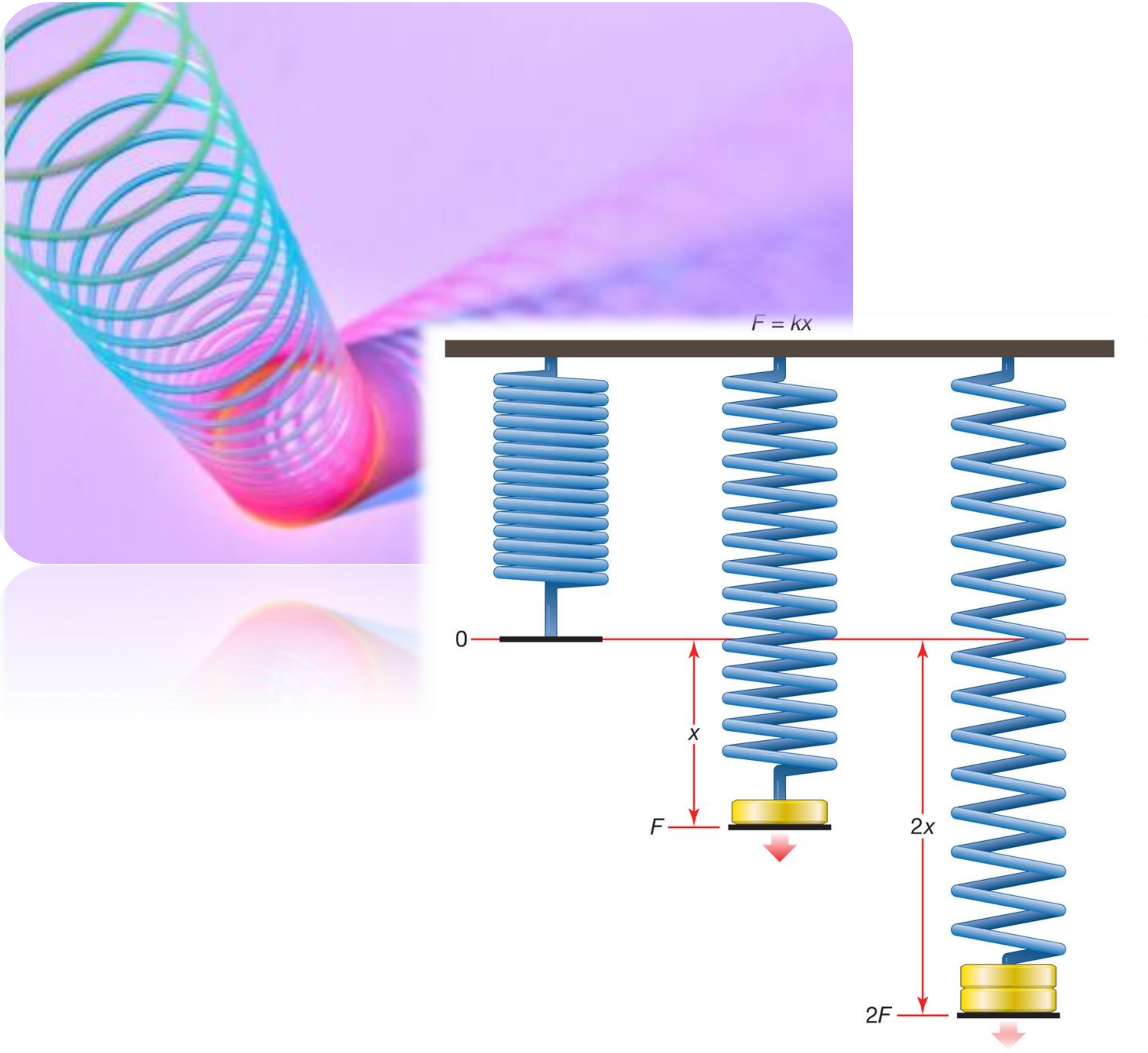
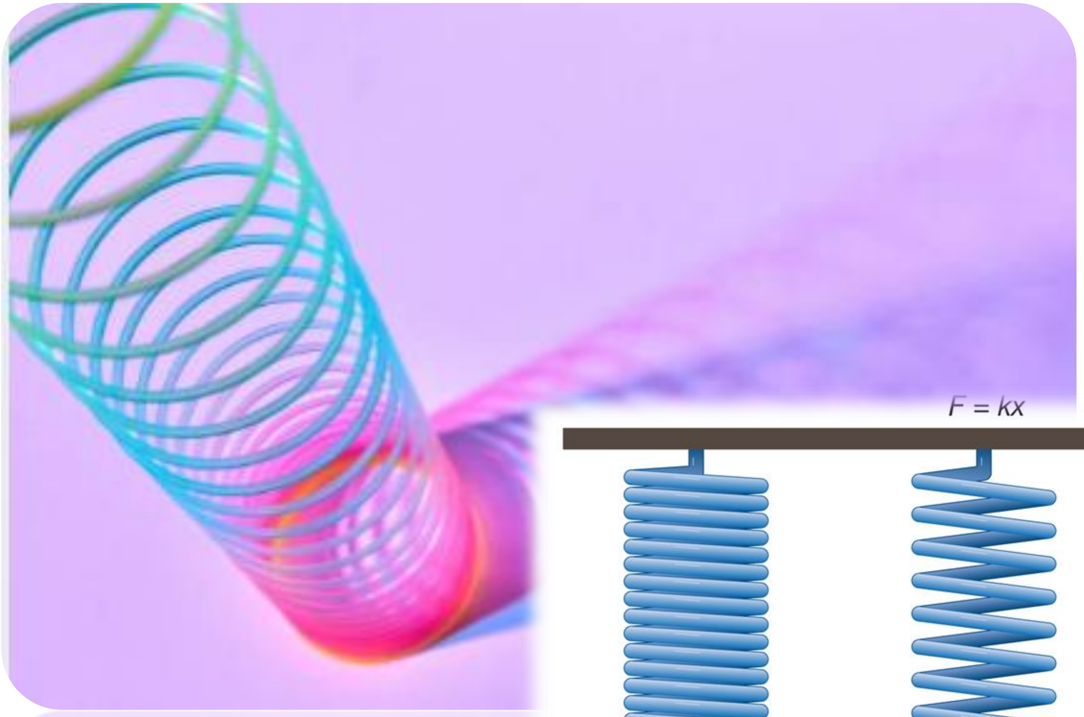


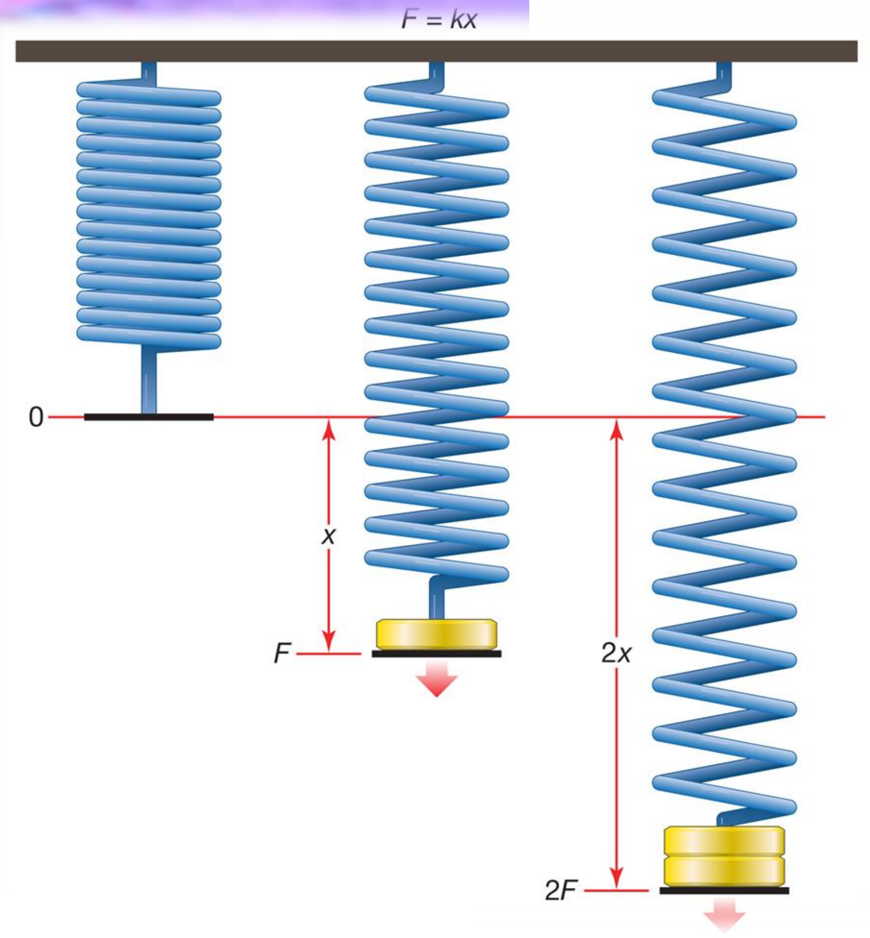
Laboratorio 1

Turno D

Clase 9
Elasticidad
Oscilaciones libres

(3/06/2023)



