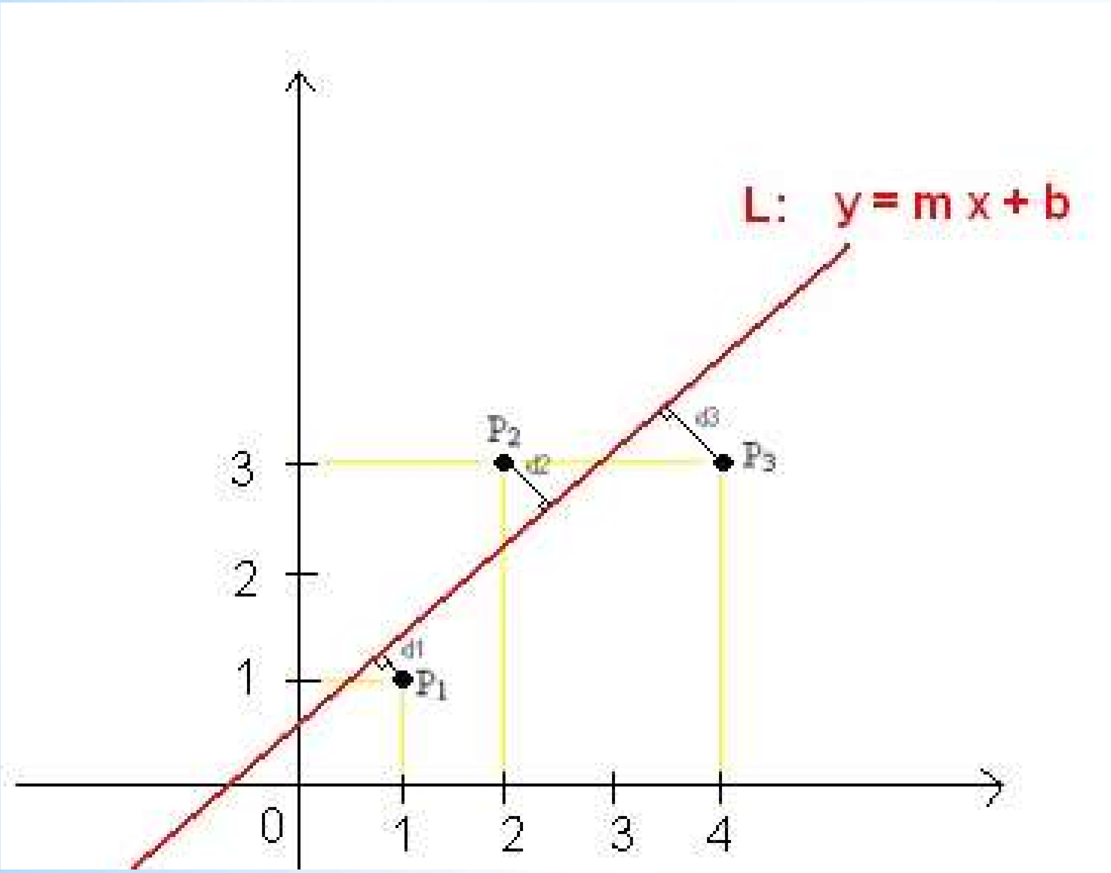
1) Conozco el modelo que las relaciona y quiero usarlo para obtener algún valor.
2) Tengo la hipótesis sobre la existencia del modelo y quiero verificarlo.
3) No conozco el modelo y lo quiero determinar.

Objetivo: Entender - predecir

Vamos a analizar el caso más simple: dependencia lineal.

- La conocemos (o tenemos una hipótesis), es lineal $\rightarrow$ OK
- La conocemos, no lineal $\rightarrow$ Cambio de variables $\rightarrow$ lineal $\rightarrow$ OK
- No la conocemos $\rightarrow$ veremos + adelante.

¿Cómo encontramos la mejor recta que ajuste nuestros datos?



Así como con el promedio y la desviación estándar, buscamos que la recta pase lo más cerca posible de la distribución de puntos.

