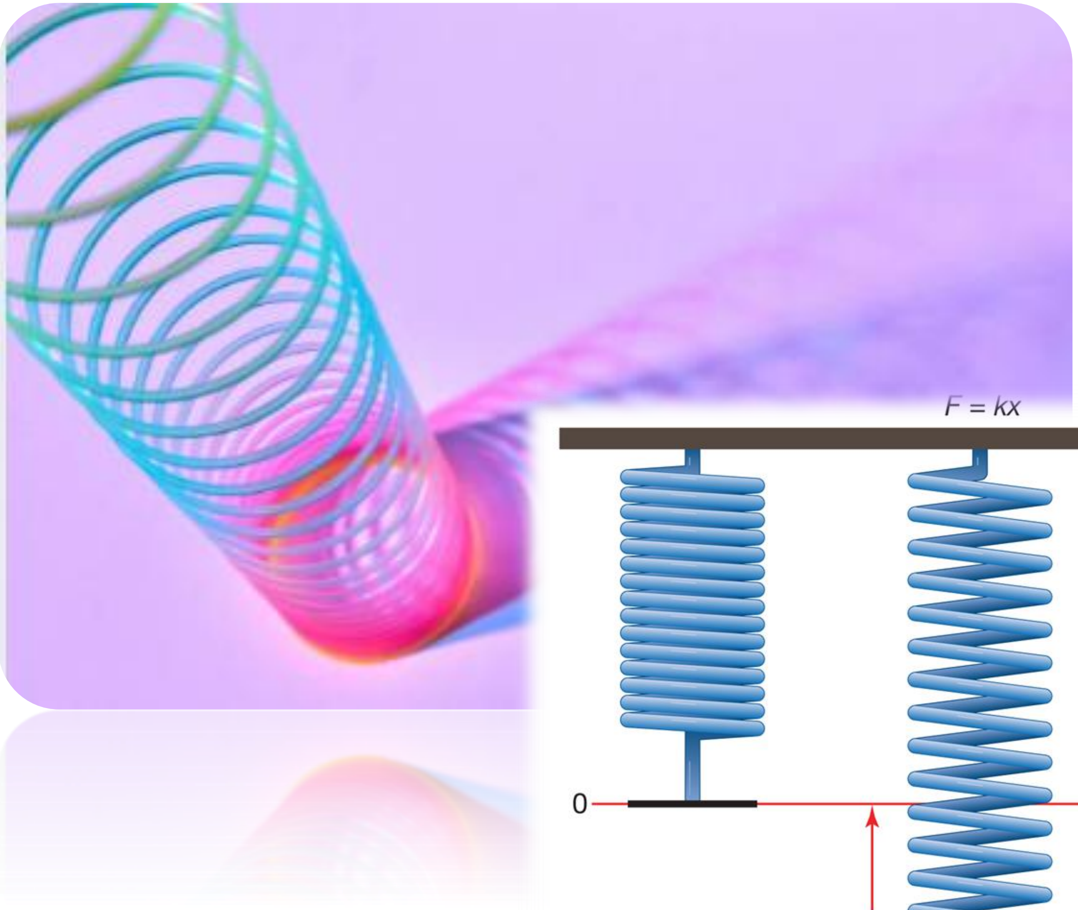
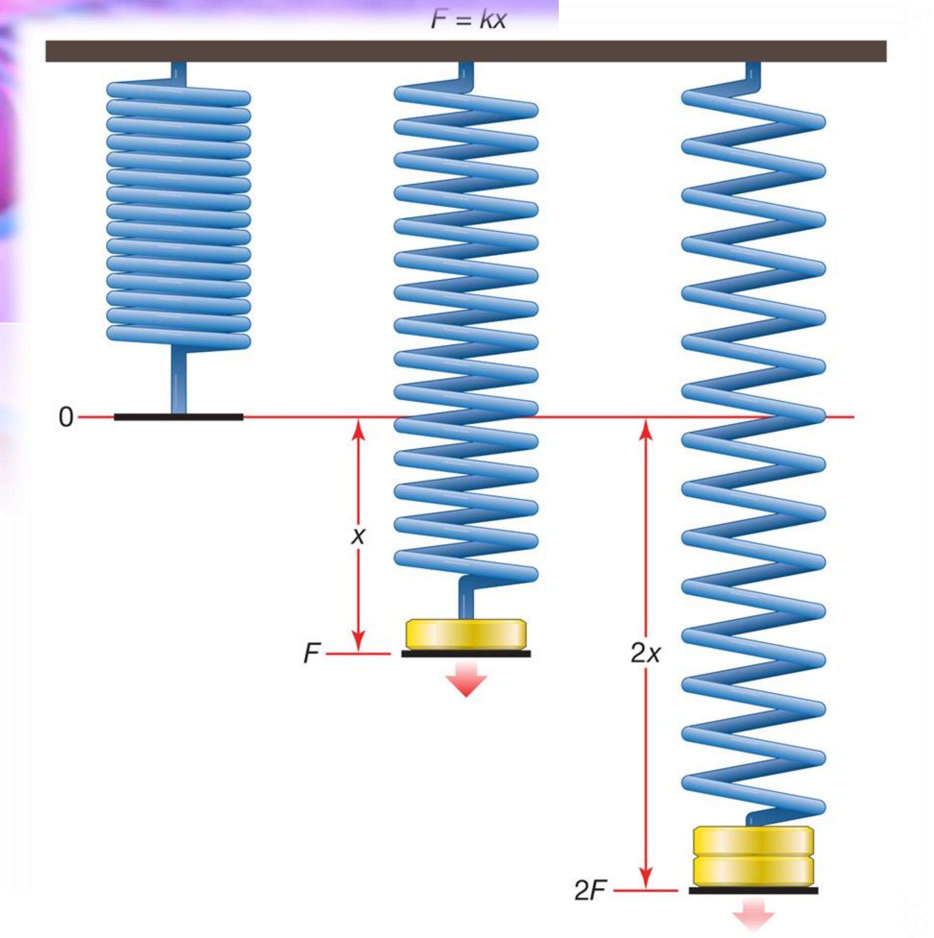


