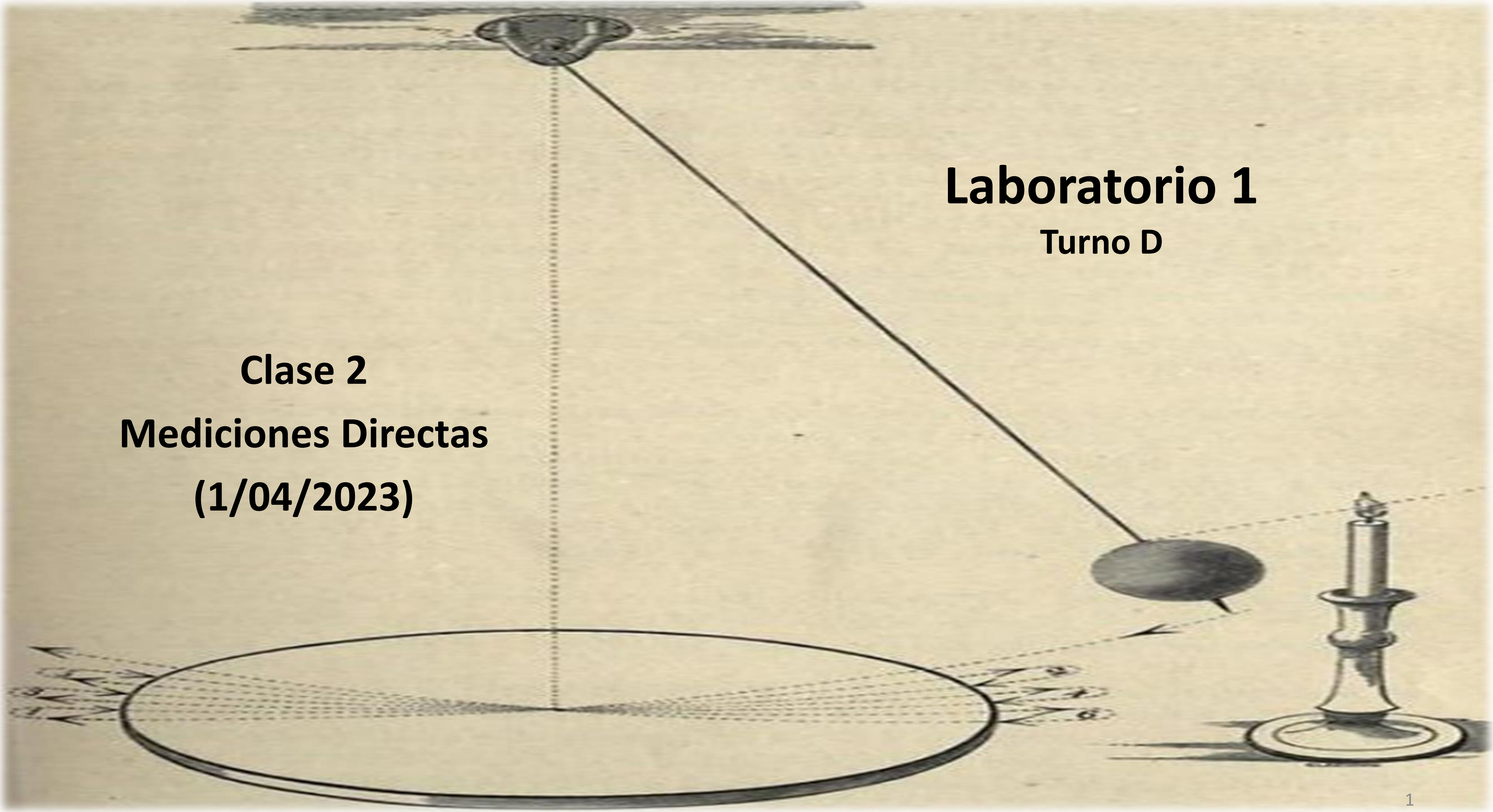


Laboratorio 1

Turno D

Clase 2

Mediciones Directas

(1/04/2023)

Recordando de la clase pasada :

Tipo generales de mediciones

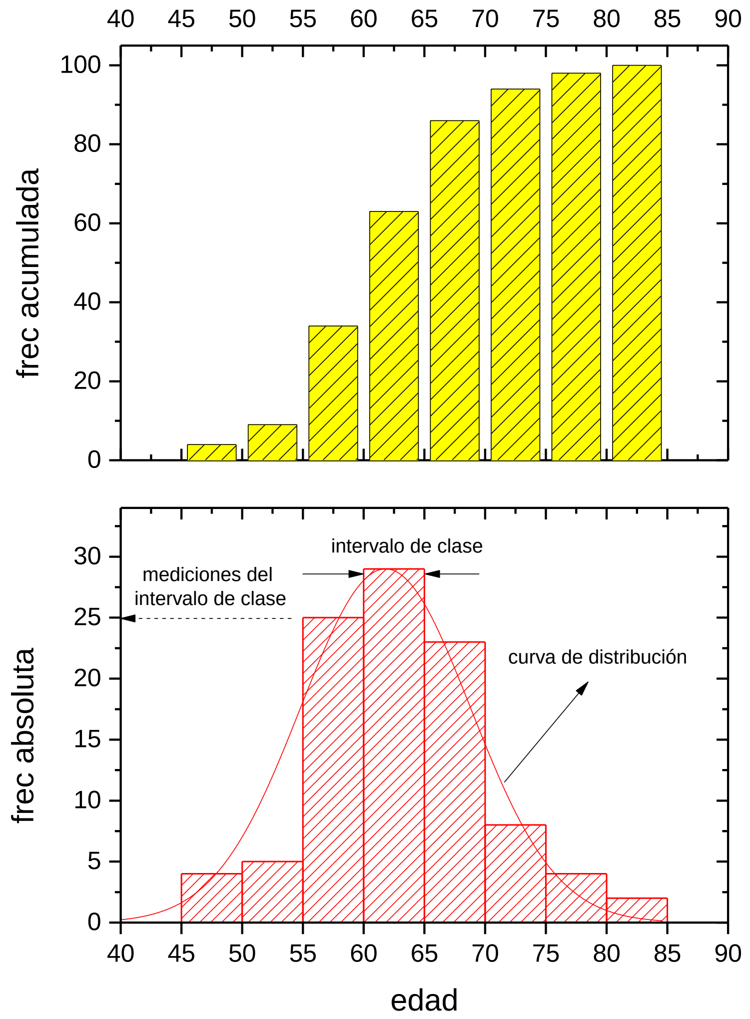
- **Directas** → El valor de la MF deseada se obtiene a partir de la lectura en un instrumento
  - Tiempo (cronómetro)
  - Longitud (regla)

  Experiencia en clase anterior

- **Indirectas** → El valor de la MF deseada se obtiene mediante un proceso matemático con otras magnitudes obtenidas por un instrumento
  - Volumen
  - Superficie
  - Potencia eléctrica
  - Aceleración
  - etc

Existen algunos instrumentos con los cuales se pueden medir en forma directa también

Histograma



	N tota	Mean	Stand	Sum	Mode	Minim	Media	Maxi
A	100	61.8	7.006	6180	60	45	60	80

Muestreo de una población

Regla de Sturges

Se utiliza para estimar la cantidad de intervalos de clase un histograma (número de clases)