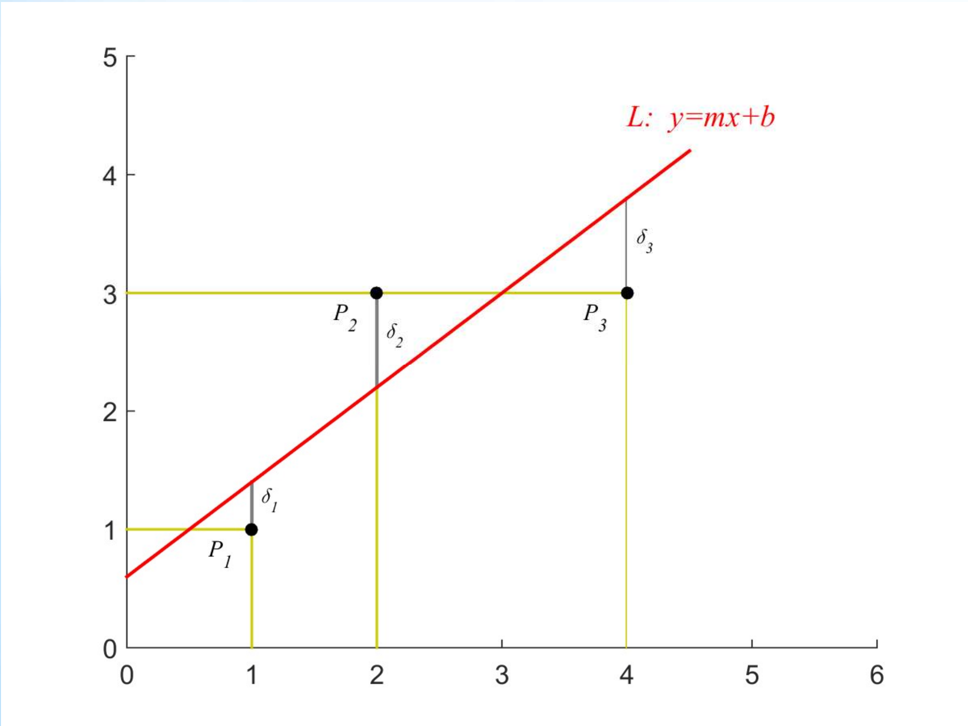
Esa recta deberá (al igual que en el caso de la varianza) minimizar la suma de las distancias cuadráticas entre los puntos y las rectas.

Sistema muy complejo si los errores en x y en y son igual de relevantes.

$\Rightarrow$ Consideramos que

$$\frac{\Delta x}{x} < \frac{\Delta y}{y}$$

¿Cómo encontramos la mejor recta que ajuste nuestros datos?



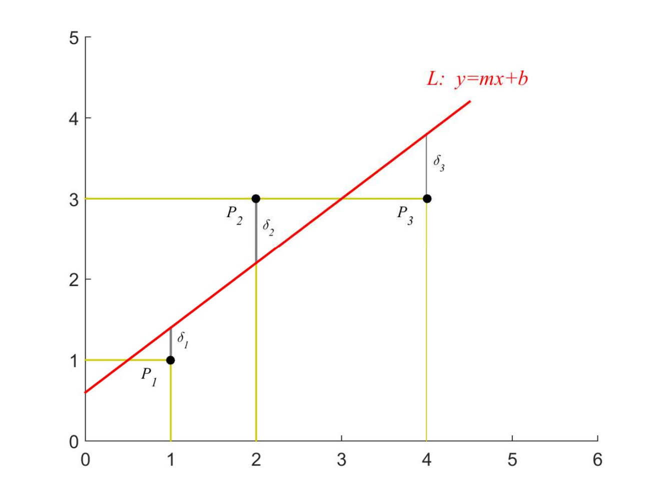
$$\boxed{y = mx + b}$$

$$\boxed{\delta y_i = y_i - (mx_i + b)}$$

$$\boxed{(\delta y_i)^2 = [y_i - (mx_i + b)\ ]^2}$$

$$M = \sum(\delta y_i)^2$$
$$= \sum {y_i}^2 + m^2 \sum {x_i}^2 + nb^2$$
$$+ 2mb \sum x_i - 2m \sum x_i y_i$$
$$- 2b \sum y_i$$

¿Cómo encontramos la mejor recta que ajuste nuestros datos?



Mejor recta: la que minimice M

$$y = mx + b$$

$$M = \sum(\delta y_i)^2 \\ = \sum {y_i}^2 + m^2 \sum {x_i}^2 + nb^2 + 2mb\sum x_i - 2m\sum x_i y_i \\ - 2b\sum y_i$$

$$\frac{\partial M}{\partial m} = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial b} = 0$$

$$2m\sum {x_i}^2 + 2b\sum x_i - 2\sum(x_i y_i) = 0$$

$$2nb + 2m\sum x_i - 2\sum y_i = 0$$

$$m = \frac{n\sum(x_i y_i) - \sum x_i \sum y_i}{n\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum {x_i}^2 \sum y_i - \sum x_i \sum(x_i y_i)}{n\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}$$

