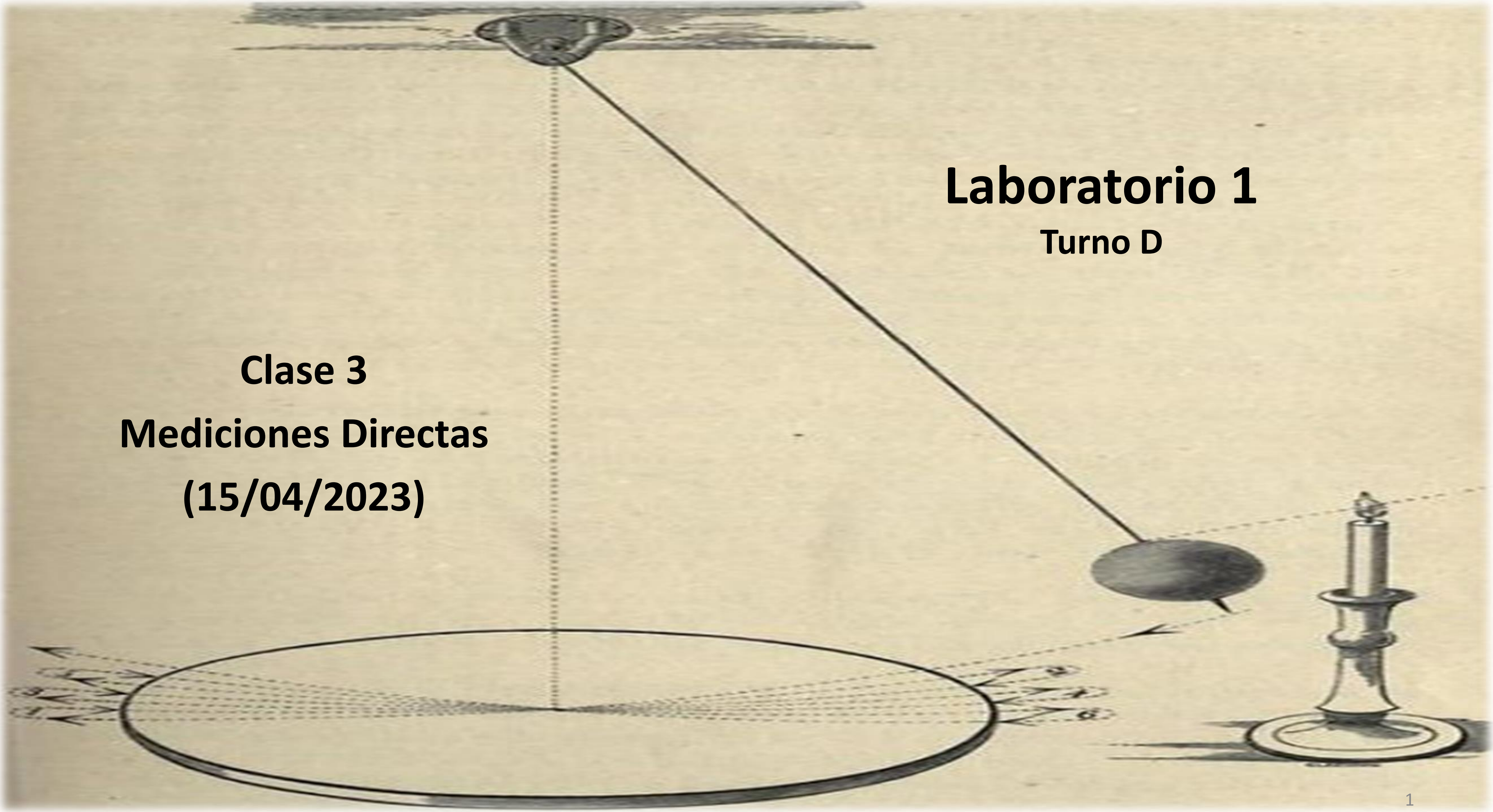


Laboratorio 1

Turno D

Clase 3

Mediciones Directas

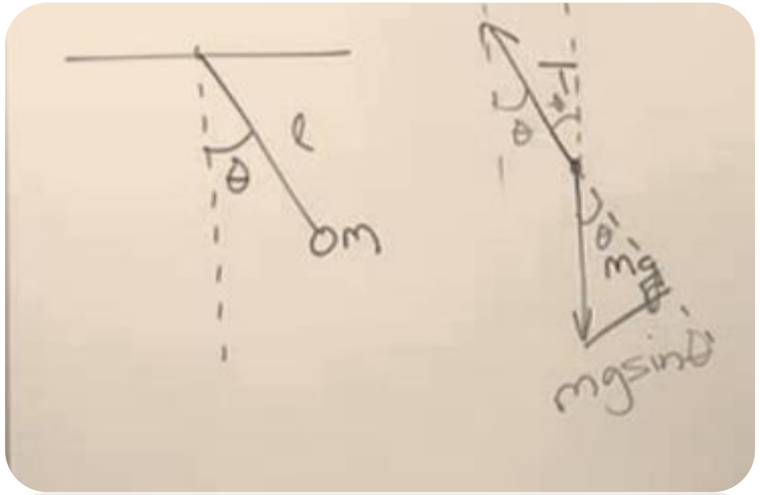
(15/04/2023)

Ecuación de movimiento del péndulo simple (balance de fuerzas)

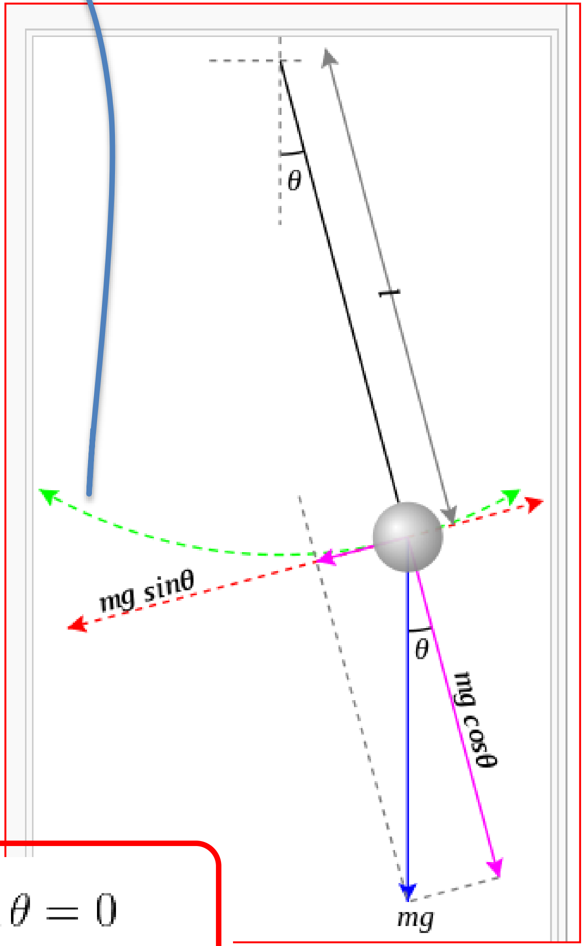
¿Qué fuerzas actúan ?

La trayectoria de la masa describe un arco de círculo de radio *l*.

La dirección de la velocidad instantanea de la masa es tangente al arco de la trayectoria.