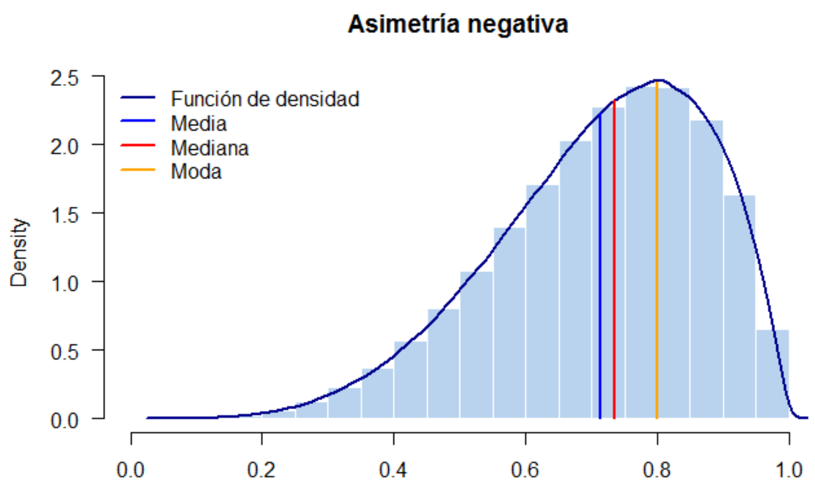
$$c = 1 + 3.322 \cdot \log N$$

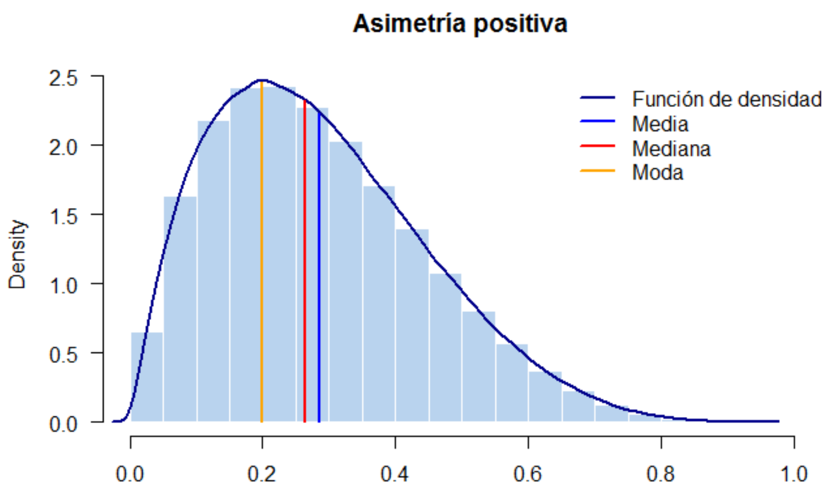
siendo N la cantidad de datos.

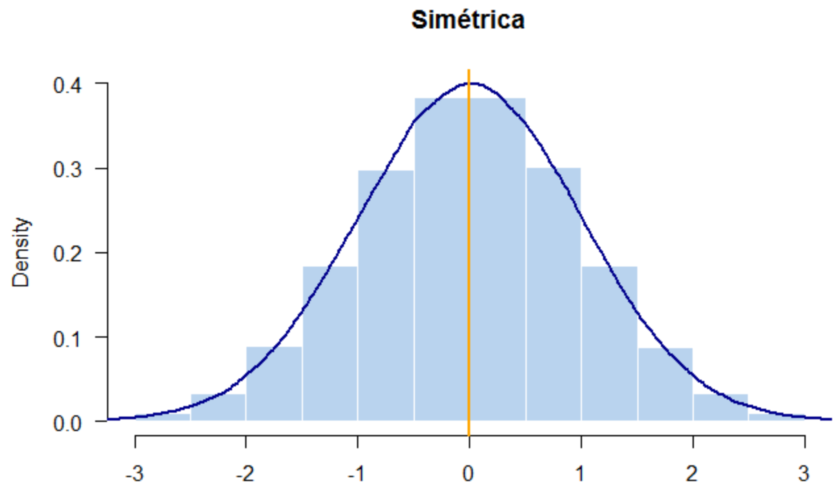
	A	B	C
1	N	clase	clase redondeado
2	100	7,66	8
3	33	6,04	6

Intervalo de Clases (x_i)	Frecuencias		Frecuencias	
	Absoluta (n_i)	Acumulada (f_i)	Relativa (N_i)	Acumulada (F_i)
X1	n1	n1	f1 = n1 / n	f1
X2	n2	n1 + n2	f2 = n2 / n	f1 + f2
...	...	...	...	...
Xn-1	n_n-1	n1 + n2 +..+ n_n-1	fn-1 = n_n-1 / n	f1 + f2 +..+fn-1
Xn	**n_n**	**Σ n**	**fn = n_n / n**	**Σ f**

$$\underbrace{\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}}_{\textbf{promedio}} \qquad \underbrace{s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}_{\textbf{varianza}} \qquad \underbrace{\sigma = \sqrt{s^2}}_{\textbf{Desv. estandard}} \qquad \boldsymbol{rango} = x_N - x_1$$







✓ Parámetros de Tendencia Central

Moda : es el valor en el eje horizontal del histograma el cual tiene frecuencia máxima.

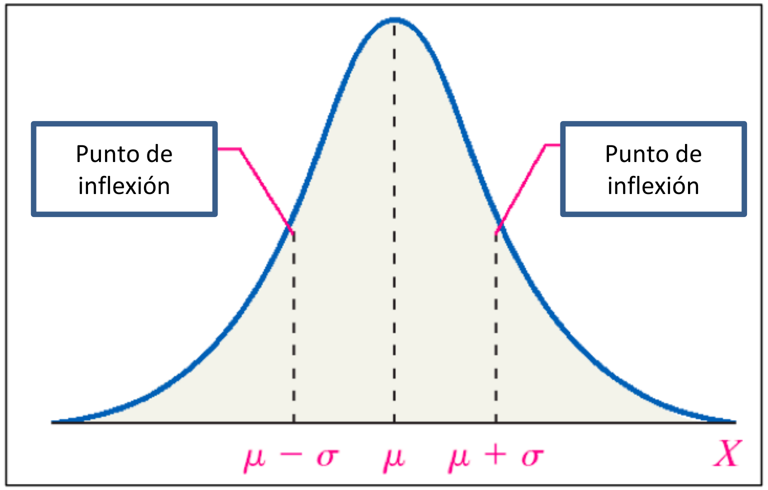
Mediana: es el valor del eje X que separa en partes iguales el área del histograma.

Media : es el valor promedio del conjunto de valores experimentales. Indica cual es el valor más probable.

Distribución Normal (Gaussiana)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1}$$



Cambio de variables

$y = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$

$dx = \sqrt{2}\,\sigma\, dy$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \sqrt{2}\sigma dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sqrt{2}\sigma \sqrt{\pi} = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Distribución Normal (Gaussiana)
Momento de primer orden (valor medio)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

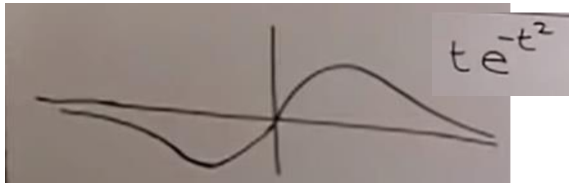
y=x−μ
dy=dx
x=y+μ

Cambio de variables

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (y+\mu) e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \mu e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy}_{\mu} + \cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy}$$



−A + A = 0

$$\Longrightarrow \boxed{\bar{x} = \mu}$$

El valor medio valor medio es el valor central de la distribución normal

Distribución Normal (Gaussiana)
Momento de segundo orden (varianza)

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\text{varianza}=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$y = x-\mu$
$dy = dx$
$x = y+\mu$

Cambio de variables

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}y^2 e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy$$