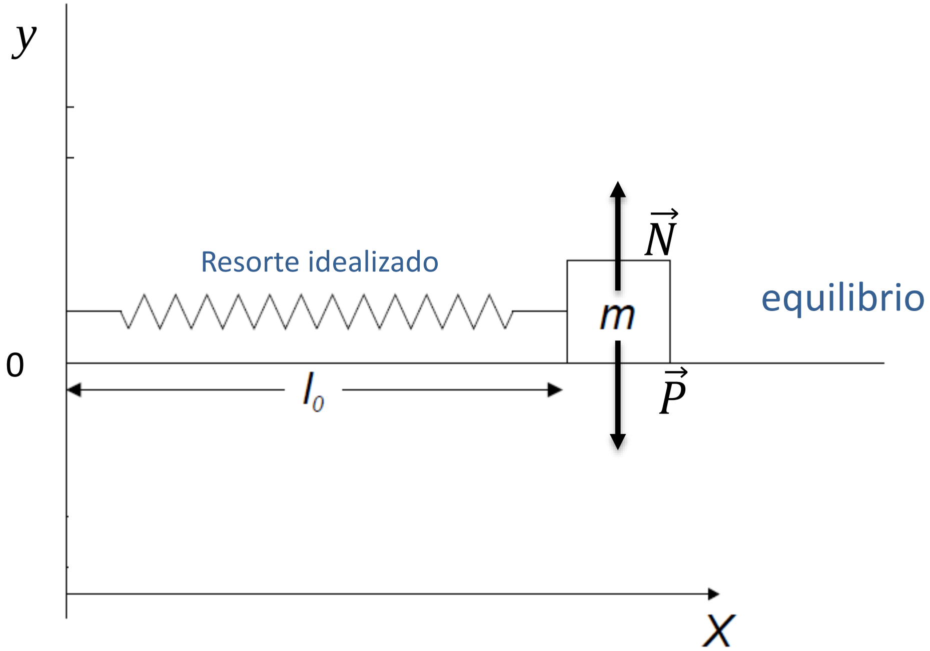


- Vamos a estudiar el movimiento oscilatorio de un sistema simple, compuesto por un resorte y una masa.
- Mediremos la fuerza restitutiva del resorte, y la posición de la masa acoplada.
- Analizaremos los resultados para determinar características del resorte.
- Poniendo el sistema en oscilación estudiaremos la dependencia de la frecuencia de oscilación con la masa.
- Analizaremos el fenómeno de la elasticidad.

Sistema Masa - Resorte

Hipótesis
- ✓ Movimiento unidireccional
- ✓ Ausencia de rozamiento
- ✓ Resorte ideal ⟹ Perfectamente elástico; Sin masa

Robert Hooke
28 julio 1635 – 3 marzo 1703



Fuerza elástica

$$\boxed{\vec{F} = -k(x - l_o)\,\hat{\imath}}$$

Ley de Hooke

$$k = \frac{[N]}{[m]}$$

Constante elástica

2da Ley de Newton:

$$\hat{\jmath}\;\begin{cases} m\,\ddot{y} = N - P \\ \ddot{y} = 0 \Rightarrow N = P \end{cases}$$

$$\hat{\imath}\;\left\{\; m\,\ddot{x} = -k(x - l_0)\right.$$

$$m\ddot{x} = -k(x - l_0)$$

Reordenando queda: $m\ddot{x} + k(x - l_0) = 0 \;\Rightarrow\; \ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k\,l_0}{m}$

Esto es una ecuación diferencial:
- Ordinaria
- Lineal
- Coeficientes Constantes
- No homogénea
- Orden 2

Solución particular

La teoría nos dice que la solución es de la forma: $x(t) = x_H(t) + x_P(t)$

$\boxed{\ddot{x}_H + \frac{k}{m}x_H = 0}$ ← Solución de la ecuación homogénea

Necesitamos dos soluciones linealmente independientes.

Proponemos $B\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)$ y $C\cos(\omega_0 t)$. Ambas son soluciones si $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$$\Rightarrow \boxed{x_H(t) = B\,\mathrm{sen}(\omega_0 t) + C\cos(\omega_0 t)}$$

Como solución particular buscamos algo de la forma de la inhomogeneidad.

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k\,l_0}{m}$$

Proponiendo una constante, se llega a: $x_P(t) = l_0$

Usando identidades trigonométricas:

$$B\,\mathrm{sen}(\omega_0 t) + C\cos(\omega_0 t) = A\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \varphi)$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Solución más general: } x(t) = l_0 + A\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \varphi)}$

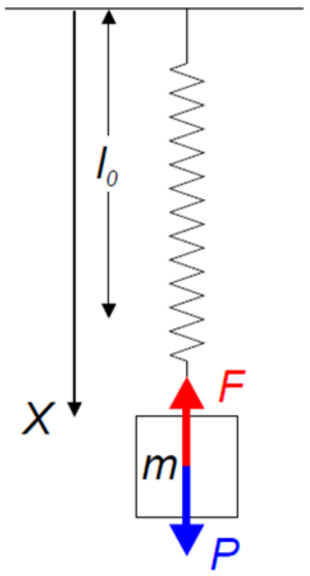
¿De dónde salen las constantes A y φ?

$$\left.\begin{aligned} x(t=0) &= l_0 + A\,\mathrm{sen}(\varphi) \\ x'(t=0) &= l_0 - \omega_0 A\cos(\varphi) \end{aligned}\right\}$$

Dos ecuaciones con dos incógnitas.

No es un sistema lineal pero siempre se puede despejar.

Si ahora consideramos que el resorte cuelga de un punto fijo:



$$m\,\ddot{x} = -k(x - l_0) + m\,g$$

Lo único que cambia es la inhomogeneidad

Por lo tanto, solo se modifica la solución particular

$$x_P(t) = l_0 + \frac{mg}{k}$$

$$\boxed{x(t) = l_0 + \frac{mg}{k} + A\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \varphi)}$$

¿ Que no estamos considerando en este análisis ?

La masa efectiva del resorte de longitud L y constante k se puede determinar encontrando su energía cinética T.