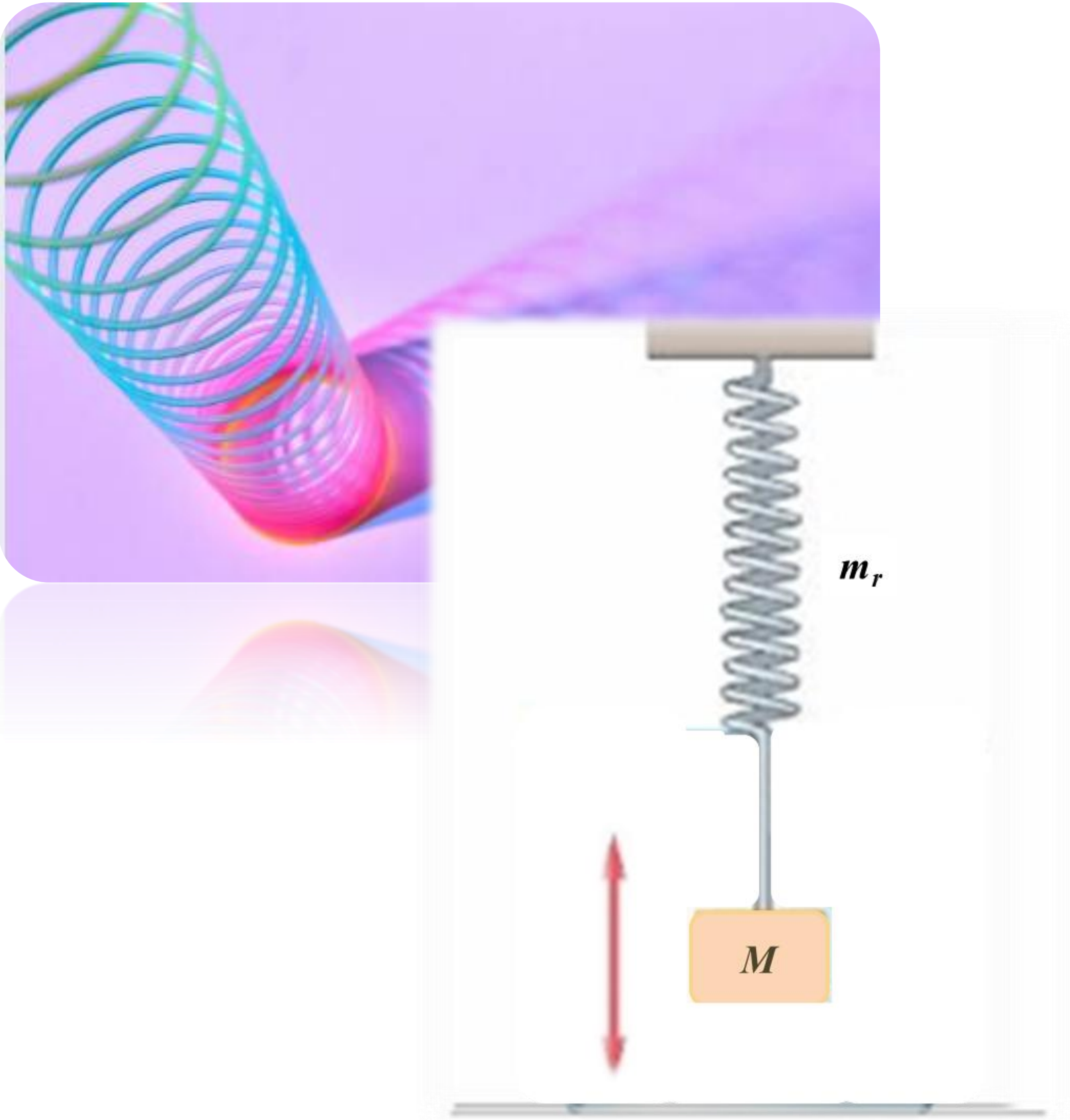


Laboratorio 1

Turno D

Clase 10
Oscilaciones amortiguadas

(10/06/2023)