Utilizamos la siguiente propiedad de la integrales

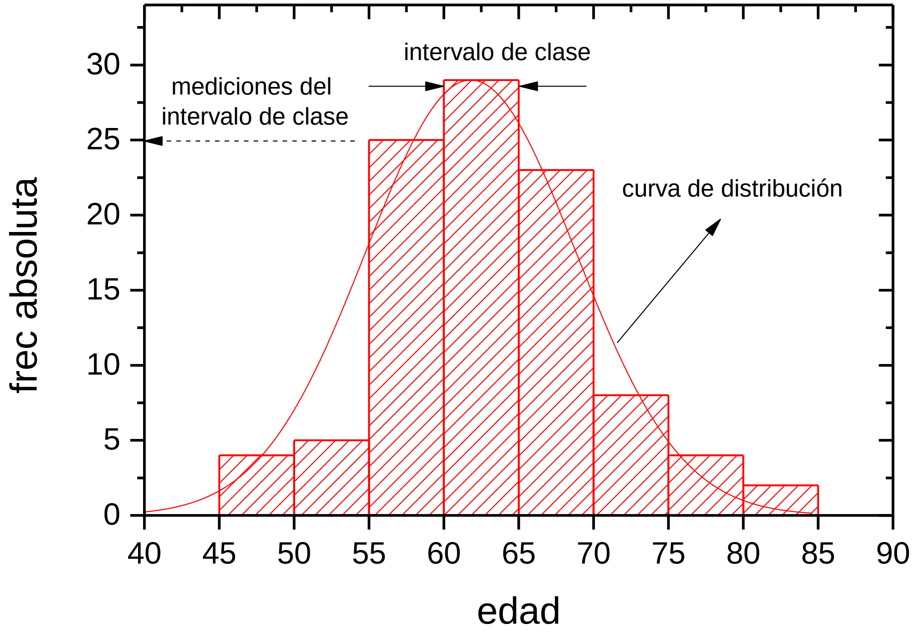
$$\int u\,dv = uv-\int v\,du \quad \begin{cases} u=y & du=dy \\ dv=ye^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy & v=-\sigma^2 e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \end{cases}$$

$$\text{varianza}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left\{\left[\cancel{-\sigma^2 ye^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}}\right]_{-\infty}^{\infty}+\left[\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy\right]\right\} \longrightarrow \boxed{\text{varianza}=\sigma^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy=1$$

σ es la desviación standard

Ejemplo : Distribución gaussiana calculada con las edades de un conjunto de personas en una sala



	N tota	Mean	Stand	Sum	Mode	Minim	Media	Maxi
A	100	61.8	7.006	6180	60	45	60	80

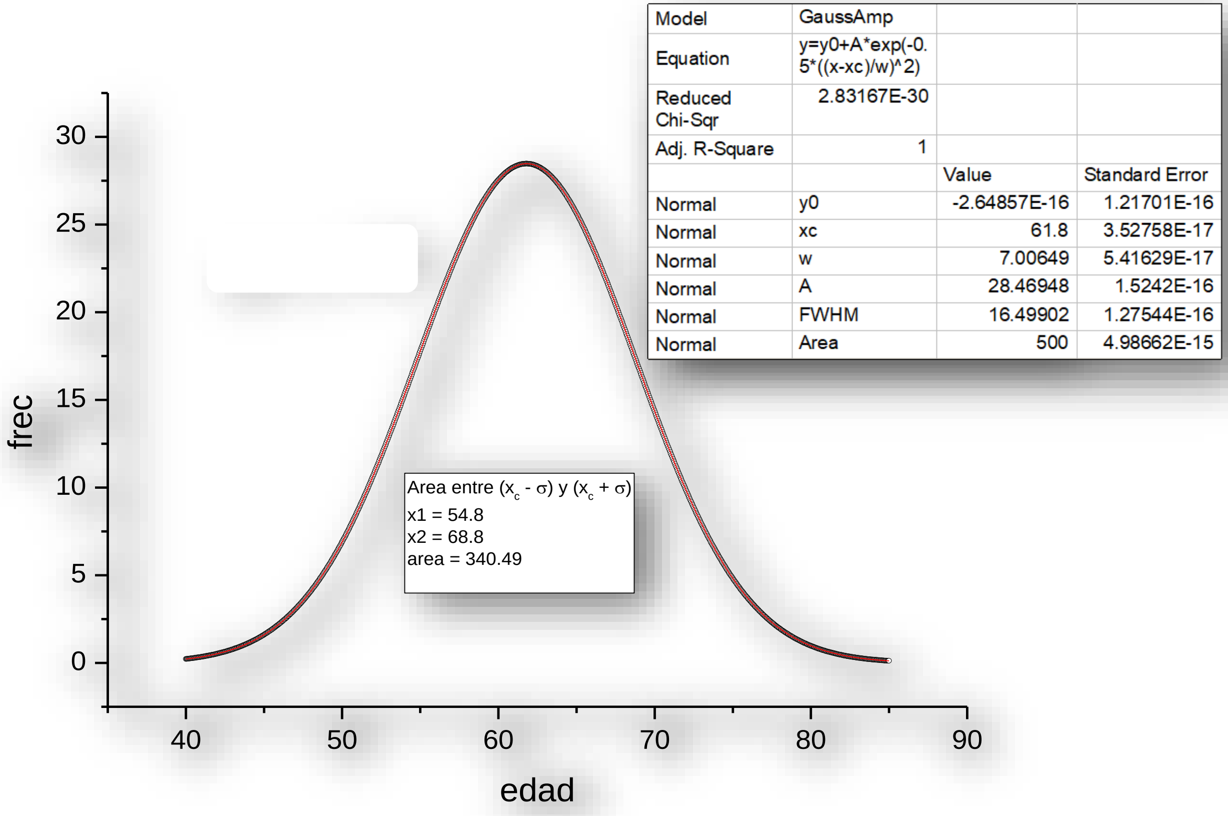
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\omega} e^{-\frac{(x-x_c)^2}{2\omega^2}}$$ Función gaussiana normalizada $\left\{ \begin{array}{l} x_c = \bar{x} = \mu \\ \omega = \sigma \end{array} \right.$

$$g(x) = y_o + Ae^{-\frac{(x-x_c)^2}{2\omega^2}}$$ Función gaussiana sin normalizar y con línea de base

$$\text{área } (x_c - \sigma, x_c + \sigma) \longrightarrow 68\ \%$$

$$\text{área } (x_c - 2\sigma, x_c + 2\sigma) \longrightarrow 95.4\ \%$$

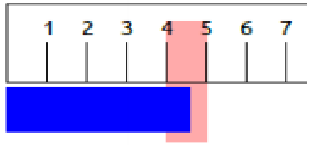
$$\text{área } (x_c - 3\sigma, x_c + 3\sigma) \longrightarrow 99.7\ \%$$



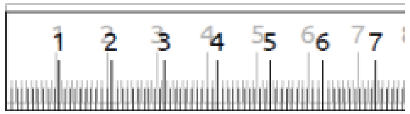
Model	GaussAmp		
Equation	y=y0+A*exp(-0.5*((x-xc)/w)^2)		
Reduced Chi-Sqr	2.83167E-30		
Adj. R-Square	1		
		Value	Standard Error
Normal	y0	-2.64857E-16	1.21701E-16
Normal	xc	61.8	3.52758E-17
Normal	w	7.00649	5.41629E-17
Normal	A	28.46948	1.5242E-16
Normal	FWHM	16.49902	1.27544E-16
Normal	Area	500	4.98662E-15

I. Errores introducidos por el INSTRUMENTO

→ **Error de Apreciación (σ_{ap}):** mínima división que puede resolver el observador



→ **Error de Exactitud (σ_{ex}):** asociado con el error de calibración del instrumento

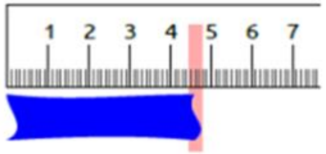


II. Error de interacción (σ_{int})

Proviene de la interacción del método con el objeto a medir

III. Error por definición (σ_{def})

Asociado con la falta de definición del objeto



Error nominal σ_N $\quad \sigma_N^2 = \sigma_{Ap}^2 + \sigma_{ex}^2 + \sigma_{int}^2 + \sigma_{def}^2$

Errores estadísticos σ_e
errores aleatorios,
producidos al azar.