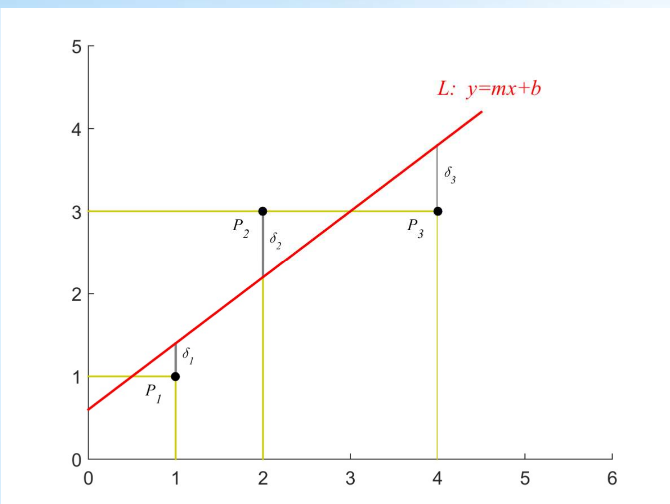
¿Cómo encontramos la mejor recta que ajuste nuestros datos? CHEQUEAR LA EC DE delta(b)

m y b son funciones de y_i

$$\boxed{m = \frac{n\sum(x_i y_i) - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}$$

$$\boxed{b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum(x_i y_i)}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}$$

Para encontrar el error de m y b, tengo que propagar en esas ecuaciones el error de y_i. (Baird, Apéndice 2)



$$S_y = \sqrt{\frac{\sum(\delta y_i)^2}{N-2}}$$

$$\Delta m = S_y \sqrt{\frac{N}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}$$

$$\Delta b = S_y \sqrt{\frac{\sum x_i}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}$$

¿Cómo medimos la calidad del ajuste?

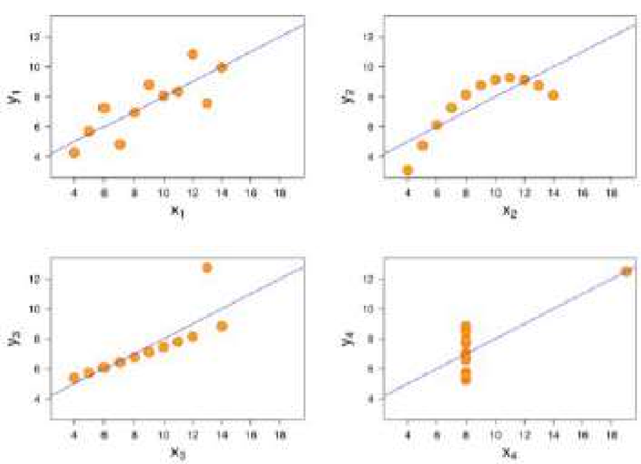
Coeficiente de correlación lineal de Pearson: CHEQUEAR EXPRESION

Si tenemos dos variables x e y, de los cuáles queremos analizar una posible correlación,

$$r = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}; Cov(x,y) = \frac{1}{N}\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Si x e y están correlacionados |r| = 1;
Correlación lineal: r tiene el signo de la pendiente (Origin: R value, módulo)

Ojo con el R^2 !!



Anscombe's quartet:

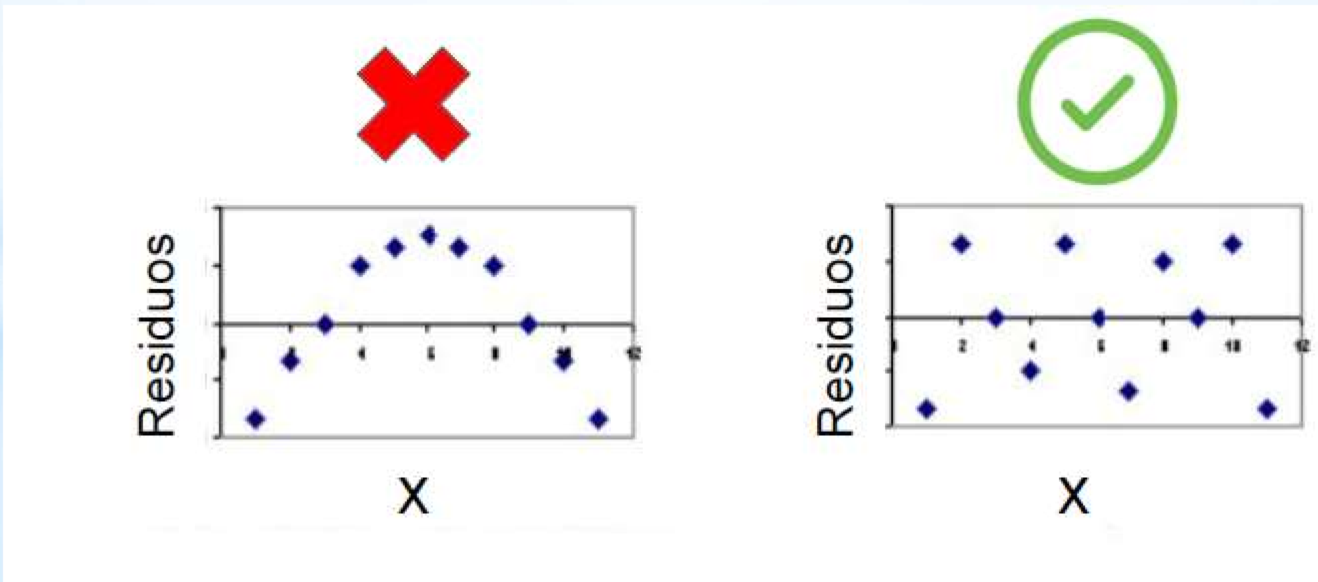
- Mismos valor medio y varianza de x.
- Casi mismos valores medios y varianzas de y.
- En los cuatro casos, mismo R^2