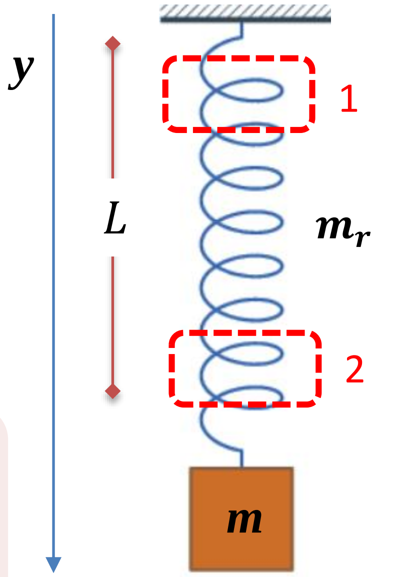
Esto requiere agregar la energía cinética de todos los elementos de masa.

$$T = \int_{m_r} \frac{1}{2} u^2 dm_r$$

El diferencial de masa dm_r → $dm_r = \left(\frac{dy}{L}\right) m_r$

$$T = \int_0^L \frac{1}{2} u^2 \left(\frac{dy}{L}\right) m_r$$

$$T = \frac{1}{2}\frac{m_r}{L} \int_0^L u^2 dy \qquad (*)$$



La velocidad de cada elemento de masa *dm* del resorte *es directamente proporcional a la longitud desde el lugar donde esta sujeto.*

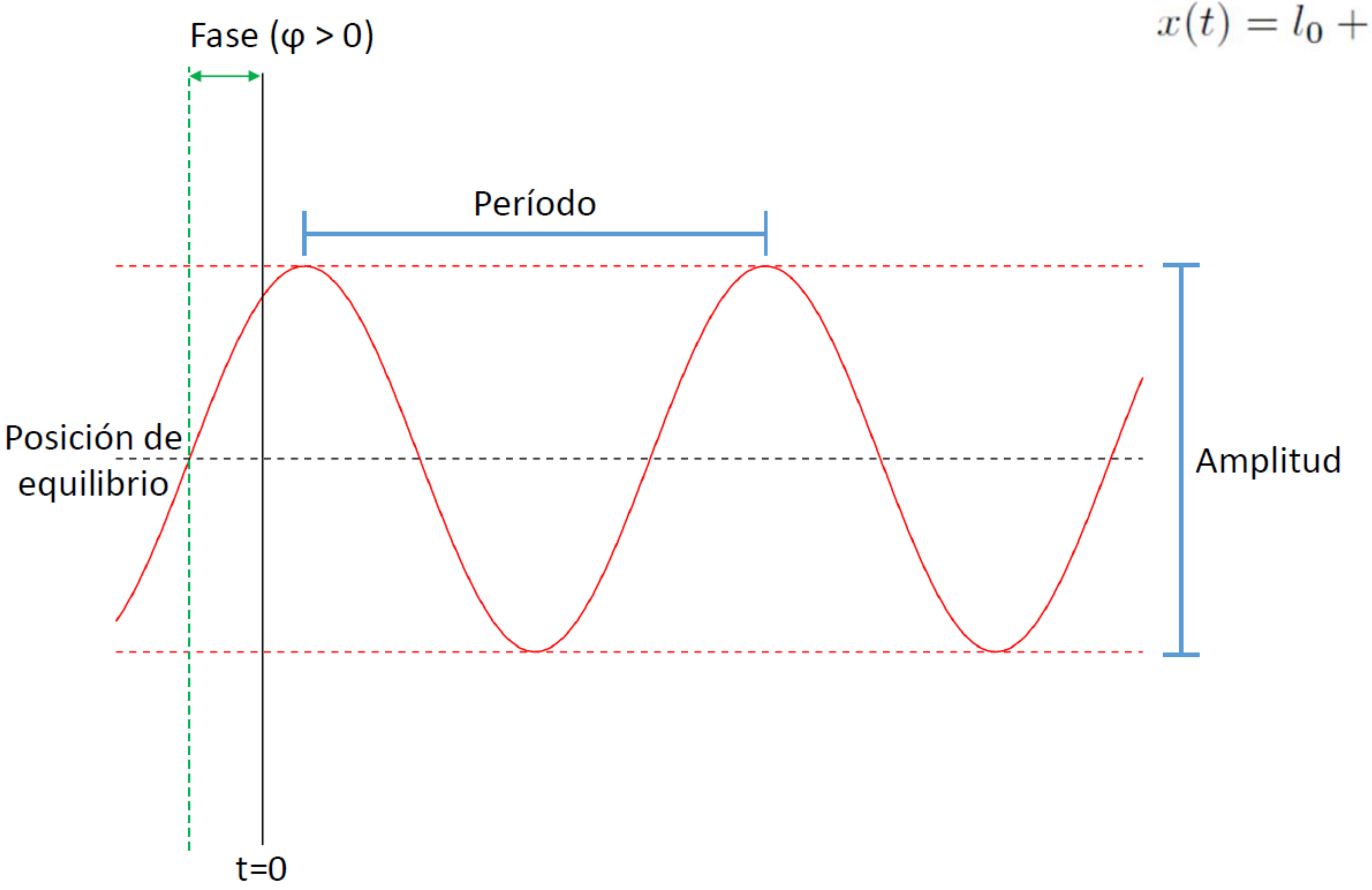
$$u = \frac{vy}{L} \qquad (**)$$

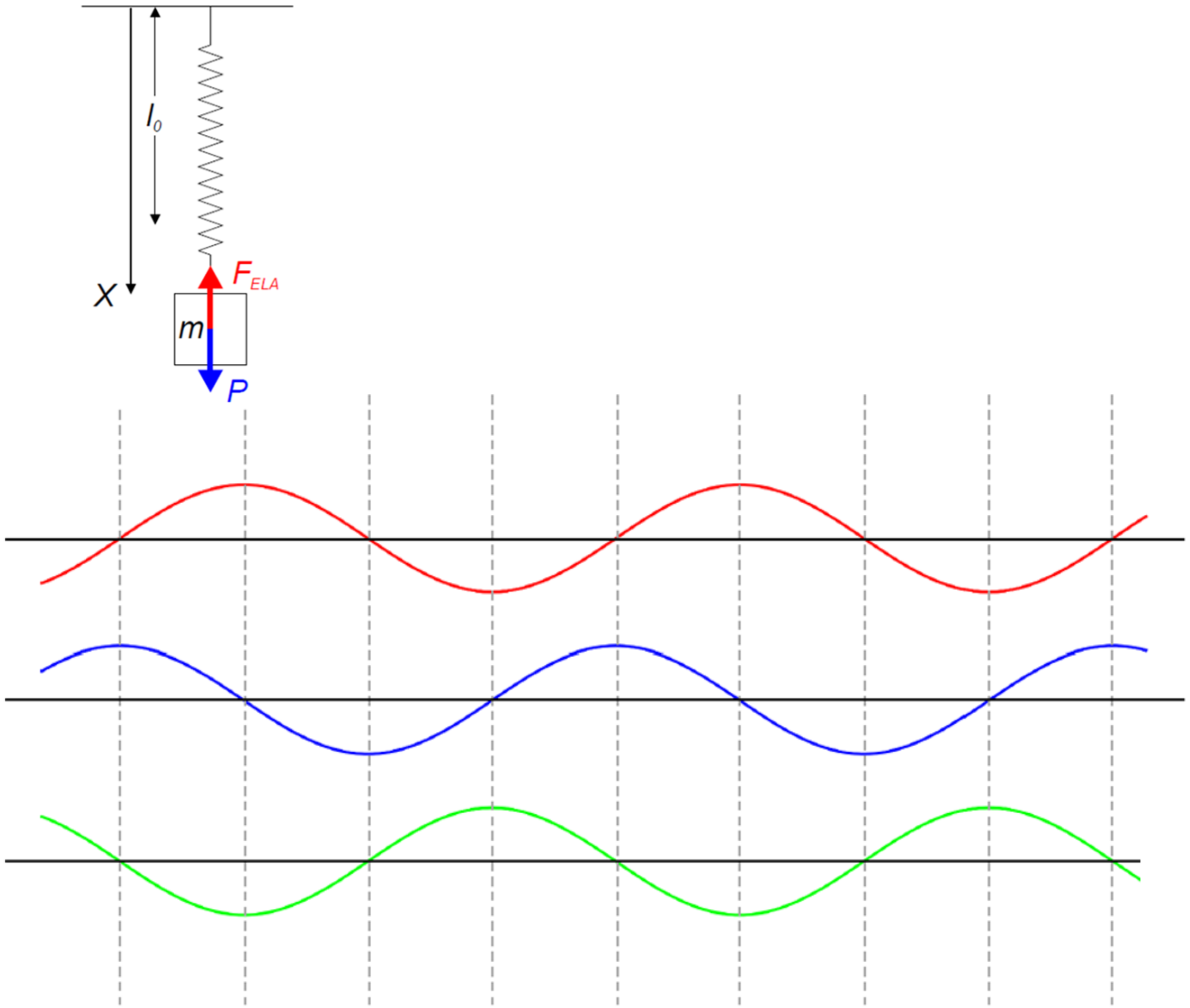
Hay menor velocidad más cerca del soporte (1) y mayor velocidad a medida que ese aleja de esa posición (2)