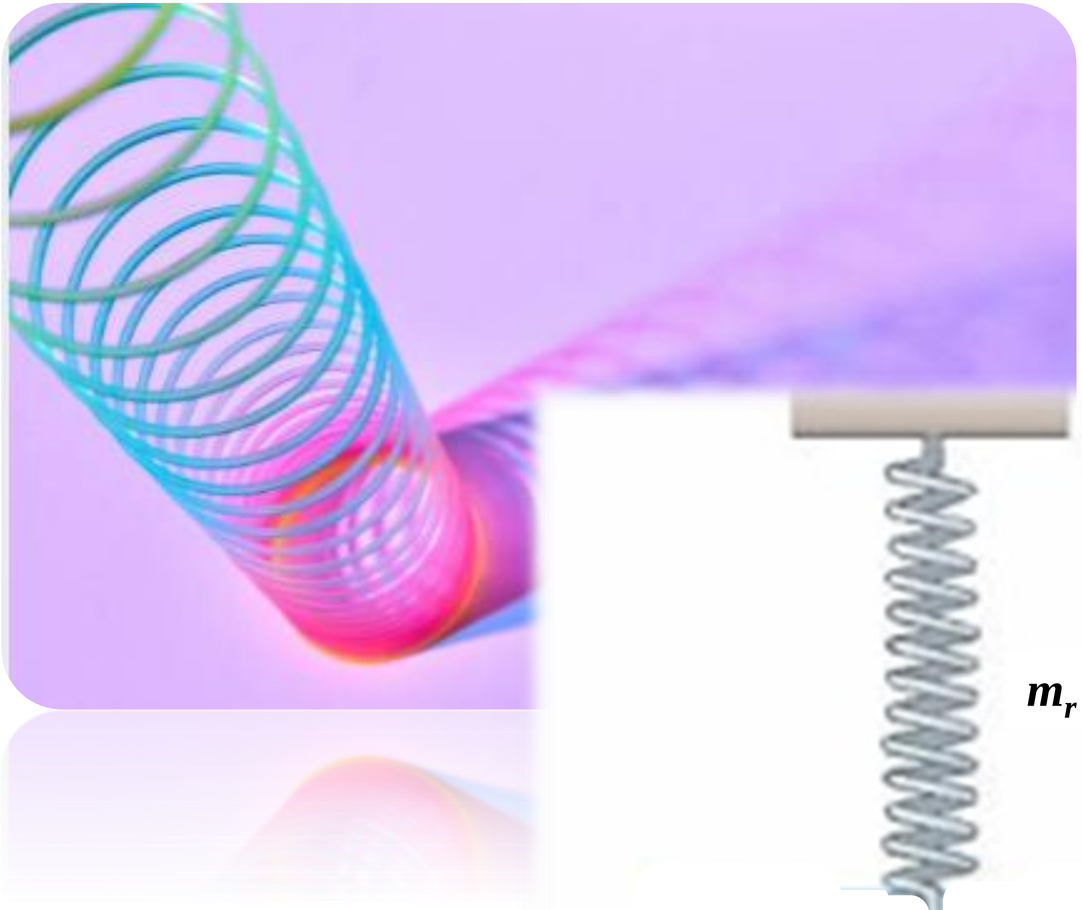


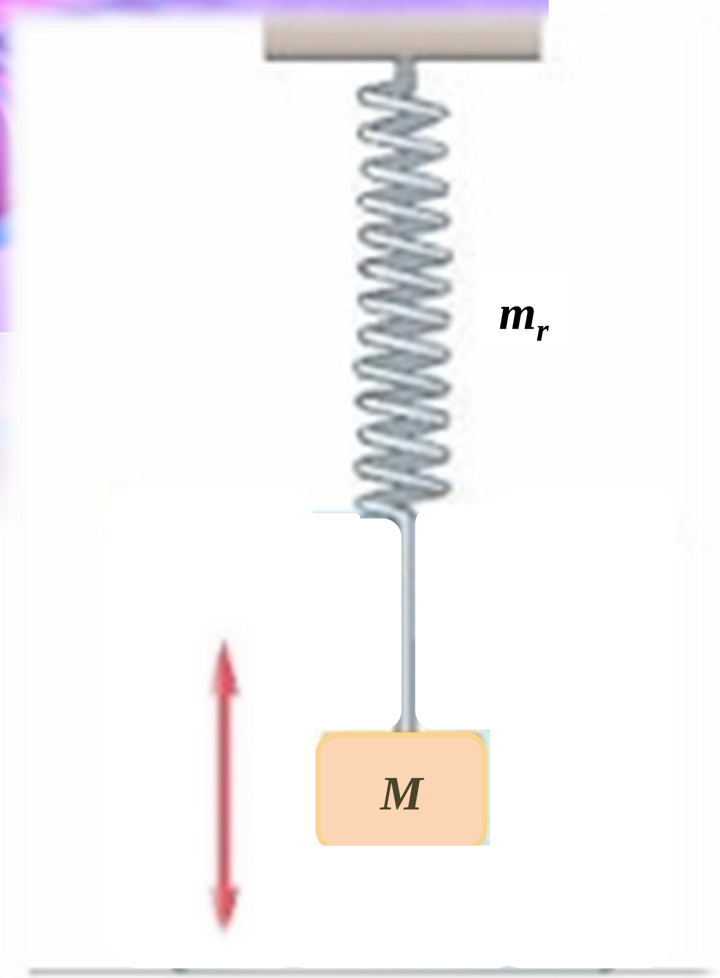
- Hemos estudiado la dinámica de un sistema masa-resorte oscilando, sin considerar amortiguamiento ni la influencia de la masa del resorte.

- ¿ Influye la masa del resorte m_r en la evaluación de la frecuencia ω_o del sistema ?

- Complementando la última clase, vamos a estudiar el movimiento oscilatorio amortiguado de un sistema simple, compuesto por un resorte y una masa oscilando en un fluido (agua).

- Poniendo el sistema en oscilación estudiaremos la dependencia del sistema si existe una fuerza de fricción o rozamiento que se opone al movimiento.





Influencia de la masa del resorte

El efecto de la masa del resorte m_r en la frecuencia de oscilación de un sistema masa-resorte, ha sido estudiado por varios autores.
Consideran una masa efectiva

$$m_{ef} = M + \alpha\, m_r \qquad \alpha \begin{cases} 1/3 & m_r << M \\ 4/\pi^2 \approx 0{,}41 & m_r >> M \end{cases}$$

La aceleración externa no afecta el período de movimiento alrededor del punto de equilibrio.