¿Qué está fallando?

¿Cómo medimos la calidad del ajuste?

La distribución de los datos alrededor de la recta debe ser normal.

Podemos graficar los residuos en función de x y analizarlos.

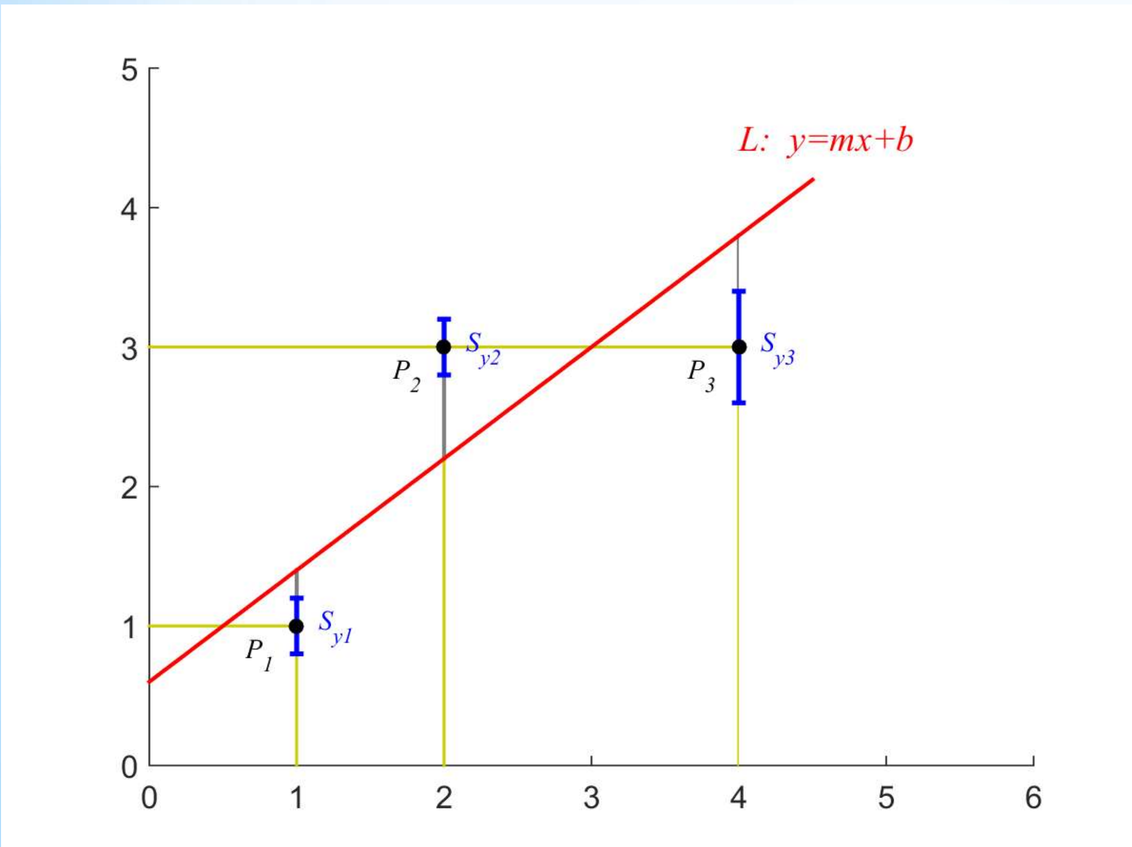


¿Cómo lo vamos a hacer?