Reemplazando (**) en (*) $\quad T = \frac{1}{2}\frac{m_r}{L} \int_0^L \left(\frac{vy}{L}\right)^2 dy = \frac{1}{2}\frac{m_r}{L^3} v^2 \int_0^L y^2 dy$

$$T = \frac{1}{2}\frac{m_r}{L^3} v^2 \left[\frac{y^3}{3}\right]_o^L \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2}\frac{m_r}{3} v^2} \Rightarrow \boxed{\omega_o^2 = \frac{k}{m + (m_r/3)}}$$

$$x(t) = l_0 + \frac{mg}{k} + A\ \mathrm{sen}(\omega_0 t + \varphi)$$





Posición: $$x(t) = \boxed{l_0 + \frac{mg}{k} + A\ \mathrm{sen}(\omega_0 t + \varphi)}$$

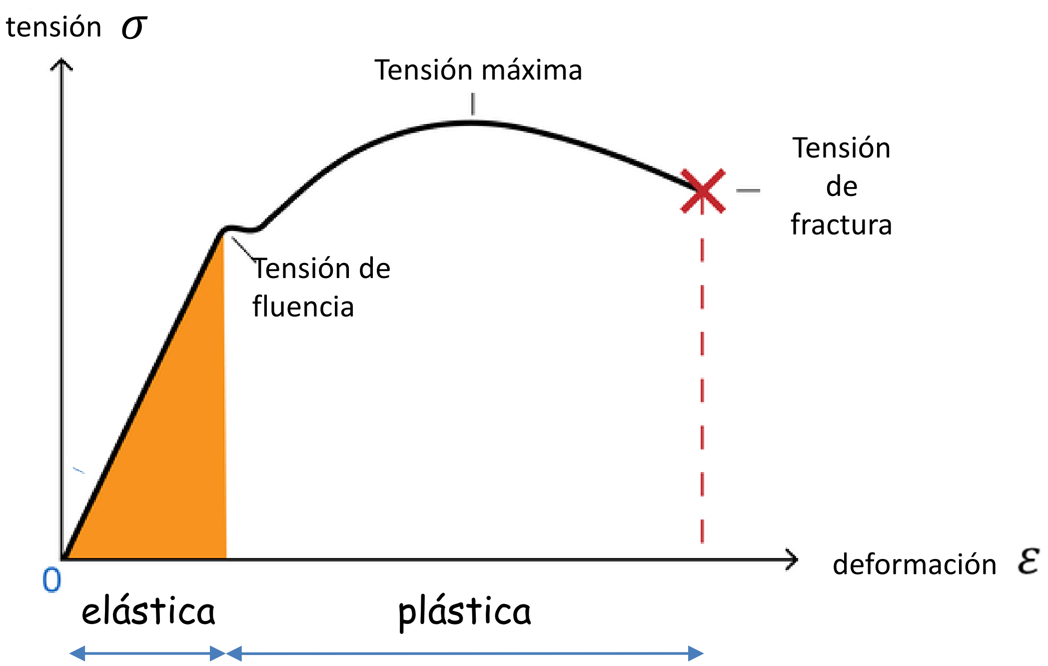
Velocidad: $$x'(t) = A\,\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Fuerza: $$F = -k(x - l_0)$$

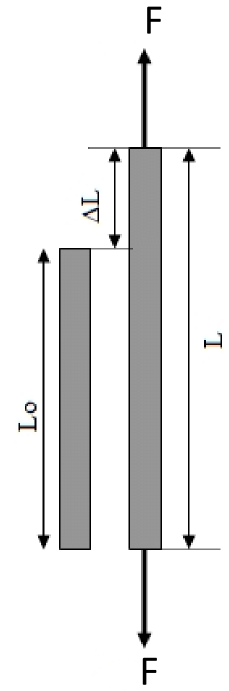
$$= -mg - k\,A\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \varphi)$$

Elasticidad

- ✓ Un material sometido a una tensión mecánica se deforma.
- ✓ La relación entre la tensión y la deformación depende del tipo de material.



Típica para metales/aleaciones



$$\sigma = \frac{F}{A}$$

A_o inicial

A instantánea

$$\varepsilon = \frac{(L - L_o)}{L_o} = \frac{\Delta L}{L_o}$$

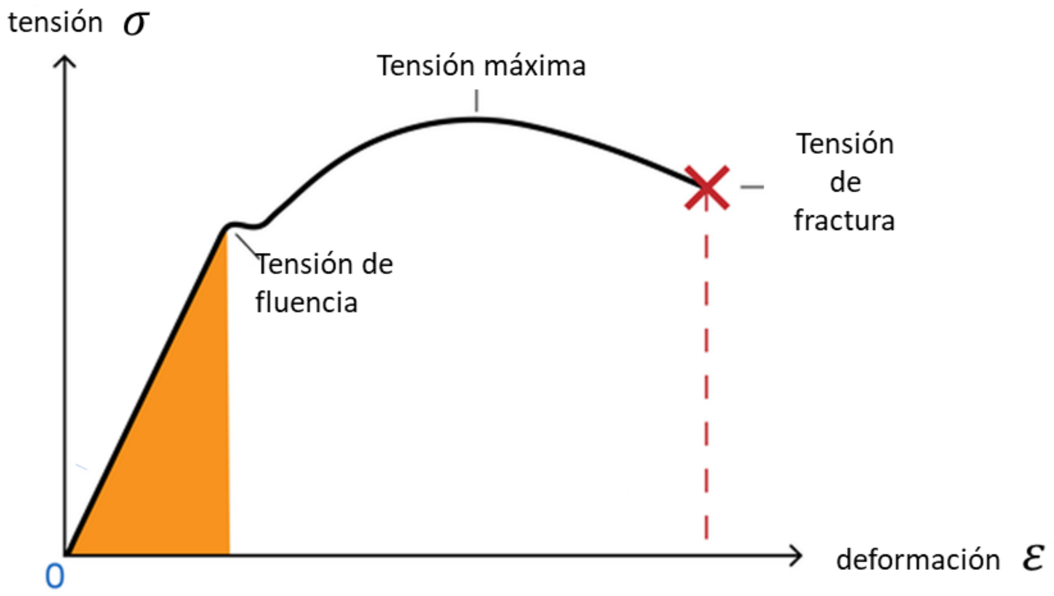
$$\varepsilon = ln(L/L_o)$$ → Deformación plástica

En la zona elástica (reversible) se define el módulo de Young *E* como

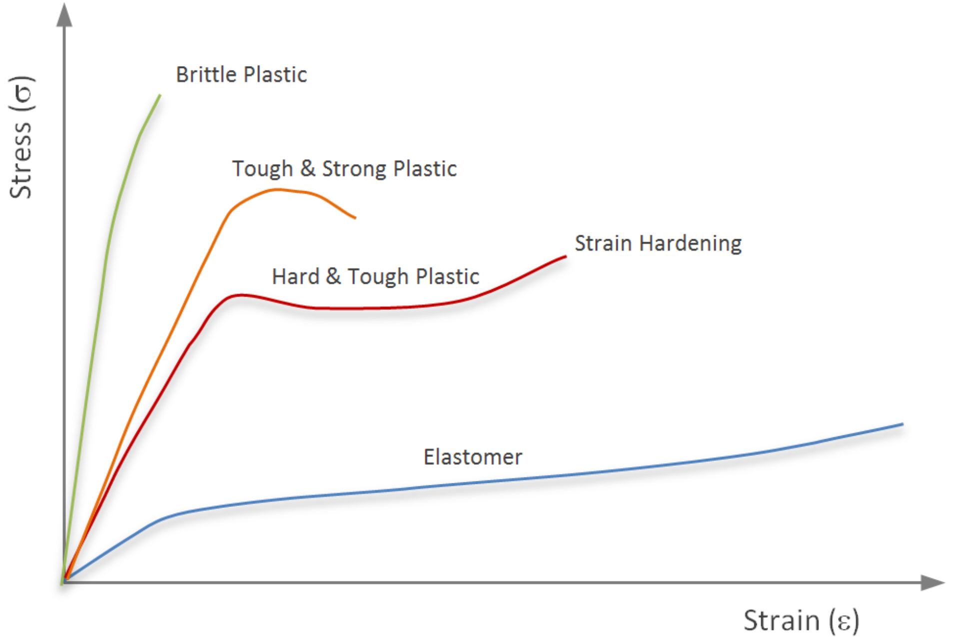
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \rightarrow \sigma = E\varepsilon \rightarrow \frac{F}{A} = E\frac{\Delta L}{L_o}$$