Incerteza absoluta

$$\Delta x = \sqrt{\sigma_N^2 + \sigma_e^2}$$

Si solo mido 1 vez solo tengo el error nominal $\Rightarrow$ $\Delta x = \sigma_N$

Si la medición de la magnitud física se realiza fuera del error del instrumento $\Rightarrow$ Error Estadístico $\Rightarrow$ σ_e

Si medimos N veces la MF

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$ promedio

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}-x_i)^2}{N}}$$ dispersión

$var(x)$

Cuando tenemos un valor finito de datos, N, la desviación standard es S

$N \to \infty$

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$$

$$var = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{x})^2 f(x)dx$$

$$\sigma = \sqrt{var(x)}$$

Intervalo de confianza

$$\begin{cases} \bar{x} - S \leq x \leq \bar{x} + S \\ \bar{x} - \sigma \leq x \leq \bar{x} + \sigma \end{cases}$$

Si se realiza una nueva medición, x_i , esta tendrá un probabilidad de un 68 % de ubicarse en este intervalo

Expresión

$(\bar{x} \pm S)\ unidades$

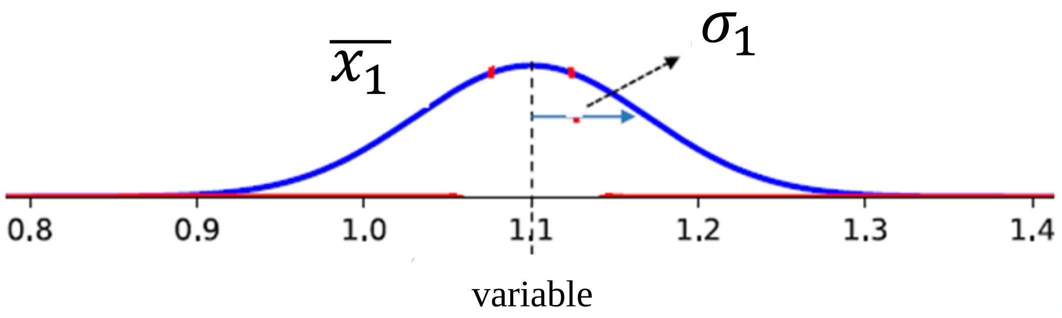
$(\bar{x} \pm \sigma)\ unidades$

Supongamos una primera experiencia donde medimos una magnitud física, x , N veces.

Promedio $\overline{x_1}$

Desviación estandard σ_1

Realizamos un segundo muestreo, también de N muestras, de la misma magnitud con el mismo método de medición.
Ahora obtenemos $\overline{x_2}$ y σ_2



- ✓ ¿ Cómo difieren $\overline{x_1}$ y $\overline{x_2}$?
- ✓ ¿ Será diferente σ_1 de σ_2 ?

Si el número de datos es suficientemente grande como para tener definido el proceso estadístico, entonces

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$$

Si repite n veces la experiencia, los promedios $\bar{x}_i$ de las diferente muestras de N datos c/u van a seguir una distribución Gausssiana centrada en

$$\langle \bar{x} \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n} \bar{x}_i$$

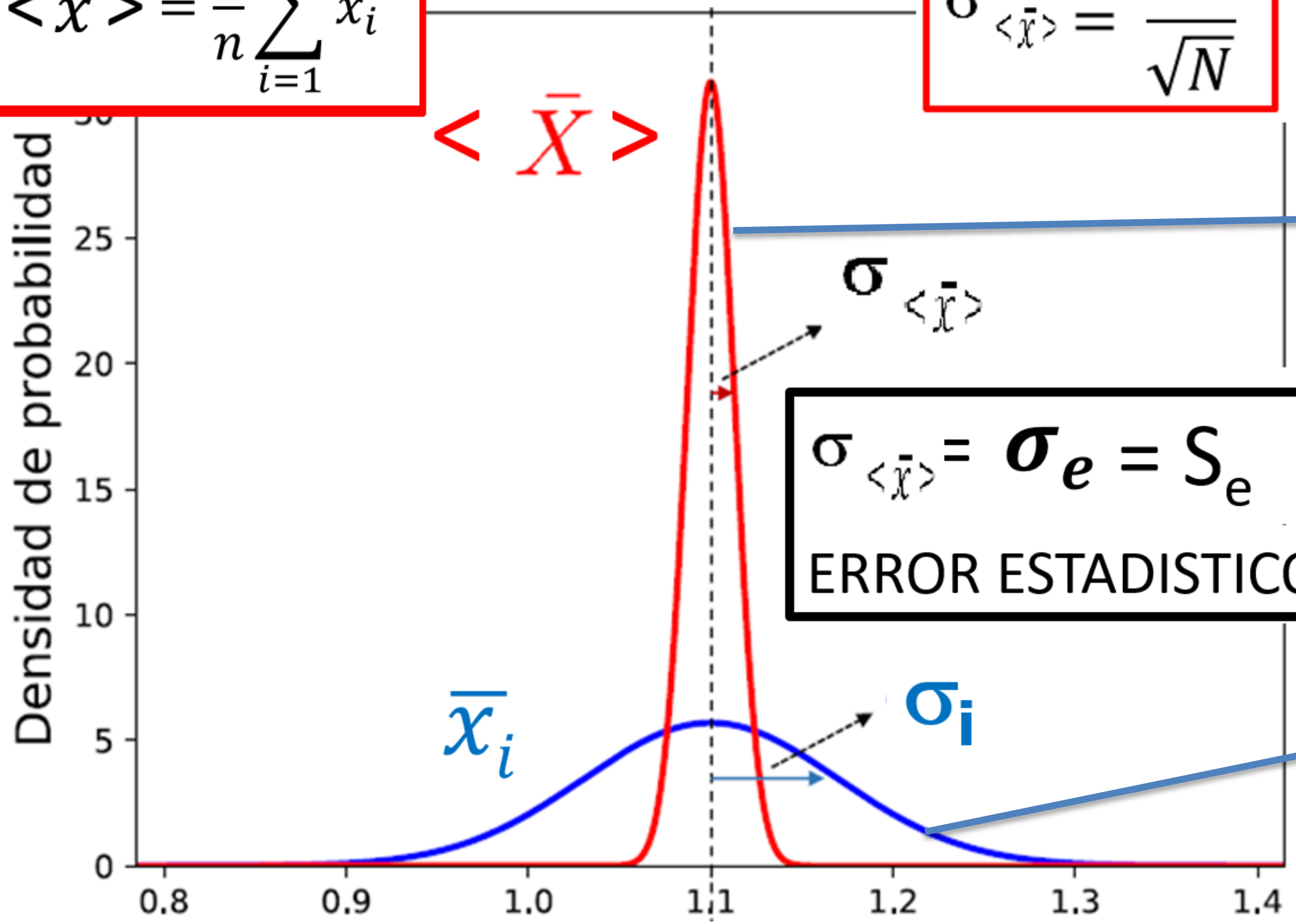
y una dispersión estándar de los promedios de cada experimento $\bar{x}_i$

$$\sigma_{\langle \bar{x} \rangle} = \sigma_e = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Teorema central del límite

$$< \bar{x} > = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sigma_{<\bar{x}>} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$



$$\sigma_{<\bar{x}>} = \boldsymbol{\sigma_e} = S_e$$

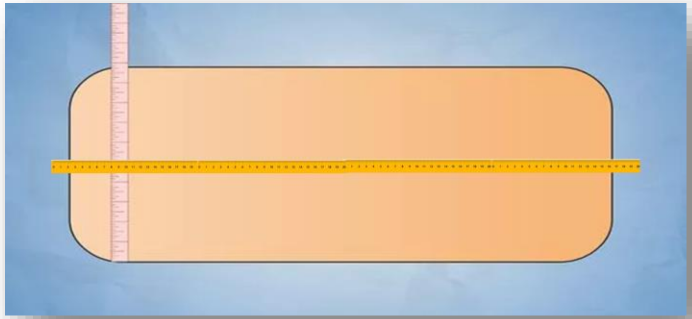
ERROR ESTADISTICO

Distribución de las n muestras
de N mediciones c/u

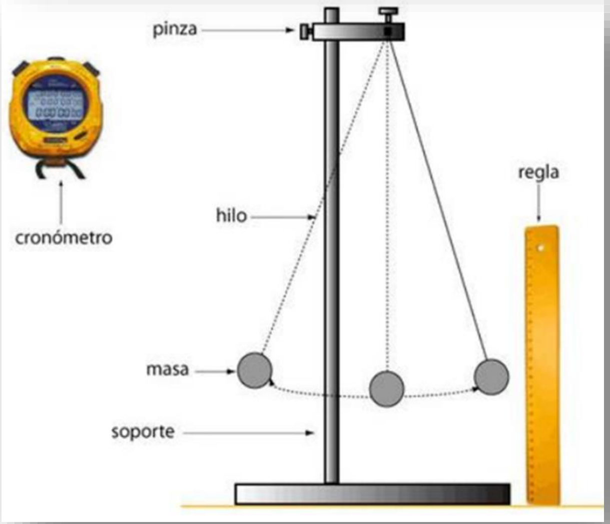
Se trata de una muestra
con N mediciones