- Origin
- SciDavis
- Python

¿Cómo lo vamos a presentar?

ERRORES



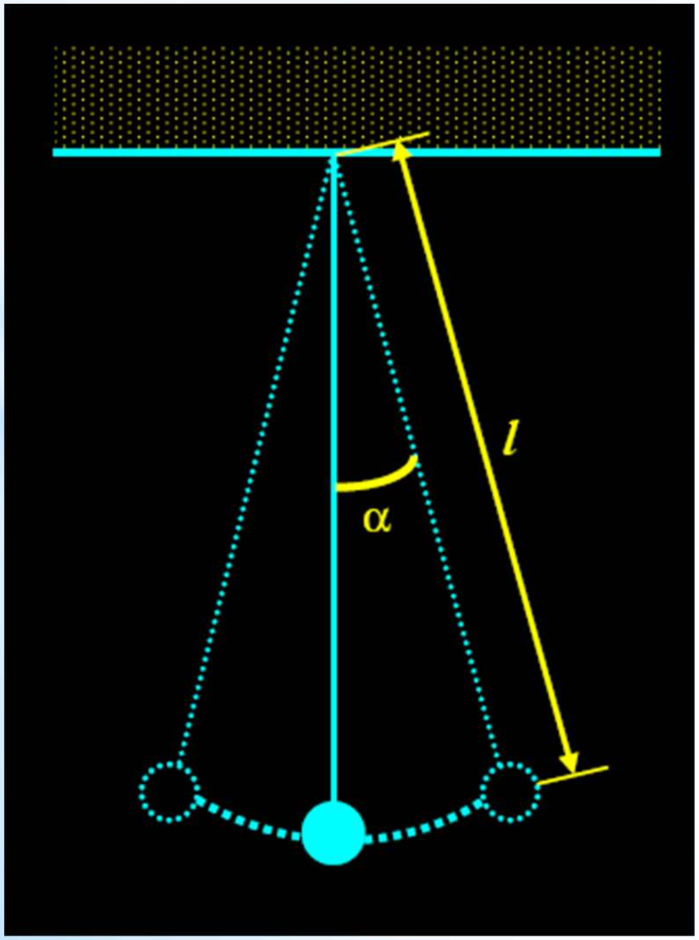
Algunas consideraciones importantes:

- ¿Es mejor un ajuste que esté contenido dentro de las barras de error de *todos los* puntos que uno que no?
- ¿Qué relación hay entre la cantidad de puntos dentro de cuyas barras de error pasa el ajuste y el error de las mediciones?
- ¿Cuántos puntos espero de cada "lado" de la recta? ¿Por qué?