$$s = \ell\theta$$
$$v = \frac{ds}{dt} = \ell\frac{d\theta}{dt}$$
$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ell\frac{d^2\theta}{dt^2}$$



Si consideramos la segunda ley de Newton

$$F = ma$$

$$F = -mg\sin\theta = ma$$
$$a = -g\sin\theta$$

$$\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta$$

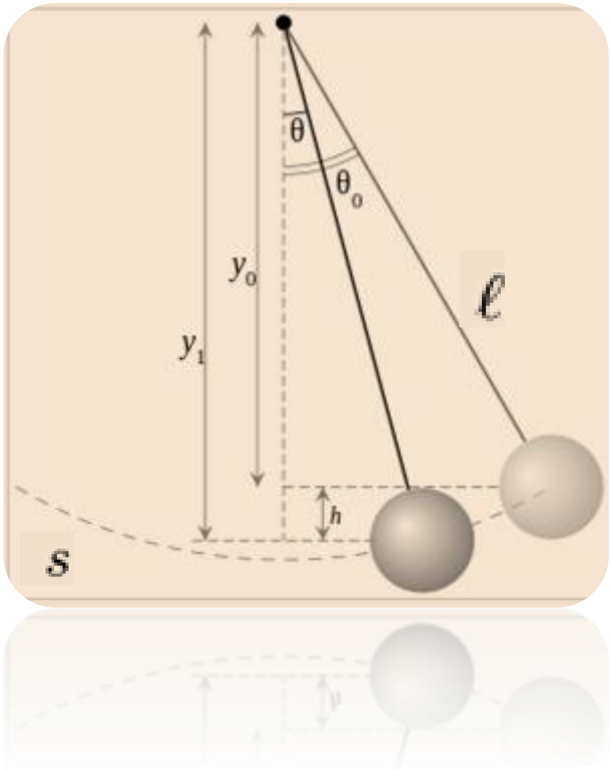
$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$$