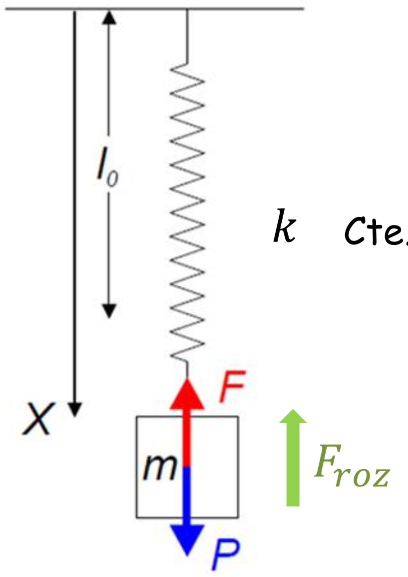
La masa efectiva del sistema con un resorte de longitud L y constante k se puede determinar encontrando su energía cinética T.

Oscilaciones amortiguadas

Consideremos que sobre el sistema masa- resorte actúa una fuerza que intenta frenar el movimiento.

Supongamos esa fuerza de la forma

$$F_{roz} = -b\dot{x}$$



k Cte. del resorte

Aplicando la 2da Ley de Newton

$$m\ddot{x} = mg - k(x - l_o) - b\dot{x}$$

reagrupando

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = g + \frac{kl_o}{m}$$

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t)$$

La solución particular planteada en la clase anterior sigue valiendo

$$x_P(t) = l_o + \frac{mg}{k}$$

La ecuación homogénea tomo la forma $\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ $\Rightarrow$ Se propone la solución $x_H(t) = A\,exp(-\gamma t)$

$$\gamma^2 - \frac{b}{m}\gamma + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow \gamma_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

$$x_H(t) = A\,exp(-\gamma t) \qquad \gamma_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

$$\xrightarrow{\Delta = b^2 - 4mk}$$

$$\gamma_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2m}$$

Δ

$\neq 0$

Hay dos soluciones diferentes $\quad x_H(t) = B\,exp(-\gamma_1 t) + C\,exp(-\gamma_2 t)$

$\Delta > 0$ $\Longrightarrow$ Exponenciales reales $\Longrightarrow$ Caso sobre-amortiguado

$\Delta < 0$ $\Longrightarrow$ Exponenciales complejas $\Longrightarrow$ Caso sub-amortiguado

$$x_H(t) = A\,exp(-\gamma t)\,sen(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2} \qquad \omega_o^2 = \frac{k}{m} \Longrightarrow$$

$= 0$

$$\gamma = \frac{b}{2m}$$

$$\Delta = b^2 - 4mk = 0 \Longrightarrow 4mk = b^2$$

$$\omega_o^2 = \gamma^2$$

Hay dos soluciones diferentes $x_H(t) = B\,exp(-\gamma_1 t) + C\,exp(-\gamma_2 t)$ Dos constantes ajustables B y C

Si $\Delta = 0$ $\longrightarrow$ $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ Planteando condiciones iniciales

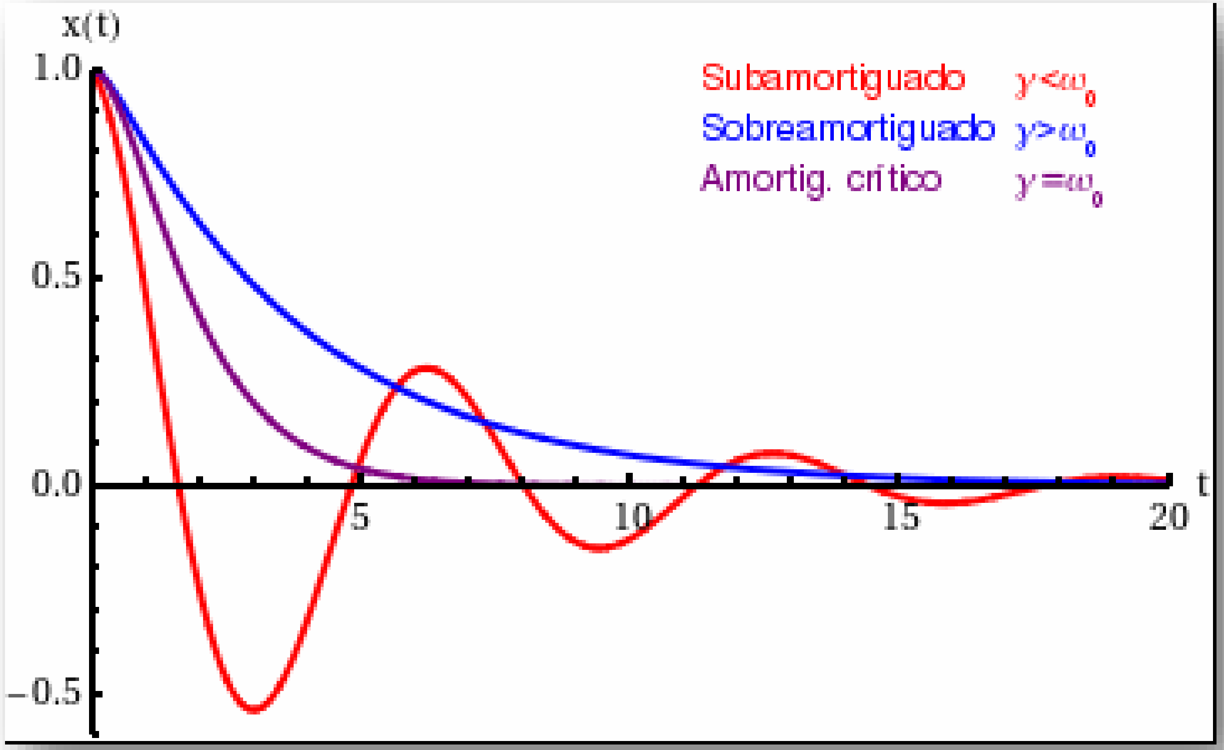
$$\begin{cases} x_H(0) = 0 \\ dx_H/dt\,(0) = 0 \end{cases}$$