Ver instructivo para agregar errores al grafico

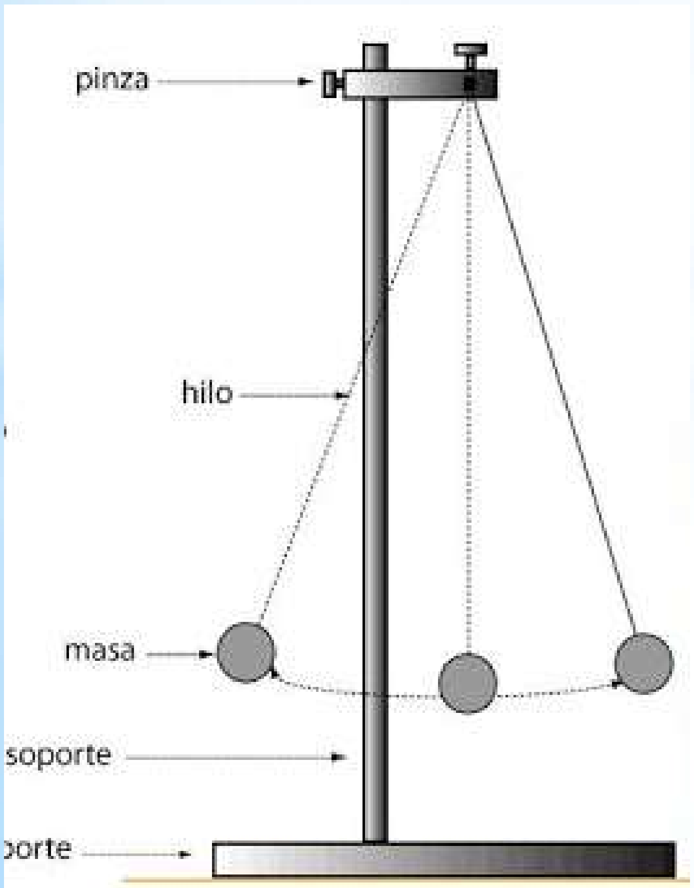
Experimento

PÉNDULO

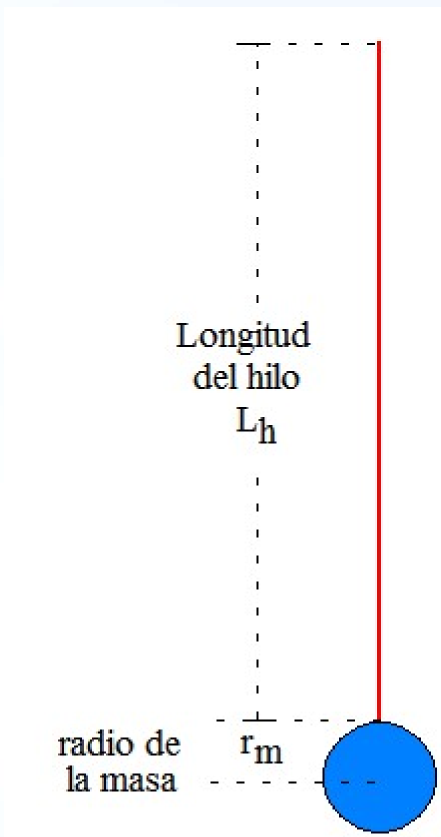


El **péndulo simple** (también llamado **péndulo ideal**) es un sistema idealizado constituido por una partícula de masa ***m*** que está suspendida mediante un hilo inextensible y sin peso. Naturalmente es imposible la realización práctica de un péndulo simple, pero si es accesible a la teoría.