Ecuación de movimiento del péndulo simple (consideración energética)

$\Delta U = mgh$ Energía potencial

$\Delta K = \frac{1}{2}mv^2$ Energía cinética

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$
$$v = \sqrt{2gh} \qquad (1)$$



La longitud del arco recorrido → $s = \ell\theta$

Velocidad a la que se recorre el arco → $v = \dfrac{ds}{dt} = \ell\dfrac{d\theta}{dt}$

Reemplazando en la ec.(1)

$$v = \ell\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{2gh}$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\ell}\sqrt{2gh} \qquad (2)$$

Si la amplitud inicial es θ_0 → $y_0 = \ell\cos\theta_0$

Análogamente $y_1 = \ell\cos\theta$

$$h = \ell\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right) \qquad (3)$$

Reemplazando la ec. (3) en la ec.(2) →

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)} \qquad (4)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)} \qquad (3)$$

Si derivamos la ec. (3) respecto del tiempo $\Longrightarrow$

$$\frac{d}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{-(2g/\ell)\sin\theta}{\sqrt{(2g/\ell)\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}}\frac{d\theta}{dt}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{-(2g/\ell)\sin\theta}{\sqrt{(2g/\ell)\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}}\sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$$

Ecuación diferencial del movimiento del péndulo

$\theta \ll 1. \Longrightarrow \sin\theta \approx \theta.$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\theta = 0.$$

Ecuación del oscilador armónico

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t\right) \qquad \theta_0 \ll 1.$$

El período To es el tiempo para realizar una oscilación

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \qquad \theta_0 \ll 1$$

¿Qué sucede cuando tenemos una amplitud inicial arbitraria ?

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}$$

$$dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}}$$

$$T = \int_0^{4\theta_0} dt = \int_0^{4\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}}$$

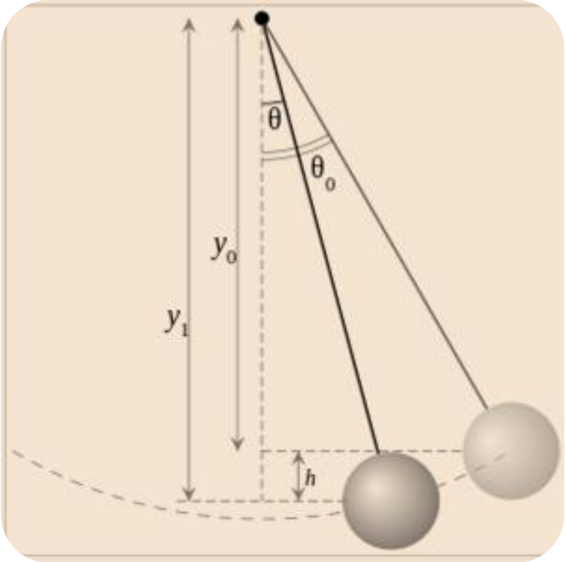
$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}}\int_0^{\theta_0}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}\,d\theta.$$

Podemos integrar sobre un ciclo completo $T = t(\theta_0 \to 0 \to -\theta_0 \to 0 \to \theta_0),$

o 2 veces sobre medio ciclo $T = 2t\left(\theta_0 \to 0 \to -\theta_0\right)$

o 4 veces sobre $\frac{1}{4}$ de ciclo $T = 4t\left(\theta_0 \to 0\right)$

$$\boxed{\cos\theta = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$



Si θ_0 se acerca al vertical la integral diverge $\lim_{\theta_0 \to \pi} T = \infty.$

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}F\left(\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\theta_0}{2}\right)$$

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi}\frac{1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 u}}\,du\,.$$

$$\boxed{\sin u = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta_0}{2}}}$$

Función integral elíptica incompleta

El desarrollo en series de la función elíptica incompleta lleva a :