$$F = \boxed{\frac{EA}{L_o}}\Delta L$$

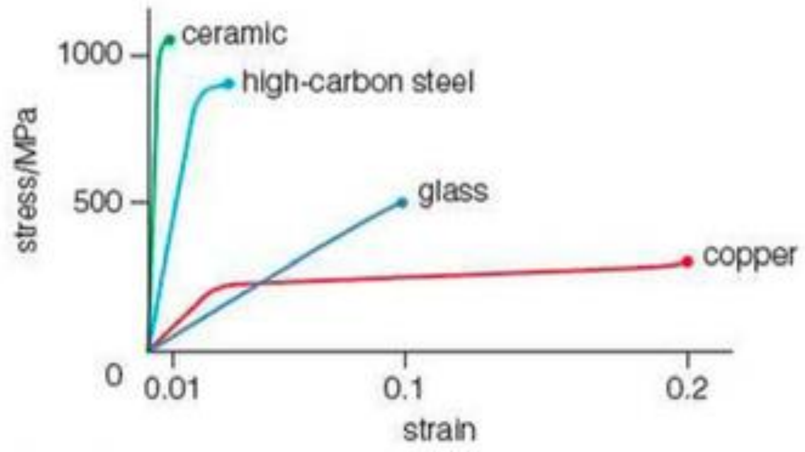
→ k Constante elástica



Metales/aleaciones



Polímeros



Comparación con cerámicos

¿ Qué es un resorte ?

Es un elemento elástico capaz de almacenar energía y desprenderse de ella sin sufrir deformación permanente cuando cesan las fuerzas o la tensión a las que es sometido.

Se fabrican con una gran diversidad de formas y dimensiones.

Materiales muy diversos

- ✓ Aceros
  - Aceros al carbono
  - Aceros inoxidable
  - Aceros tipo cromo-silicio
  - Aceros tipo cromo-vanadio
- ✓ Bronces
- ✓ Plásticos
- ✓ Elastómeros

Clasificación por forma (metálicos, plásticos)

<u>Planos</u>: formados a partir de láminas metálicas planas

<u>Espirales</u>: formados al enrollar sobre sí misma una larga cinta metálica, cuyo diámetro va creciendo a medida que aumenta su número de vueltas.

<u>Helicoidales</u>: Consisten en bobinas de alambre que forman una hélice arrollada alrededor de un cilindro (u otra forma de revolución).
Trabajan al variar la separación entre sus espiras.

<u>De torsión</u>: Elementos capaces de adquirir una torsión reversible cuando se les aplica un momento de giro.

<u>Clips</u>: Elementos cuya forma no se corresponde con los patrones anteriores, aunque pueden combinar los comportamientos elásticos de algunos de ellos.

Elementos elásticos mecánicos – Resorte helicoidal

En este tipo de resorte (tal vez el más usual) la constante del resorte se relaciona con la geometría y el tipo de material como :

Material isótropo y homogéneo

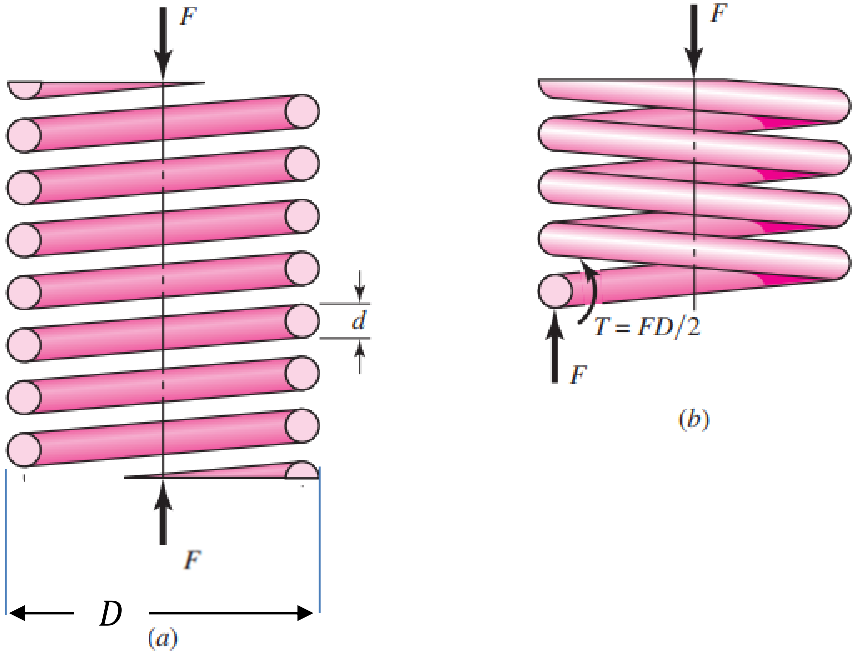
Módulo de corte del material

Número de espiras

$$k = \frac{Gd^4}{8(D-d)^3N}.$$

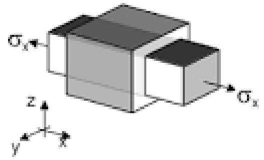
Diámetro externo de la hélice

Diámetro del material



$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Coeficiente de Poisson

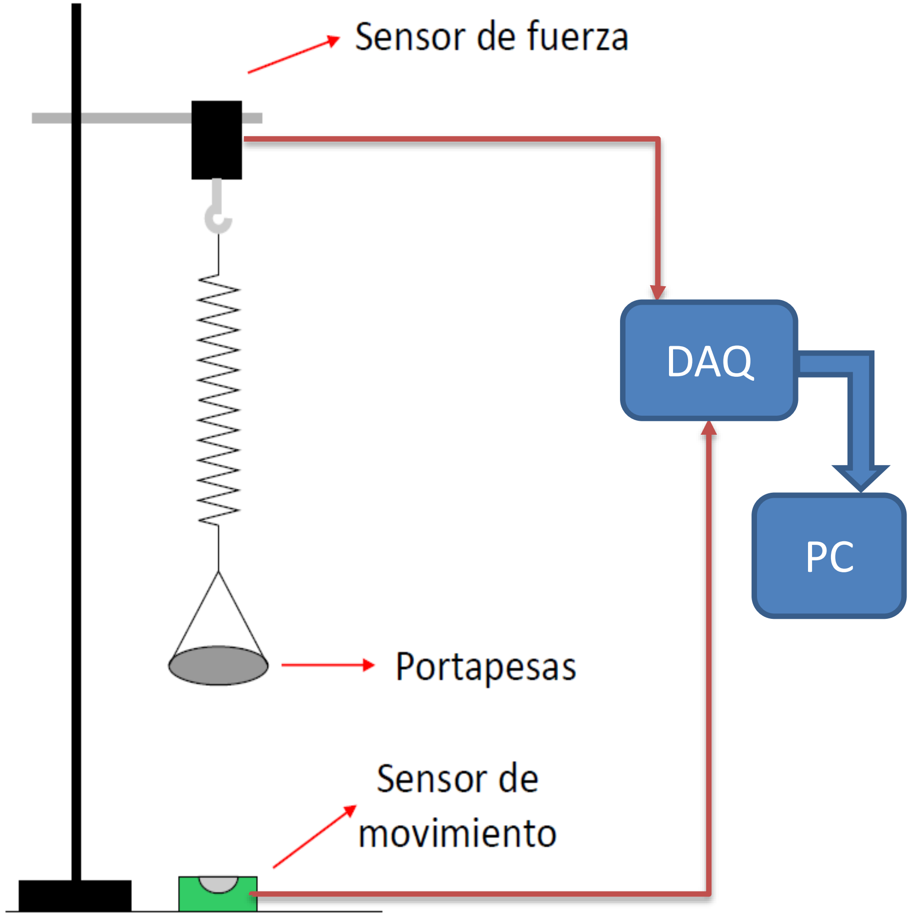


$$\nu = -\frac{\varepsilon_{transversal}}{\varepsilon_{axial}}$$

$$\boxed{k = \frac{Ed^4}{16(1+\nu)(D-d)^3N}} \longrightarrow k = f(geometría)\frac{E}{(1+\nu)}$$