Experiencias (1ra clase)

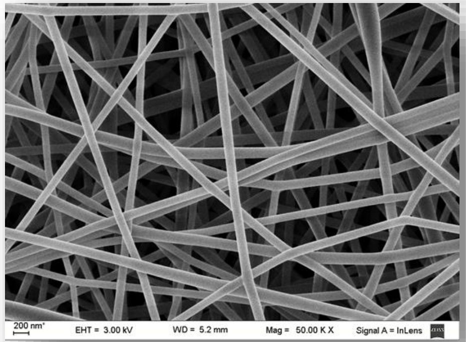
Primera experiencia – Medición del largo de un objeto ✓



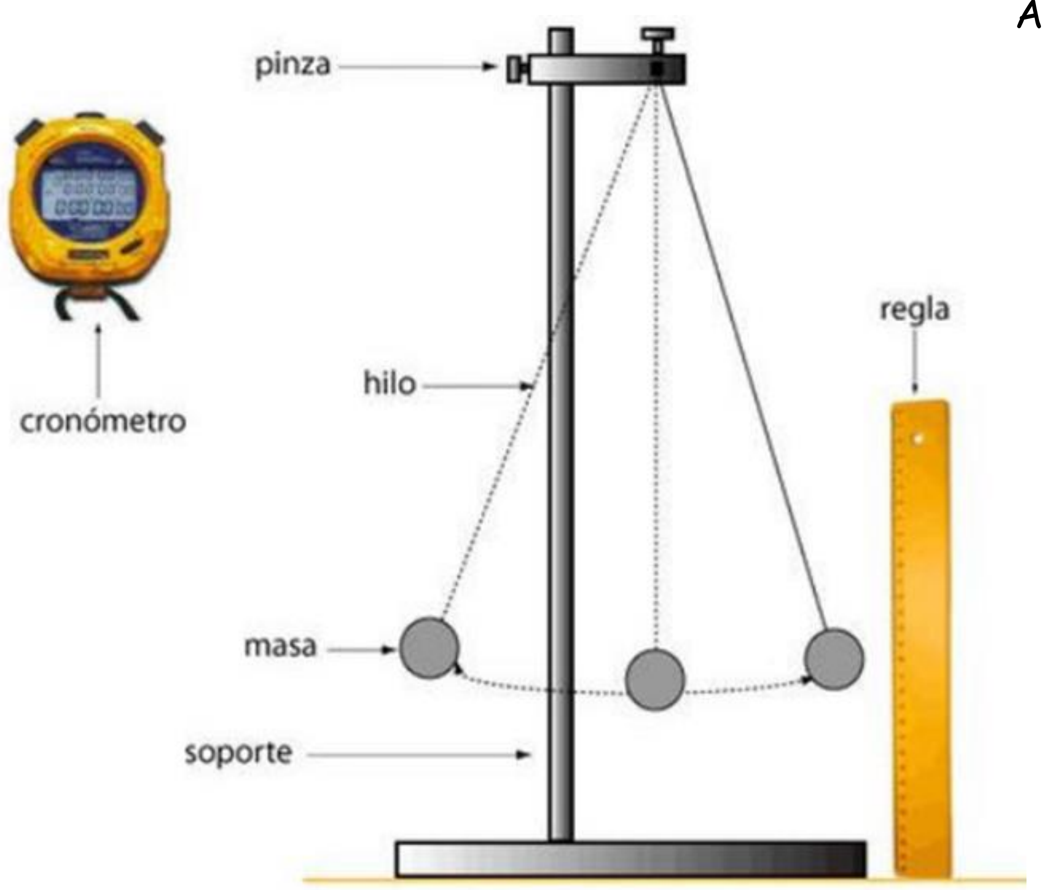
Segunda experiencia – Medición del período de un péndulo simple



Tercera experiencia – Medición del diámetro de una fibra ✓



Segunda experiencia – Medición del período de un péndulo simple



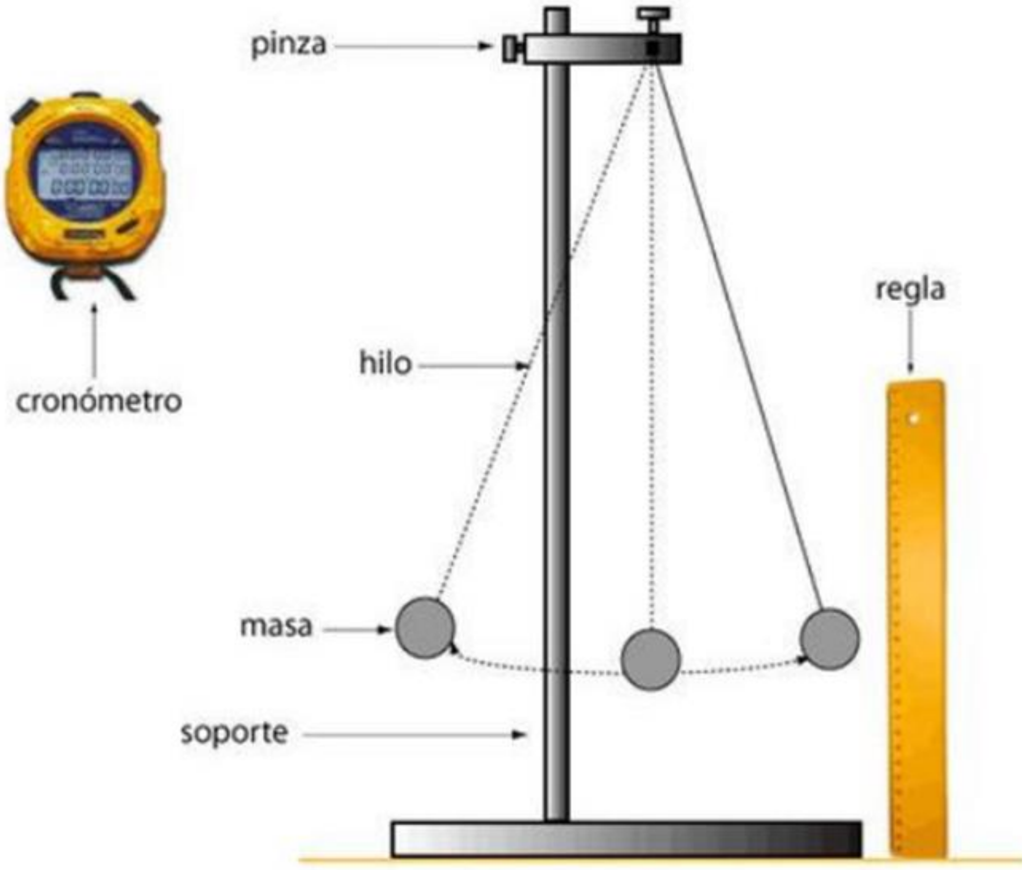
Medir la longitud del hilo del péndulo (aprox. 1 m) con cinta métrica (precisión = 0.1 cm).

Armar el péndulo.