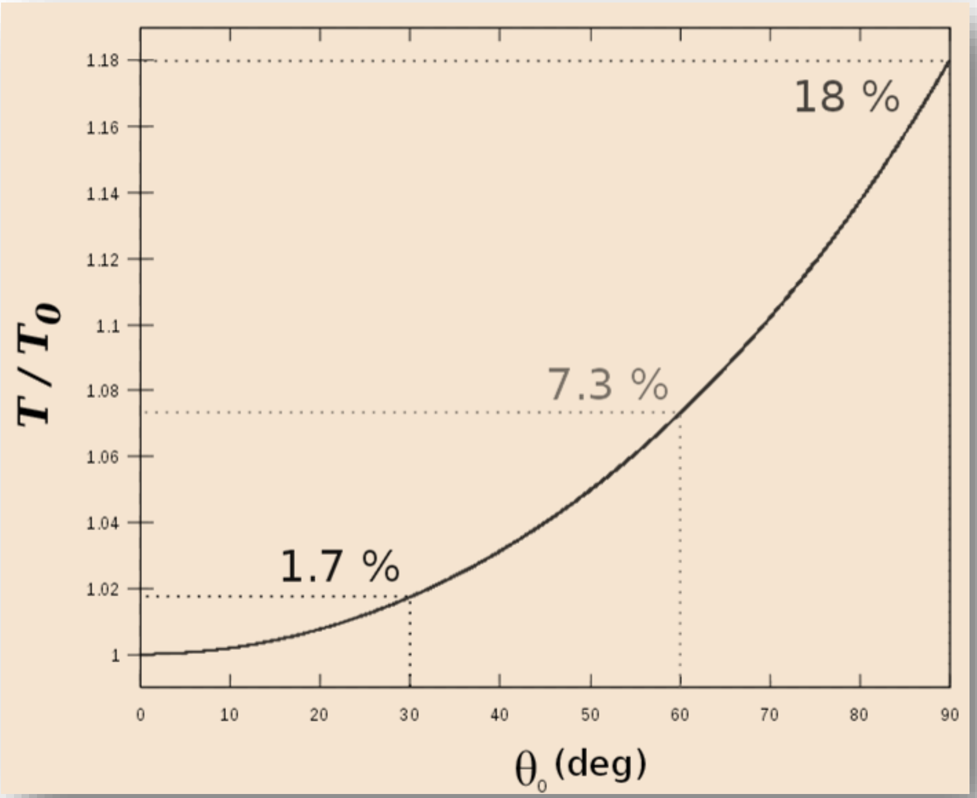
$$F(\varphi,k)=\int_0^{\varphi}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}\,du\,. \quad \Rightarrow \quad F(\pi/2,k)=\frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4+\cdots+\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^{2n} k^{2n}+\cdots\right]$$

$$k=\sin(\theta_o/2)$$

$$T=4\sqrt{\frac{\ell}{g}}F\left(\frac{\pi}{2},\sin\frac{\theta_0}{2}\right) \qquad T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\sin^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right)+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\sin^6\left(\frac{\theta_0}{2}\right)+\cdots\right)$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{(2n)!}{(2^n\cdot n!)^2}\right)^2\cdot\sin^{2n}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right]$$