Trabajo Práctico N° 6

- Obtener el coeficiente elástico de un resorte con un Método Estático.
- Armar un dispositivo como el de la figura.
- Un resorte que pueda estirarse con el peso de pesas.
- En el extremo superior se coloca un Sensor de Fuerza.
- En el piso colocamos un sensor de posición (movimiento).
- Las pesas, el porta-pesas y el resorte los pesamos previamente en la balanza.



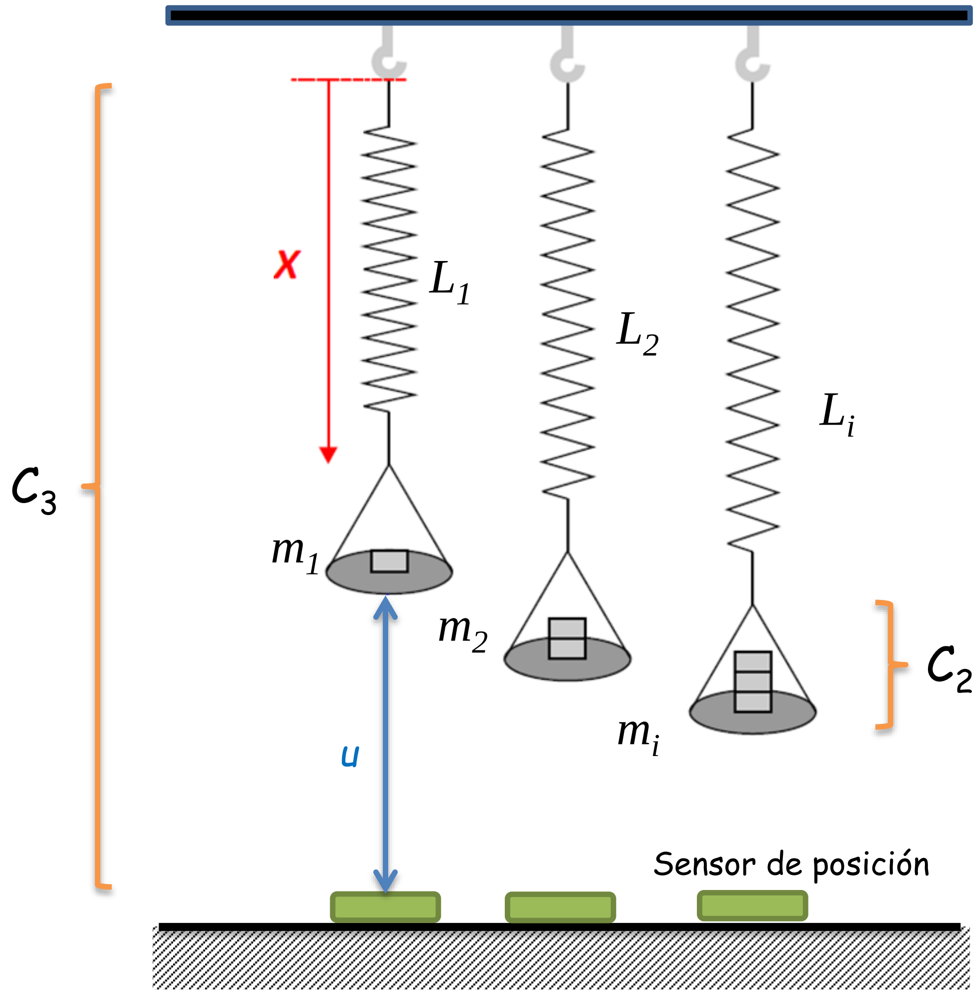
Frecuencia de muestreo < 30 Hz

Distancia sensor de posición al portapesa > 20 cm

Estimar rigurosamente los errores en ambas magnitudes

Parte A : Medición estática sin Sensor de Fuerza

l_o = longitud inicial del resorte (sin carga)



- En equilibrio

$$P + F_{ELA} = 0$$

$$P = k(x - l_0) = k\,x + C_1$$

Podemos determinar ***k*** como la pendiente de una recta de ajuste, midiendo como cambia ***x*** al cambiar el peso colgante.

- El sensor mide u, pero se pueden vincular:

$$x + u + C_2 = C_3$$

$$x = -u + C_4$$

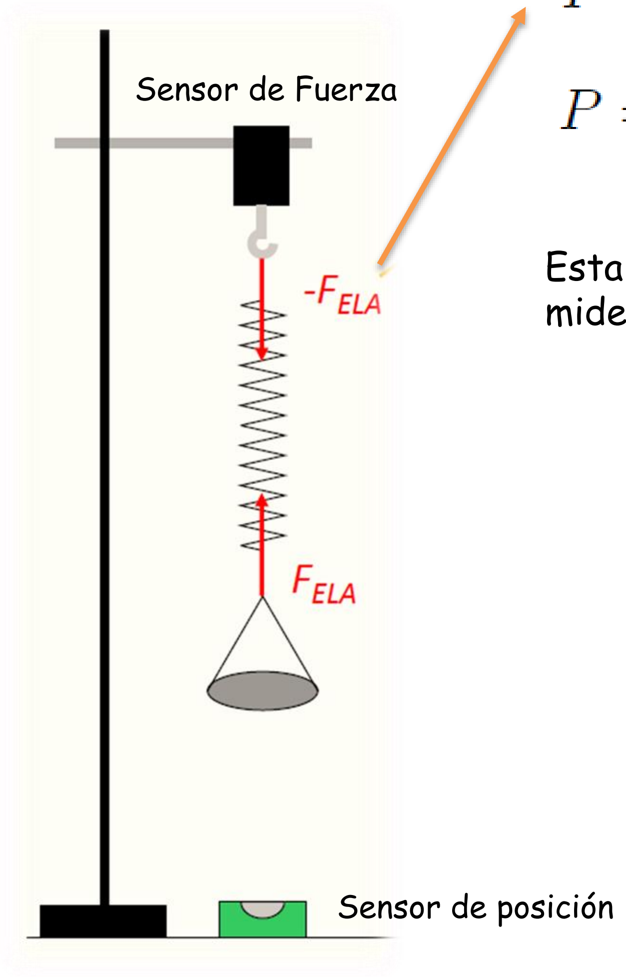
$$P = -ku + C_5$$

- Medir la posición ***u*** para 7 pesas diferentes.

- Calcular ***k*** mediante una regresión lineal.