1. Se mide 100 veces **el período** del péndulo con un cronómetro **desde la posición de mínima velocidad**. Estimar la amplitud inicial (ángulo inicial)

   - Tome las primeros 25 mediciones. Construya el histograma y estime sus parámetros. Calcule promedio y dispersión.
   - Repita el mismo procedimiento con las primeras 50, 75 y 100 mediciones.
   - Analizar diferencias. Presentar los resultados como $\boldsymbol{T} = (\overline{\boldsymbol{T}} \pm \boldsymbol{\sigma})$

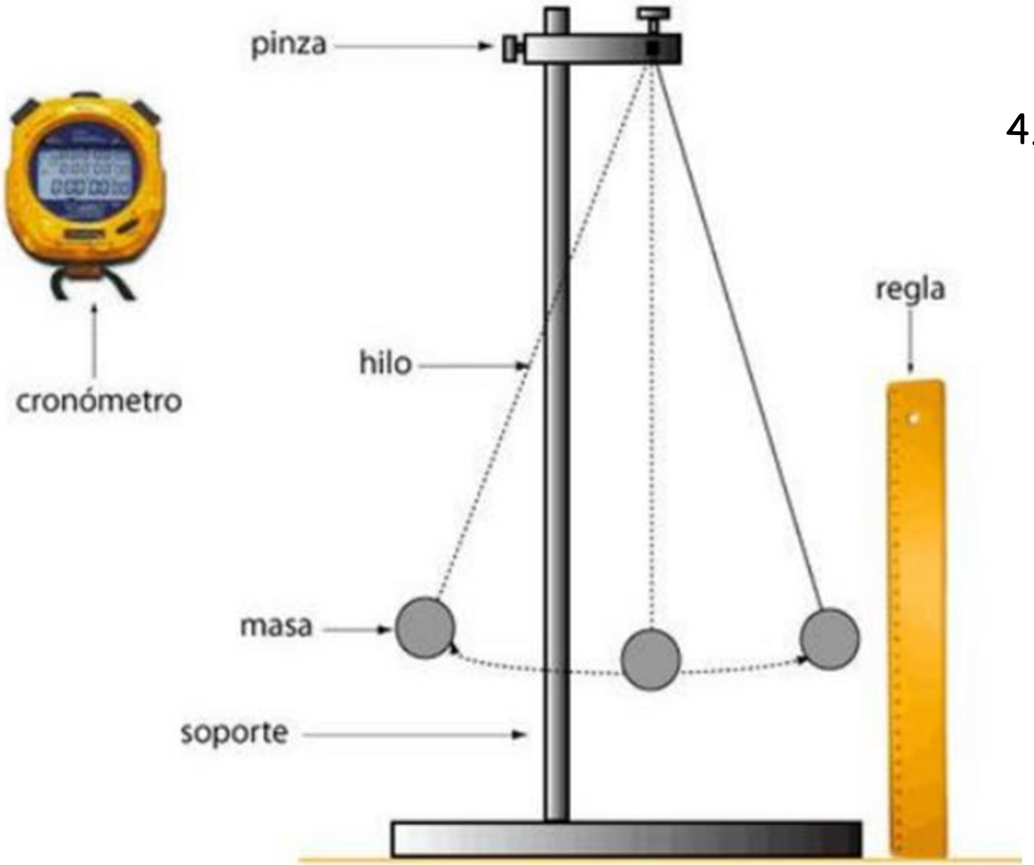
Segunda experiencia – Medición del período de un péndulo simple



2. Se mide 100 veces el período del péndulo con un cronómetro **desde la posición de máxima velocidad**. Construir el histograma y estime sus parámetros. Calcule promedio y dispersión.

    - Se dividen los valores en tandas de 20, 10 y 5 datos organizados en el orden que fueron medidos.
    - Se calcula el valor medio y el desvío de cada tanda.
    - Se calcula el promedio de esas medidas y un promedio de los desvíos, con su error.

<u>Segunda experiencia – Medición del período de un péndulo simple</u>



3. Se toma el tiempo de 3 períodos consecutivos desde la posición de máxima velocidad.
   Se repite 33 veces. Construir el histograma y calcular los parámetros.

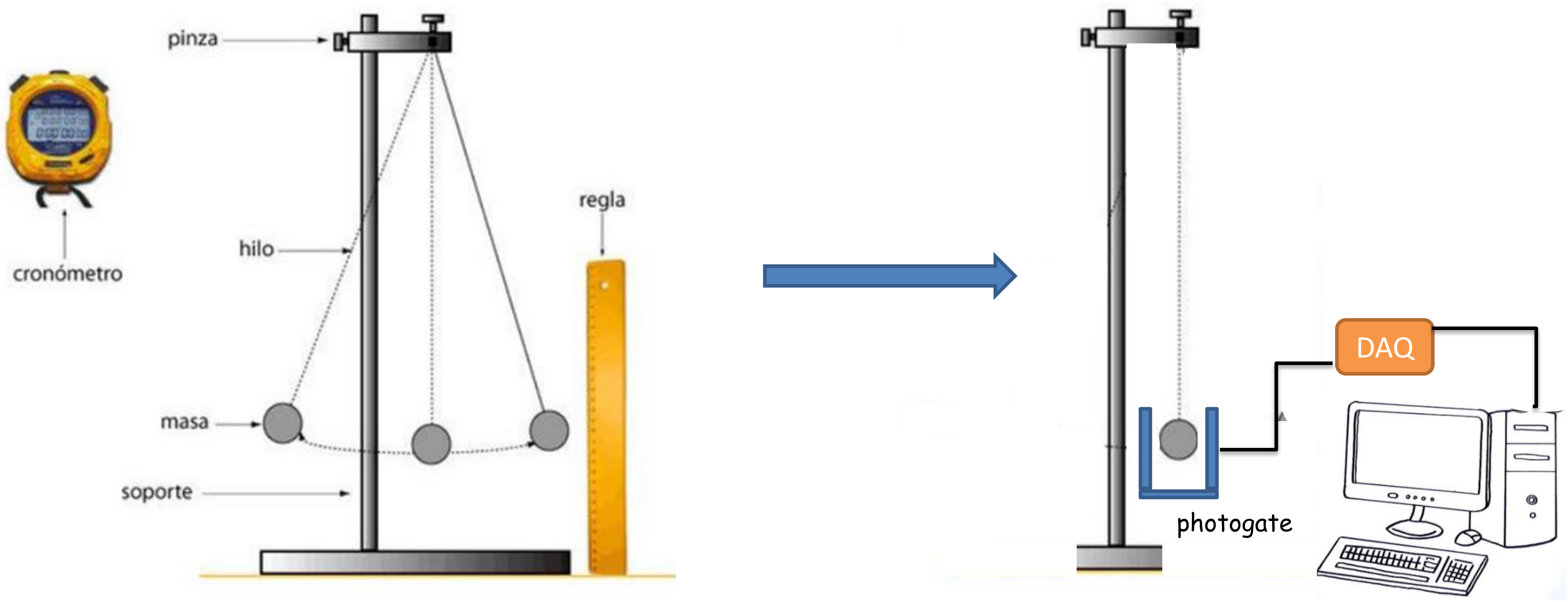
4. Se toma el tiempo de 10 períodos consecutivos desde la posición de máxima velocidad.
   Se repite 10 veces. Construir el histograma y calcular los parámetros.

Se calcula el valor medio en ambos casos (con el error total y con el desvío estándar).

Cuarta experiencia – Medición del período de un péndulo simple con photogate

Medir la longitud del hilo del péndulo (aprox. 1 m) con cinta métrica (precisión = 0.1 cm).

Armar el péndulo.