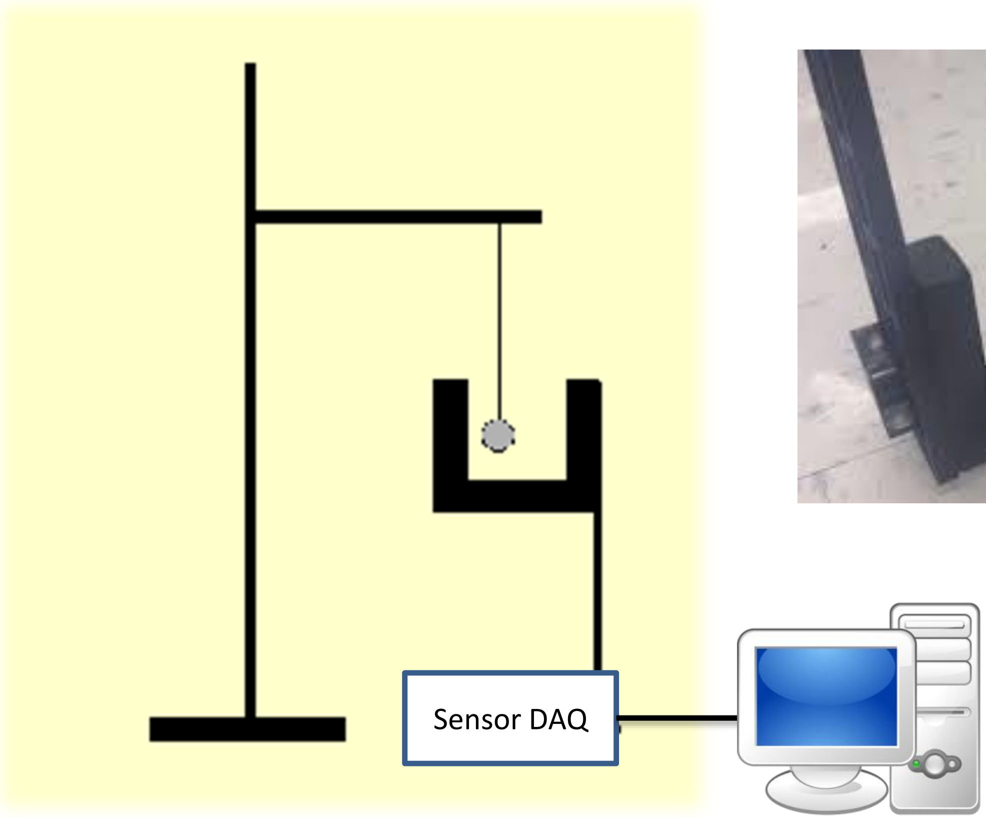
$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

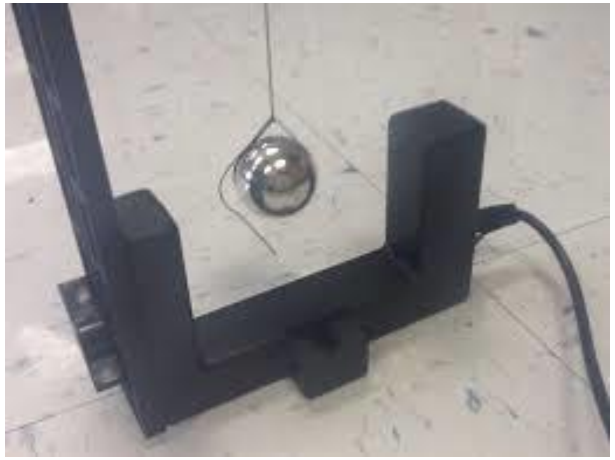


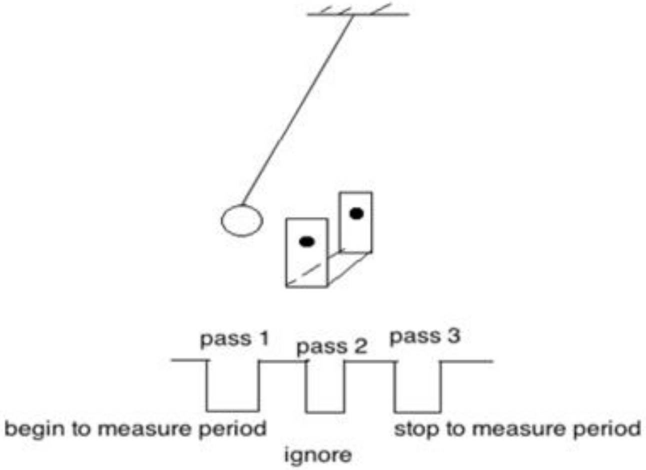
Realización de la experiencia 5

1

- Motar el péndulo con photogate como se hizo en la Experiencia 4
- Elegir una velocidad de muestreo adecuada







Experiencia N° 5

1

- Estudiar la dependencia del período del péndulo simple con la amplitud inicial
- Hacer la experiencia con 6 ángulos iniciales
- Realizar 20 mediciones del período (elegir de acuerdo a la experiencia 4)
- Analizar si se comprueba el modelo

2

- Analizar la dependencia del período con la longitud del hilo (6 longitudes diferentes). ¿En qué amplitudes iniciales trabajamos?
- Realizar 20 mediciones del período para cada longitud de hilo.
- ¿ Que magnitud física podemos obtener de estas experiencias ?

¿ PREGUNTAS ?