Parte B : Medición estática con Sensor de Fuerza

El sensor no mide la fuerza sobre la masa, sino sobre sí mismo



$$P + F_{ELA} = 0$$

$$P = \boxed{-F_{ELA}} = -ku + C_5$$

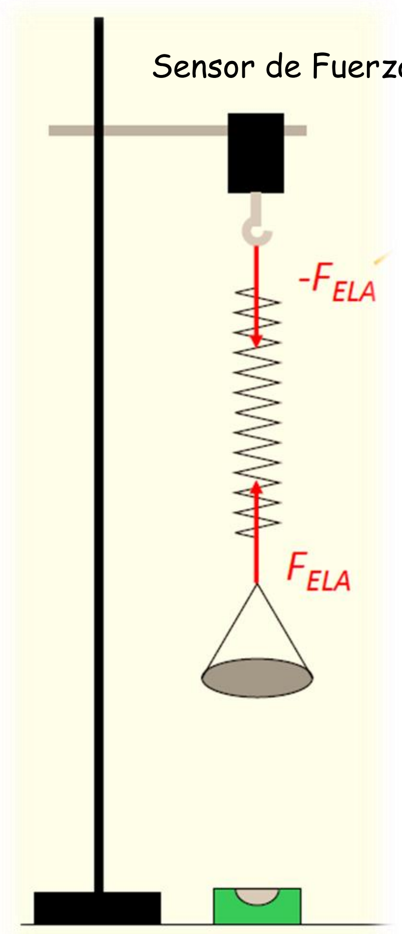
Esta es la magnitud que
mide el sensor de Fuerza

Dual-Range Force Sensor Vernier

Rango de 0.01 a 50 N.
Tiene dos rangos de fuerza .
+10 N con una resolución de 0.01 N
+50 N con resolución de 0.05 N.

La señal de salida es analógica.
Se digitaliza al pasar por el conversor A/D.

Parte B : Medición estática con Sensor de Fuerza



Principio de funcionamiento:

La flexión de una viga causa cambios de una resistencia en un circuito interno.
Esto genera un cambio de voltaje de salida del sensor que es proporcional a la fuerza ejercida sobre la viga.

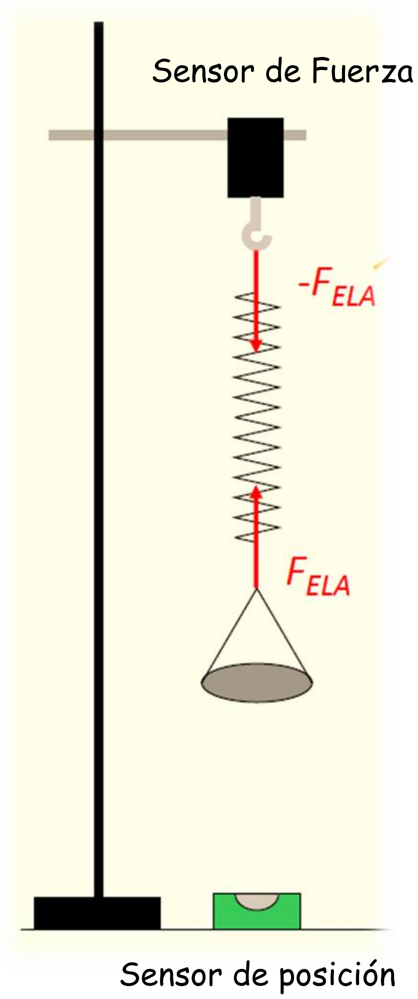
A mayor rango menor resolución.
Se debe realizar una calibración propia.

$$\text{Fuerza} = K0 + K1 * \text{Voltaje}$$

Calibración :

- No aplicar fuerza al sensor y colocarlo en orientación vertical.
- Seleccionar la opción de calibración en el programa en el programa MotionDaq.
- Introducir 0 N como la primera fuerza conocida.
- Aplicar una fuerza conocida al sensor, colgando una masa en el gancho del sensor.
- Introduzca el peso de la masa (1 kg aplica una fuerza de 9,8 N).
- Para este segundo punto de calibración :
  - En el rango de ±10 N, utilizar 300 g de masa (2,94 N).
  - En el rango de ±50 N, utilizar una masa de 1 kg (9,8 N).

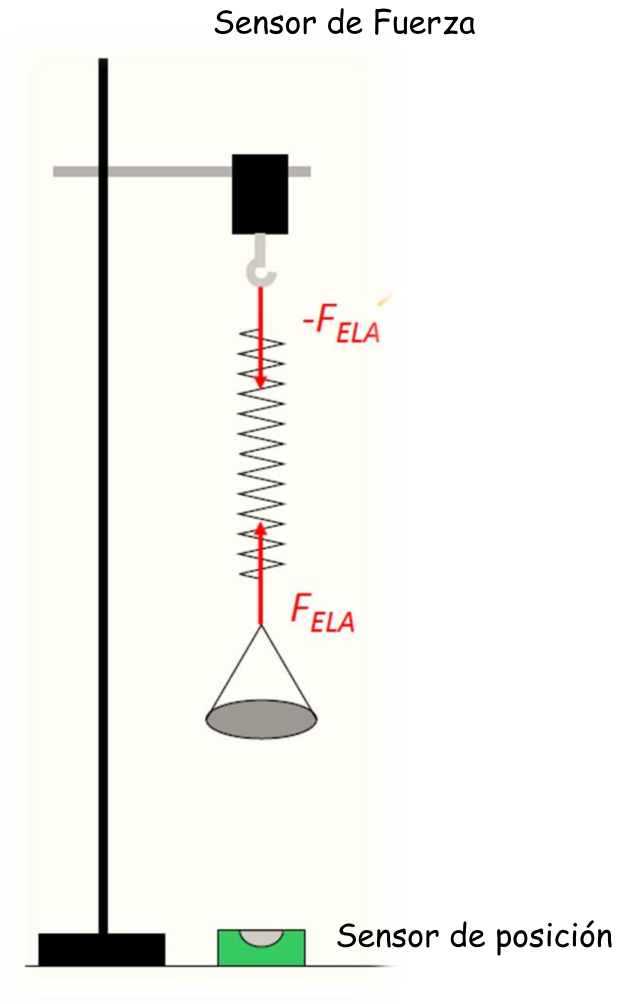
Parte B : Medición estática con Sensor de Fuerza



- Medir la posición $\boldsymbol{u}$ y la fuerza para 7 pesas diferentes en forma simultanea.
- Calcular $\boldsymbol{k}$ mediante una regresión lineal.

$$P = -ku + C_5$$

Trabajo Práctico N° 6 – Parte C



- Obtener el coeficiente elástico de un resorte con un Método Dinámico.
- Usar el mismo dispositivo que en el caso estático.
- Se elongará el sistema hasta una nueva posición de equilibrio.
- Se procede a poner a oscilar el sistema y lectura de los sensores en función del tiempo. Verificar que ese trate de un sistema en pequeñas oscilaciones.
- Realice este procedimiento para 5 pesos distintos.

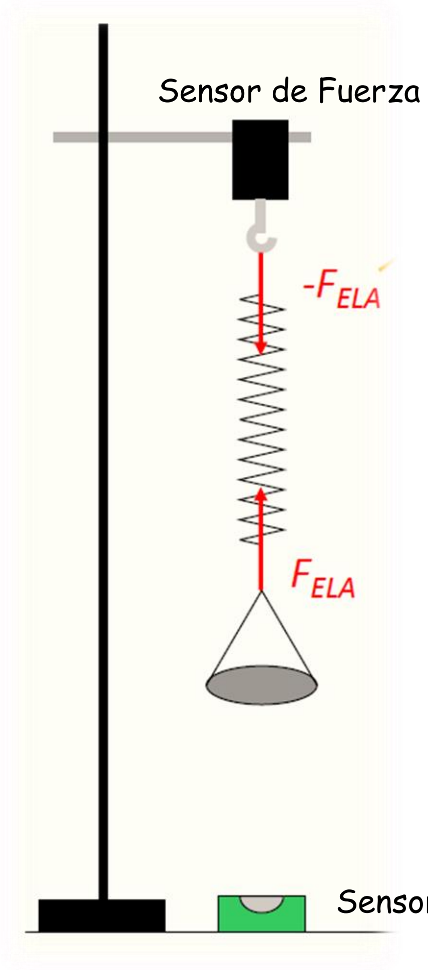
Se puede estimar parámetros con las señales en función del tiempo por separado.