<u>Objetivo</u>

Medición del periodo del péndulo y sus errores con un detector óptico (*photogate PG*) y un sistema de adquisición de datos (DAQ)

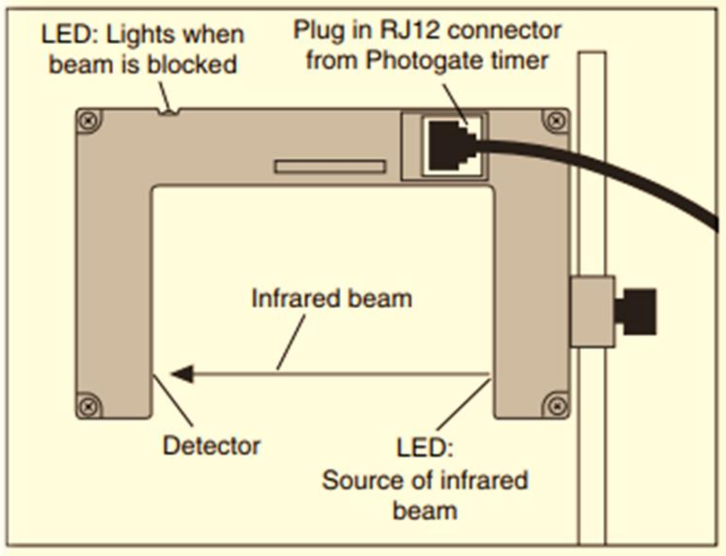
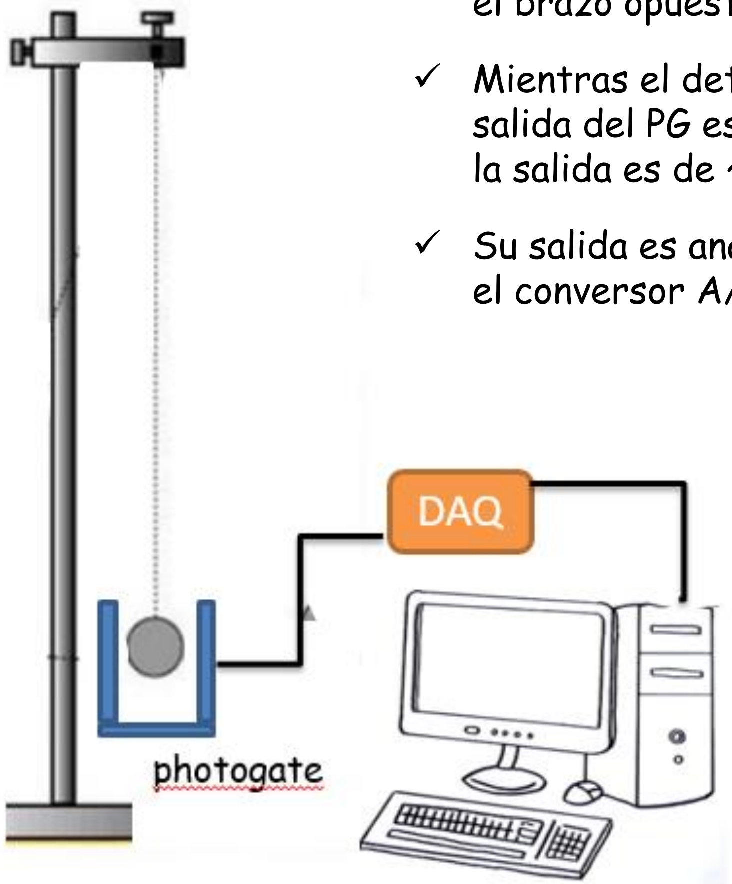


Figure 1: The PASCO Photogate Head

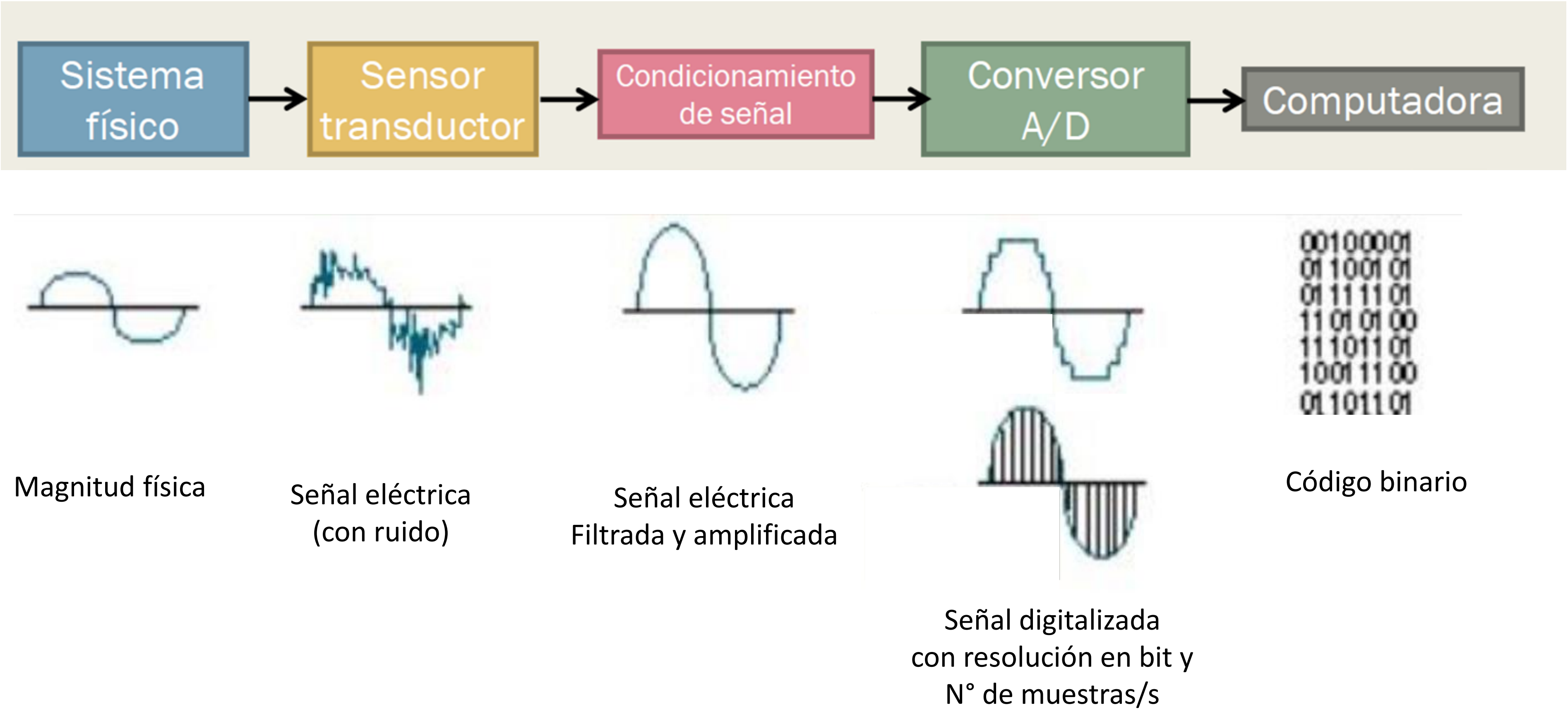


- ✓ El photogate Pasco ME-9498 A permite obtener señales muy precisas para determinar tiempo entre eventos.
- ✓ Principio de funcionamiento: en uno de los brazos se emite un haz infrarrojo (IR), que llega a un detector rápido IR en el brazo opuesto.
- ✓ Mientras el detector está recibiendo el haz, la señal de salida del PG es de +5V, mientras que si algo obtura al haz, la salida es de ~ 0V (o viceversa).
- ✓ Su salida es analógica. Para ser digitalizada, debe pasar por el conversor A/D.