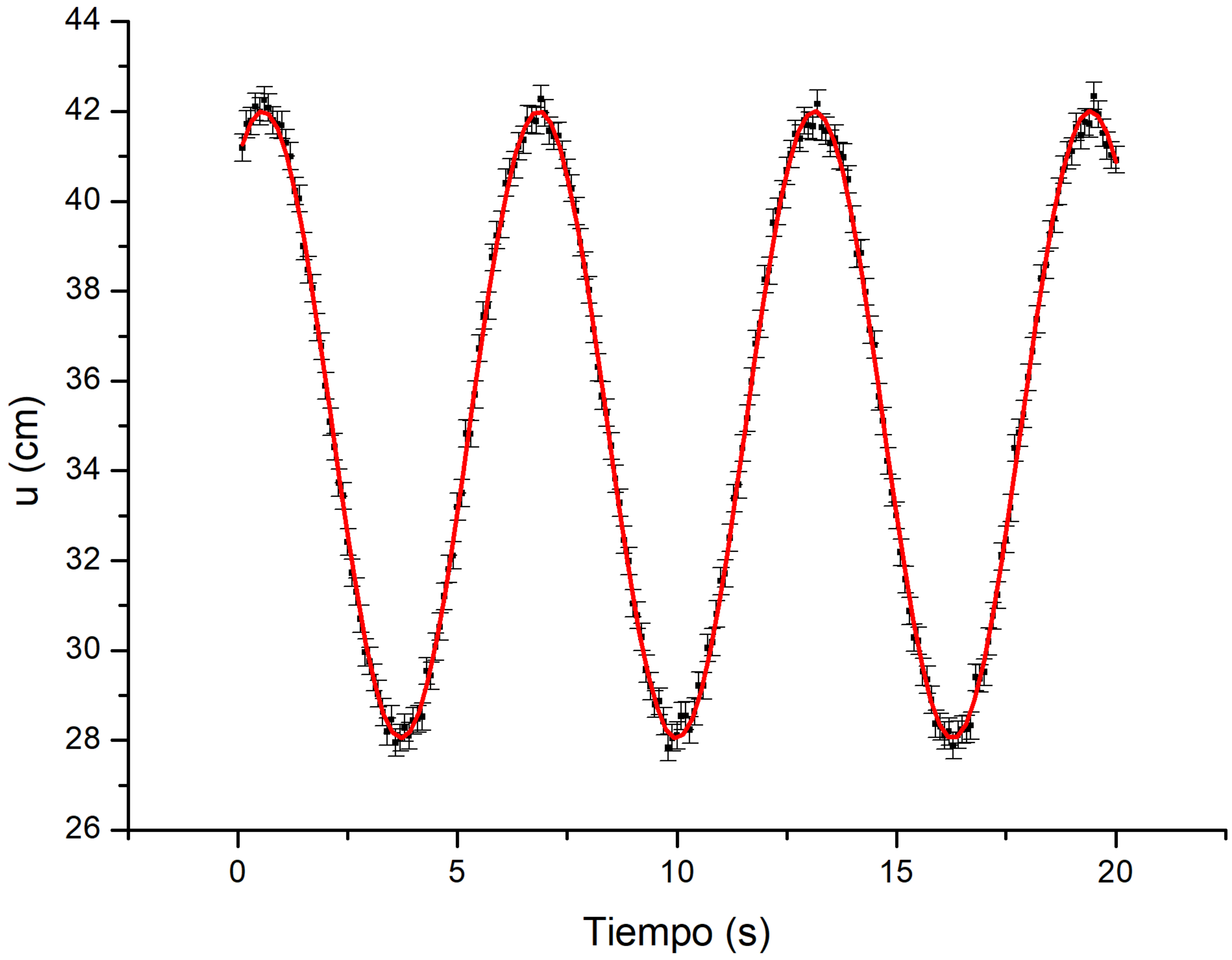
Se puede demostrar que en ese caso es solución

$$x_H = A\,exp\,(-\gamma t) + B\,t\,exp\,(-\gamma t)$$

Amortiguamiento crítico

En sistemas mecánicos reales esta condición se busca ex-profeso.
Si se aplica a un sistema en reposo bruscamente una fuerza constante, esta será seguida de una suave aproximación a la nueva posición de equilibrio
(desplazada de la anterior **sin oscilaciones**).