$$x(t) = l_0 + \frac{mg}{k} + A\ \mathrm{sen}(\omega_0 t + \varphi)$$

$$u(t) = C_6 + B\,\mathrm{sen}(\omega_0\, t + \varphi)$$ Con el Sensor de posición

$$F(t) = C_7 + C\,\mathrm{sen}(\omega_0\, t + \varphi)$$ Con el Sensor de Fuerza

Trabajo Práctico N° 6 – Parte C

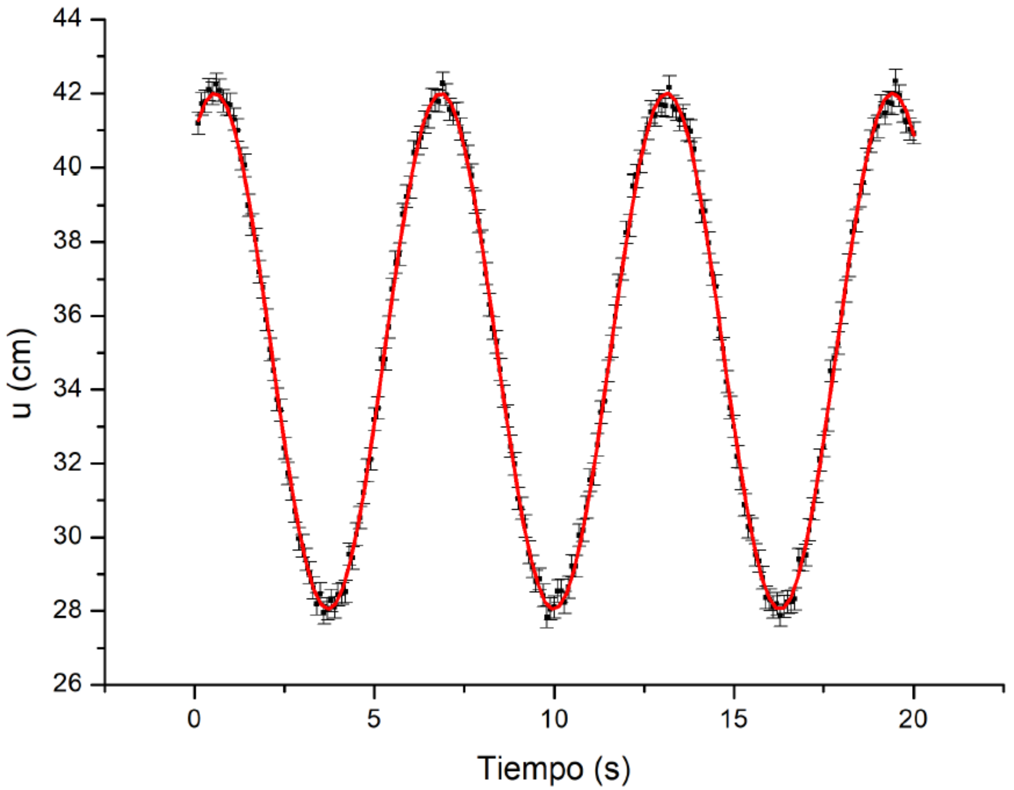


Se puede estimar parámetros con las señales en función del tiempo por separado.

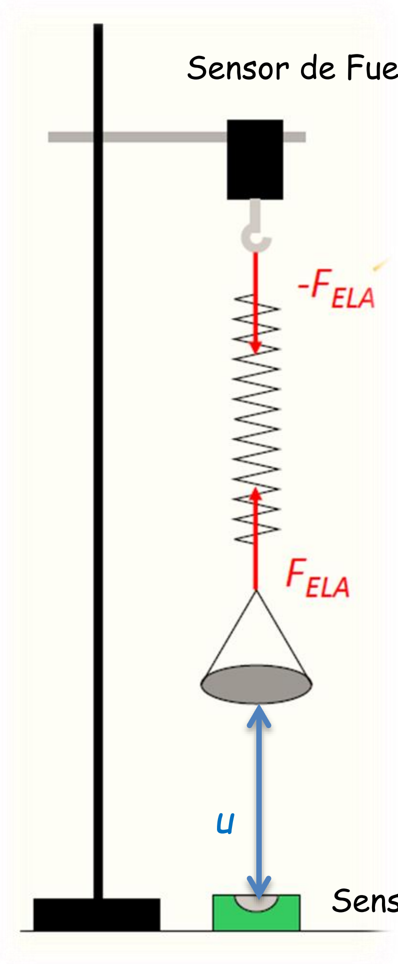
$$x(t) = l_0 + \frac{mg}{k} + A\ \mathrm{sen}(\omega_0 t + \varphi)$$

$$u(t) = C_6 + B\,\mathrm{sen}(\omega_0\, t + \varphi)$$

Con el Sensor de posición



Trabajo Práctico N° 6 – Parte C



✓ Determinación de la constante elástica k mediante un ajuste no lineal

Supongamos que medimos *u(t)*, también vale para *F(t)*.

$$u(t) = C_6 + B\,\mathrm{sen}(\omega_0\, t + \varphi) \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Queremos encontrar los parámetros $(C_6,\ B,\ \omega_0,\ \varphi)$ que minimizan:

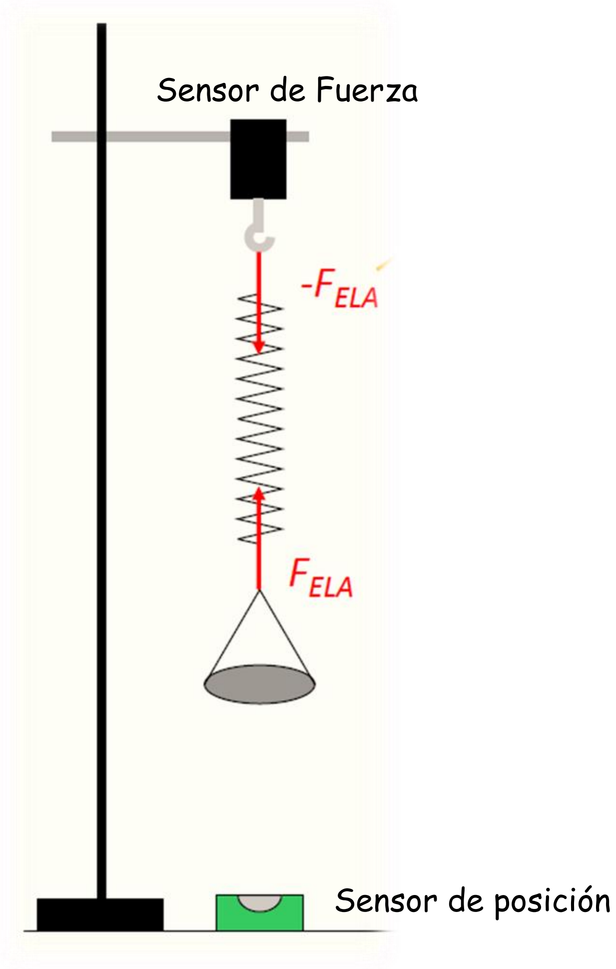
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{u_i - (C_6 + B\,\mathrm{sen}(\omega_0\, t_i + \varphi))}{\sigma_i} \right]^2$$

En este caso, hay una dependencia **no lineal** en los parámetros ω_0 y φ

Se resuelve con métodos computacionales. Son iterativos, no tienen solución única y dependen de los parámetros iniciales que se propongan.

Origin tiene métodos incorporados para las funciones que necesitamos. De esta manera, se puede determinar ω_0, y despejar *k* (habiendo determinado *m* con la balanza) para comparar con el resultado de otros métodos.

Trabajo Práctico N° 6 – Parte C



Resumiendo

- Una vez registrada la oscilación en función del tiempo, estudie la dependencia de la frecuencia ω_O con la masa.

$$\omega_o^2 = \frac{k}{m}$$

- ¿Cómo debería graficar estas variables para obtener una relación lineal?
- ¿Cuál es la variable con mayor incertidumbre relativa?
- Determine la constante elástica del resorte y su incertidumbre por este método. Compare con el valor obtenido por el método estático.
- A partir de sus mediciones, evalúe si el sistema estudiado verifica la ecuación de movimiento propuesta.

¿ PREGUNTAS ?