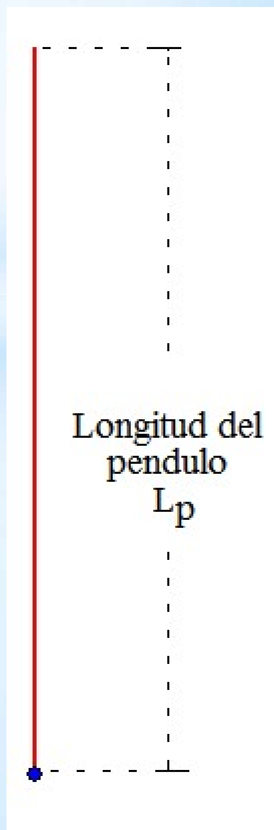
PÉNDULO



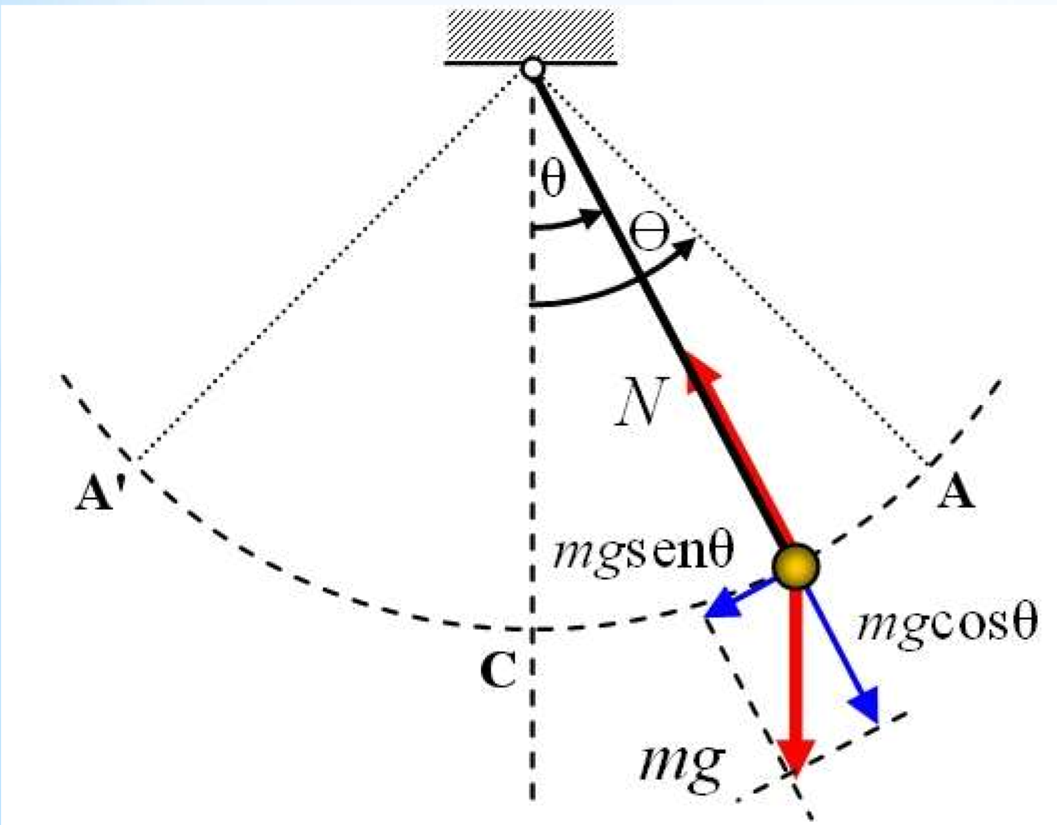
Caso real



Caso ideal



PÉNDULO



Ecuación de Movimiento:

$$F_t = -mg\sin\theta = ma_t$$

Relación entre aceleración tangencial y angular:

$$a_t = \ell\ddot{\theta}$$

Ecuación diferencial del movimiento plano del péndulo simple:

$$\ell\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$$

PÉNDULO: aproximación de pequeñas oscilaciones

Ecuación de Movimiento: $\ell\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$

Θ(º)	Θ(rad)	senΘ	dif. %	Θ(º)	Θ(rad)	senΘ	dif. %
0	0,00000	0,00000	0,00	15	0,26180	0,25882	1,15
2	0,03491	0,03490	0,02	20	0,34907	0,34202	2,06
5	0,08727	0,08716	0,13	25	0,43633	0,42262	3,25
10	0,17453	0,17365	0,51	30	0,52360	0,50000	4,72

Ecuación de movimiento armónico simple: $\ell\ddot{\theta} + g\theta = 0$

Solución: $\theta = \Theta\sin(\omega t + \phi)$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

PÉNDULO: aproximación de pequeñas oscilaciones

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

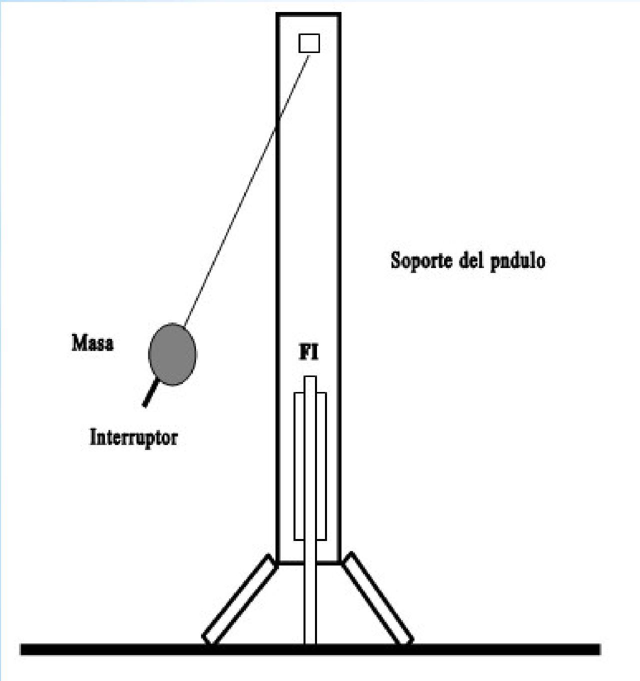
1) Conozco el modelo que las relaciona y quiero usarlo para obtener algún valor o magnitud.

no lineal $\rightarrow$ Cambio de variables $\rightarrow$ lineal

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l$$

Elegir ordenada/abscisa según el error

PÉNDULO: experimento



- Preparar el experimento según el esquema.

- Rango de variación de la longitud del péndulo
  Longitud mínima: masa puntual.
  Longitud máxima: condiciones del equipamiento.

- Amplitud inicial del péndulo (el modelo considera ángulos pequeños). Determinar en forma aproximada el ángulo máximo admisible para que el período sea aproximadamente constante.

- Paso de variación en la longitud del péndulo.

- Realizar el experimento para al menos 10 diferentes longitudes del péndulo.

*Epílogo (o sugerencia)

σ: propiedad de la V.A. x. Depende del experimento y el método.