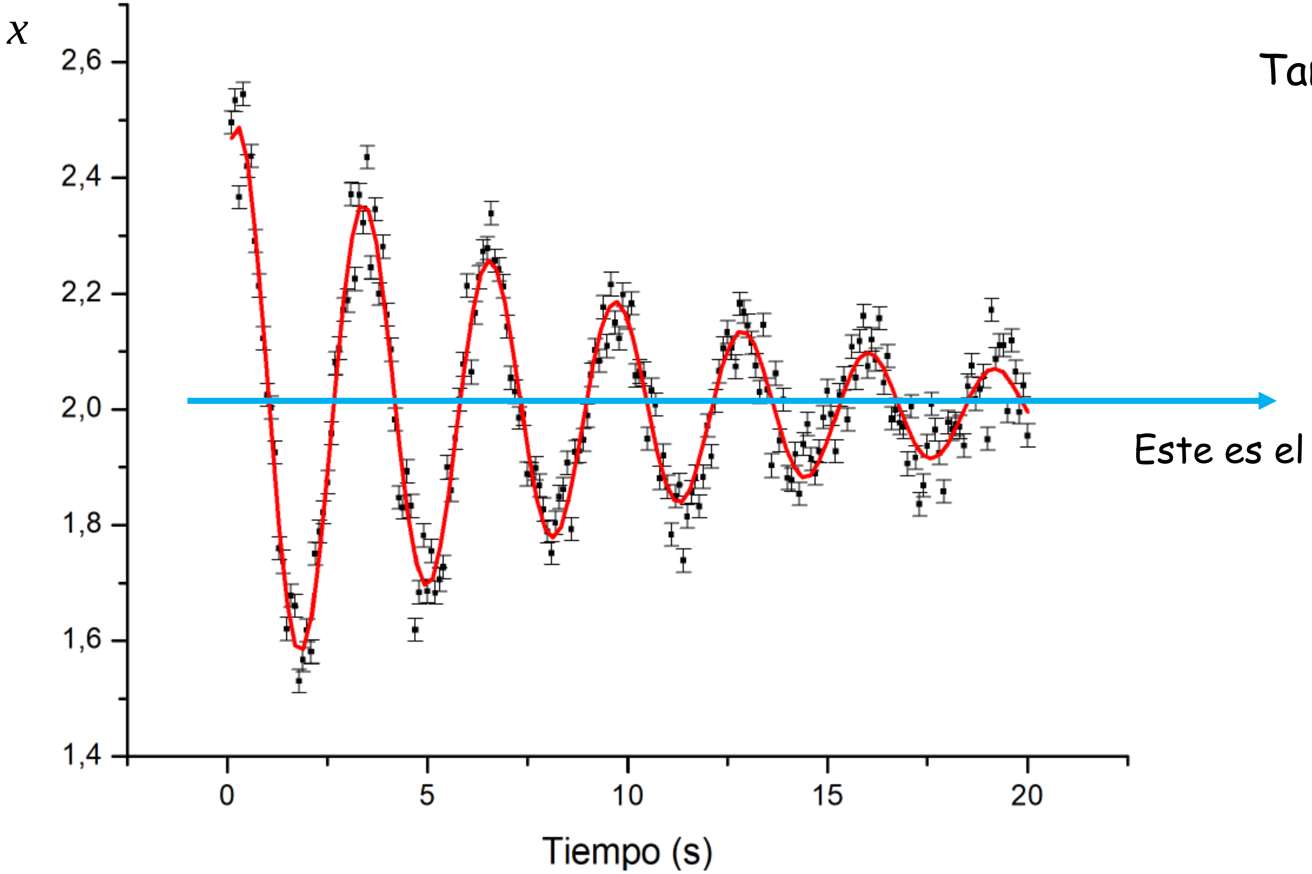


$$x(t) = C + A\, sen(\omega\, t + \varphi)$$

Utilizando Origin se pueden ajustar estos datos a la función

Ajuste no lineal de la señal completa para determinar ω y γ

$$x(t) = C + A\,exp(-\gamma t)\ sen(\omega\, t + \varphi)$$



Este es el valor de C

También se puede resolver en Origin

En el caso medir con el sensor de fuerza se obtiene también una oscilación amortiguada en el tiempo

$$F = m\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$F = mA\,exp(-\gamma t)\{(\omega^2 - \gamma^2)sen(\omega t + \varphi) - 2\omega\gamma cos(\omega t + \varphi)\}$$

$$F = mA\, exp(-\gamma t)\{(\omega^2-\gamma^2)\, sen(\omega t+\varphi) - 2\omega\gamma\, cos(\omega t+\varphi)\}$$

$$F = mA\,(\omega^2-\gamma^2)\, exp(-\gamma t)\, sen(\omega t+\varphi)\left\{1 - \frac{2\omega\gamma}{(\omega^2-\gamma^2)} cot(\omega t+\varphi)\right\} \qquad \omega > \varphi$$

Los máximos se dan cuando se maximiza esta relación

Podemos previamente encontrar γ

$$F_{max} = C_1\, exp(-\gamma t_{max})$$

$$ln(F_{max}) = lnC_1 - \gamma t_{max}$$

El grafico de $ln(F_{max})$ en función de t_{max}

debería ajustar a una recta de pendiente γ

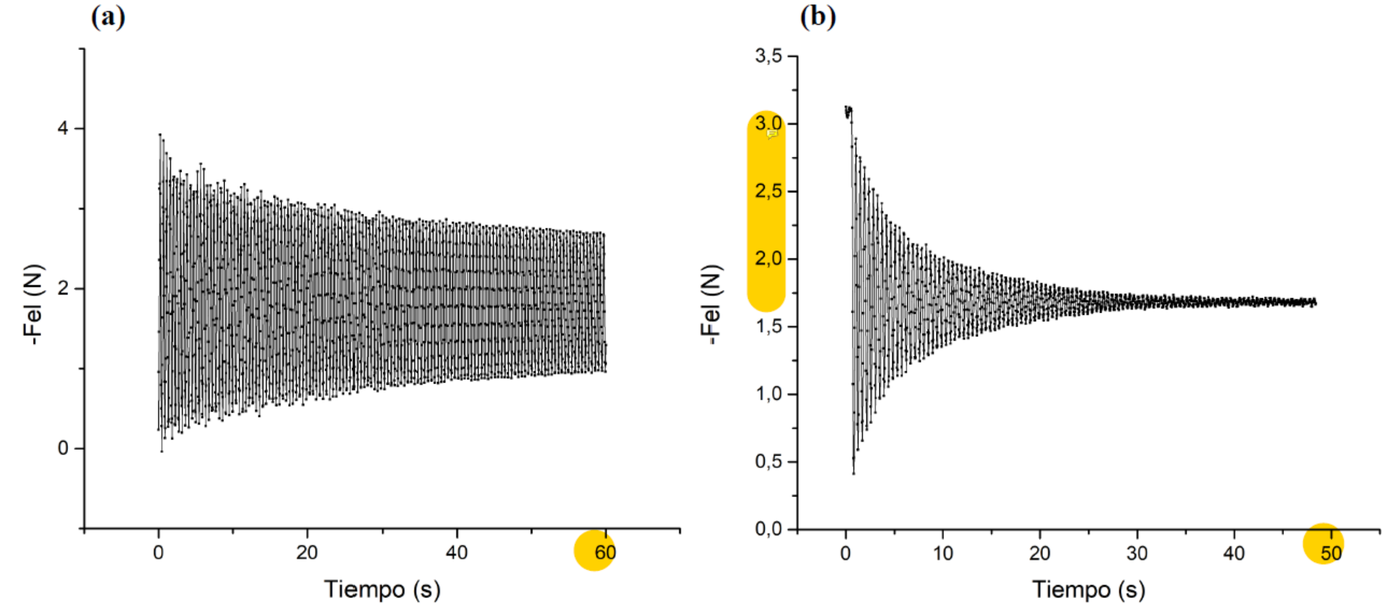


Figura 12 **(a)** Gráfico de los resultados obtenidos de las oscilaciones amortiguadas en aire con un peso de 1,24 N **(b)** Gráfico de los resultados obtenidos de las oscilaciones amortiguadas en agua con un peso de 1,24 N

Trabajo Práctico N° 6 – Parte E

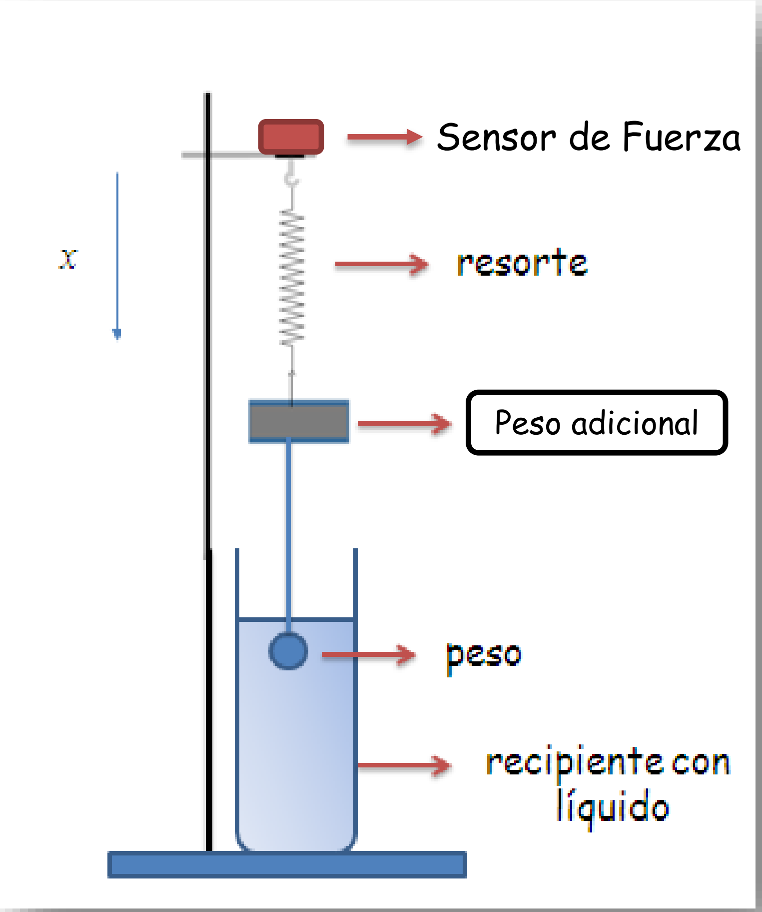
- Se utilizara una configuración parecida a la del TP N°6

- Se debe conocer el peso de los elementos que componen el sistema.

- Se quiere registrar el movimiento oscilatorio del sistema a partir de la variación de la fuerza del sistema oscilante en función del tiempo.

- Primero se debe registrar la variación de la fuerza a medida que se produce el movimiento oscilatorio el movimiento sin el recipiente de la figura. Luego se repite la experiencia con el recipiente con agua.

- Realizar esta experiencia para 4 pesos diferentes.