Mido N veces $\rightarrow$ $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$

Vimos $\rightarrow$ cada x_i tiene una probabilidad del 68% $\rightarrow$ $\bar{x} \pm \sigma$

$\rightarrow$ $\bar{x}$ tiene una probabilidad del 68% $\rightarrow$ $\bar{x} \pm \dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}$

$\rightarrow$ $\dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}$ $\rightarrow$ *ERROR ESTADÍSTICO* σ_e

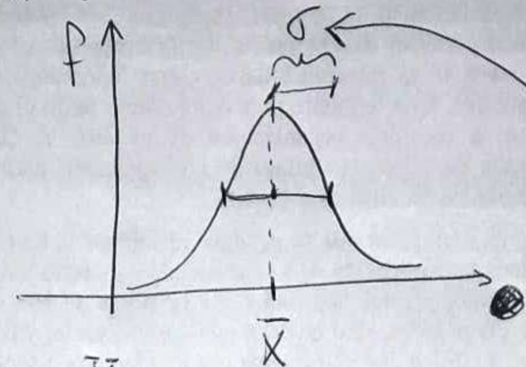
¿QUÉ OCURRE SI MIDO UNA V.A. QUE

ES N VECES x $\rightarrow$ $X = N \cdot x$

USANDO EL MISMO MÉTODO QUE PARA MEDIR x

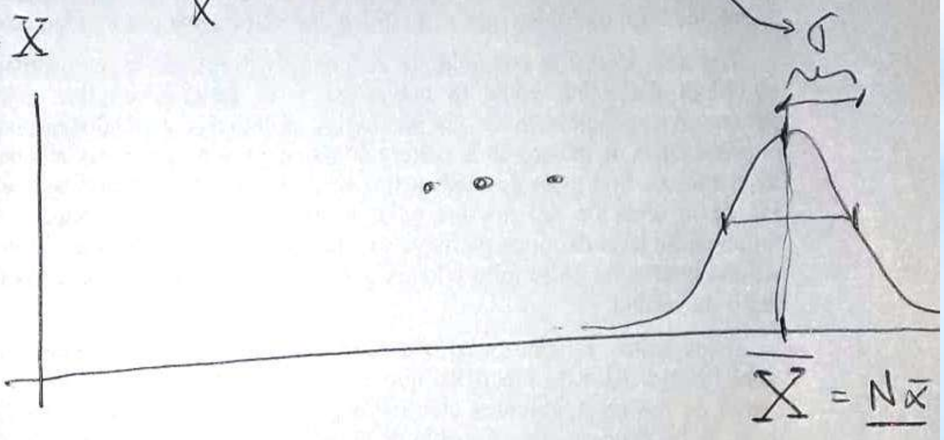
AL MEDIR x :

OBTENGO



SI MIDO $Nx = X$

OBTENGO



¿QUÉ SIGNIFICA ESTE ÚLTIMO GRÁFICO?

→ HAY UN 68% DE PROB. DE HALLAR UNA MEDICIÓN DE X EN EL INTERVALO $\bar{X} \pm \sigma$

⇒ SI MIDO 1 SOLA VEZ, USAR σ COMO ERROR DE $\bar{X}$ ESTÁ JUSTIFICADO

DADO QUE BUSCAMOS $x = \dfrac{\bar{X}}{N}$

TENGO QUE PROPAGAR EL ERROR DE $\bar{X}$ EN LA CUENTA

$$\Delta x^2 = \underbrace{\left(\frac{\partial x}{\partial \bar{X}}\right)^2}_{\frac{1}{N^2}} \underbrace{\left(\Delta \bar{X}\right)^2}_{\sigma^2} = \left(\frac{\sigma}{N}\right)^2$$

σ: propiedad de la V.A. Depende del experimento y el método.

Si en lugar de medir N veces $\rightarrow$ mido una sola vez, pero multiplico mi magnitud por N. Por ej. En lugar de 1 período del péndulo, mido N períodos.

Mi nueva V.A será $\rightarrow X = N.x$ con $\overline{X} = N\overline{x}$ ó $x = \frac{X}{N}$

X se mide con el mismo método usado previamente para x, por lo que su distribución tendrá un ancho asociado al mismo σ.

Por otro lado, sabemos que el desarrollo de la propagación del error es también válido (de hecho así empezamos) para la desviación estándar (σ).

Entonces, el error de x, obtenido a partir de la medición de X:

$$(\Delta x)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)^2 (\Delta X)^2 = \left(\frac{1}{N}\right)^2 \sigma^2 \Rightarrow \Delta x = \frac{\sigma}{N}$$

; con σ igual que la clase 3.

O sea que tengo 2 métodos para (por ejemplo) obtener el error de T:

- El método "viejo" $\dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}$

- El método "nuevo" $\dfrac{\sigma}{N}$

Para N > 1 , N siempre supera a su raíz, calculemos N para que $\Delta x_{(viejo)} = \Delta x_{(nuevo)}$, comparando con las 200 mediciones realizadas para el péndulo.