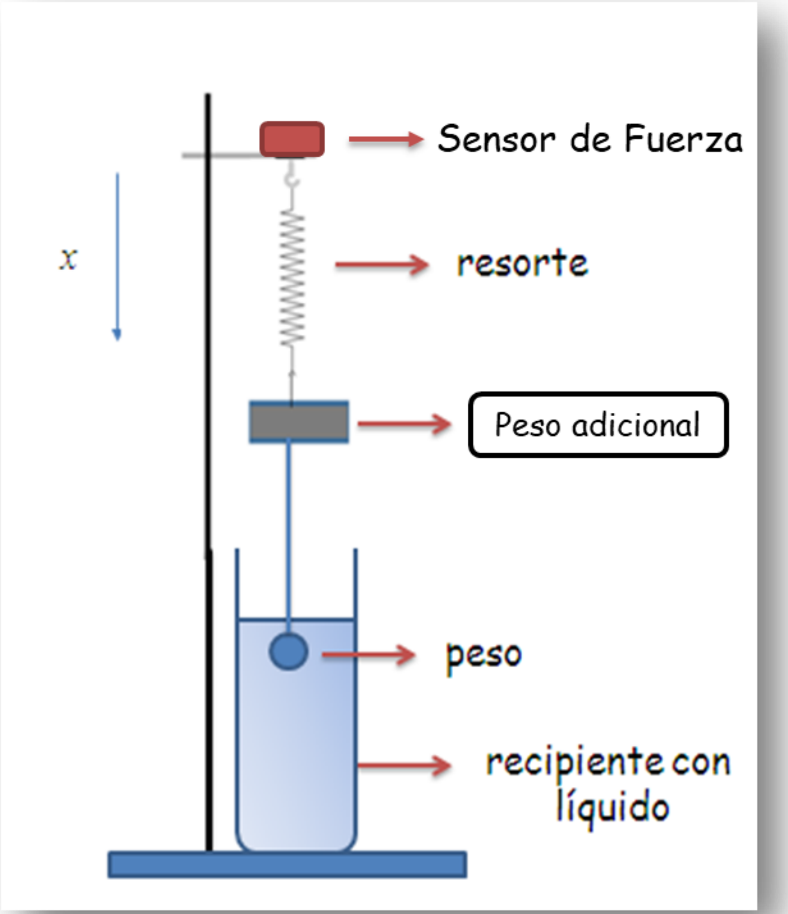
- A partir de los datos se debe verificar que el sistema no trabaje en condición sobre-amortiguado ni crítico.
- De ser así, busque una condición donde el sistema oscile en forma sub-amortiguada.
- En ese caso se cumple :

fase

$$F = mA\,(\omega^2 - \gamma^2)\,exp(-\gamma t)\,sen(\omega t + \varphi)\left\{1 - \frac{2\omega\gamma}{(\omega^2 - \gamma^2)}cot(\omega t + \varphi)\right\}$$

Coeficiente de amortiguación

Frecuencia angular de oscilación



- ¿Se le debe agregar algún término a esta ecuación ?
- ¿Cómo calcular γ sin ajustar los datos experimentales a la ecuación en forma completa?
- A partir del ajuste (no lineal) de los datos a la ecuación obtenga A, ω y φ, para cada caso usando Origin o Phyton.

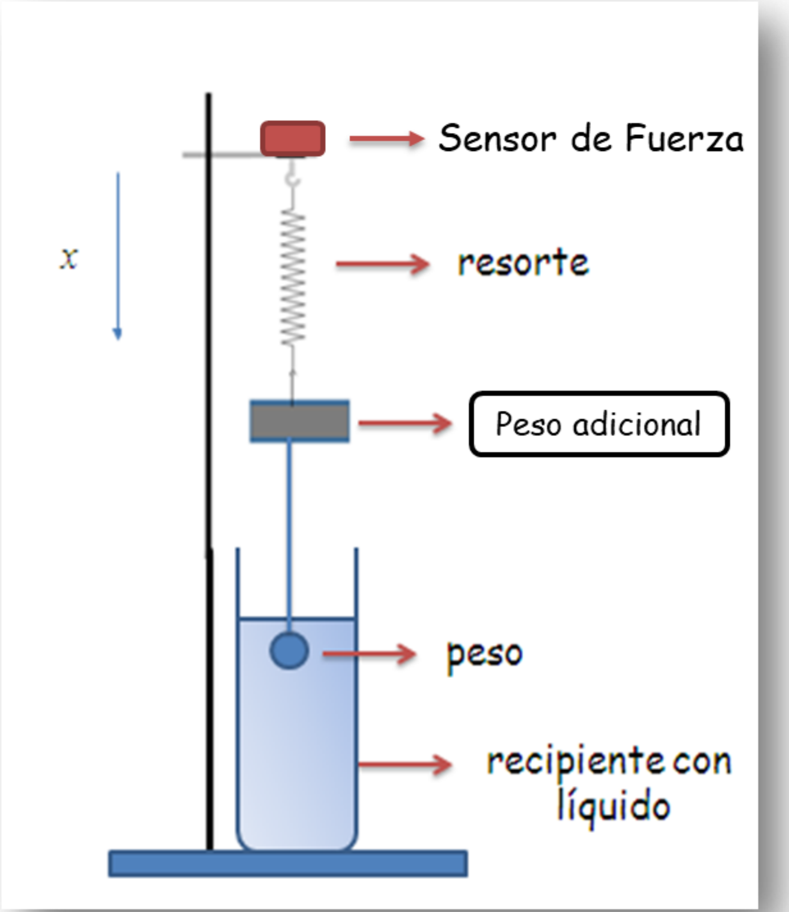
Importante :

- En la clase pasada se calculó la constante del resorte k. Si no usa el mismo resorte en esta experiencia, debe calcular la constante k nuevamente.
- Estime ω_o y verifique si se cumple:

$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2}$$

- A partir de ω_o y de la constante $\boldsymbol{k}$, calcule la masa efectiva del sistema. Verificar si se cumple la relación :

$$\omega_o^2 = \frac{k}{M + (m_r/3)}$$



¿ PREGUNTAS ?

Caso sub-amortiguado