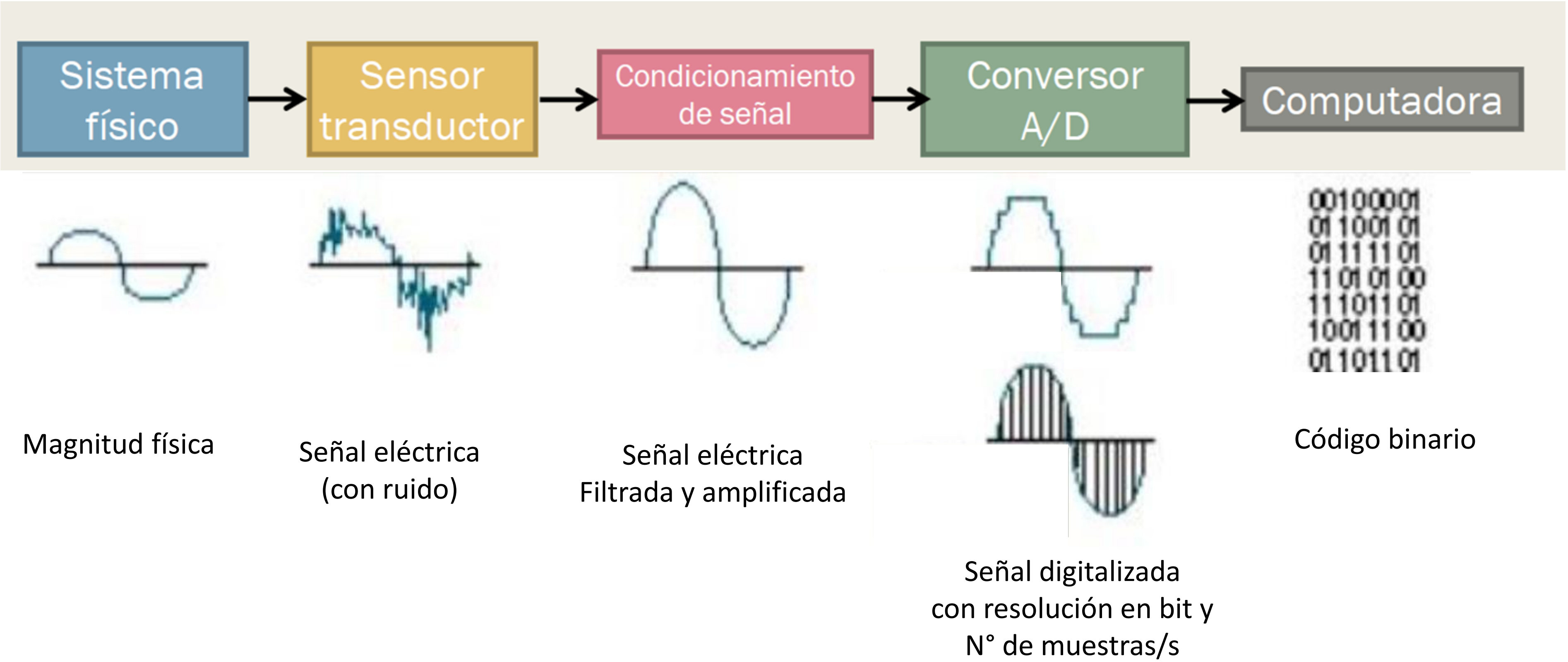
Sistemas de Adquisición de datos (DAQ)

Objetivo: obtener mediciones de variables o fenómenos físicos de interés.

Los sistemas de adquisición de datos típicamente convierten la medición de una señal analógica a un lenguaje digital para su almacenamiento y procesamiento con la computadora.



Sistemas de Adquisición de datos (DAQ)



- ✓ La calidad del sensor y del proceso de digitalización determinan la calidad de la señal adquirida.
- ✓ Digitalizar es discretizar una señal continua, tanto temporalmente como los niveles que alcanza la señal.
- ✓ La cantidad de bits de un conversor analógico digital determina la resolución en voltaje,
- ✓ La frecuencia de muestreo es la que determina la resolución temporal de la digitalización.
- ✓ A mayor # de bits y mayor frecuencia de muestreo, mayor el costo.

Resolución : Cada dato medido se representa usando una x cantidad de números binarios (bits)

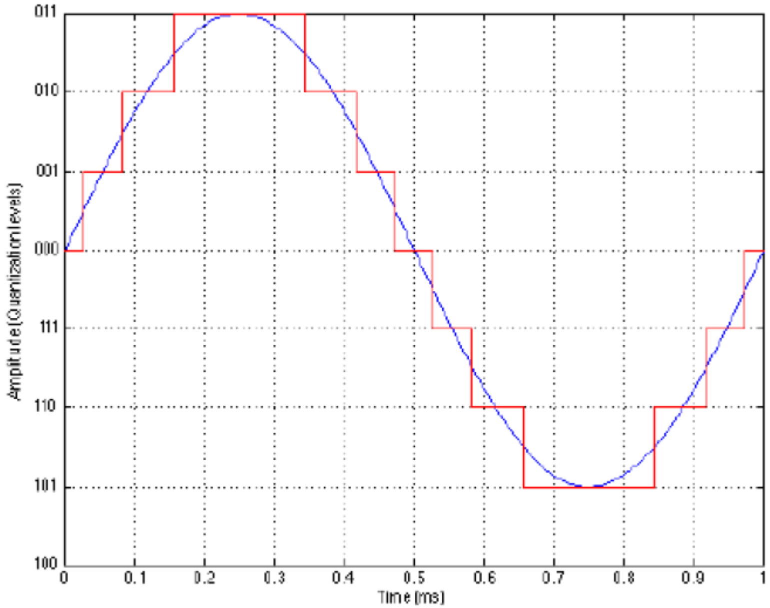
Ejemplo

2 bits → 00, 10, 01, 11

3 bits → 000, 010, 001, 011, 100, 110, 101, 111

x bits → 2^x números

$$\text{Resolución} = \frac{\text{Rango}}{2^x}$$

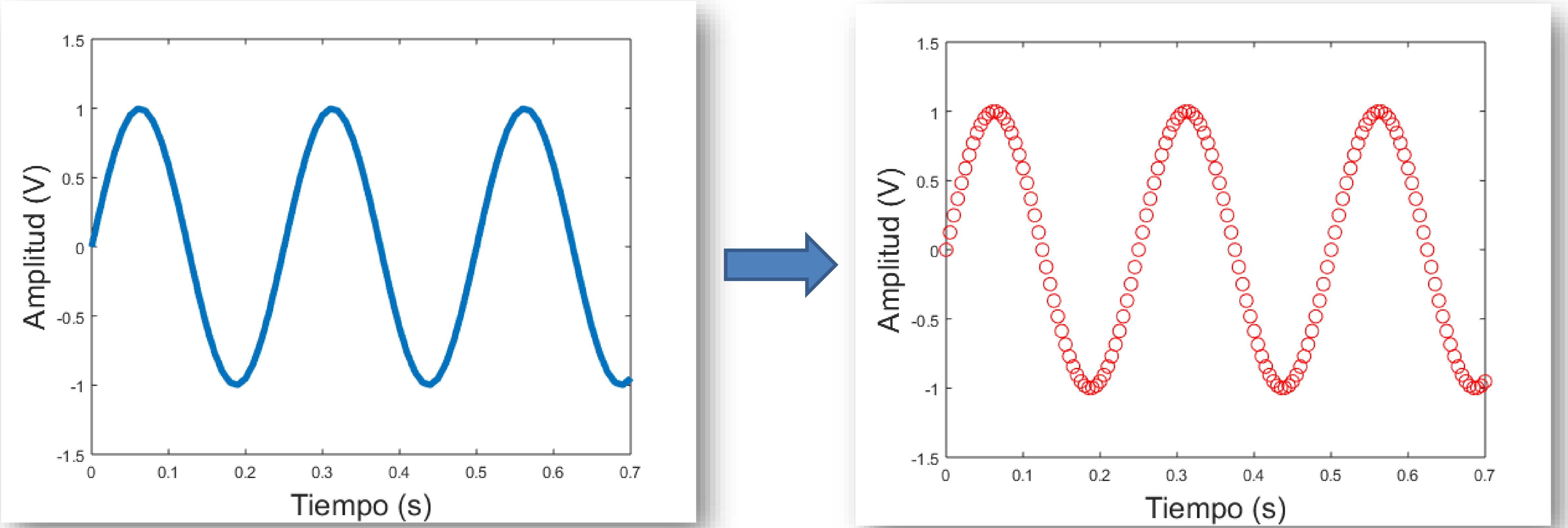


La señal no puede tomar valores intermedios!

Frecuencia de muestreo

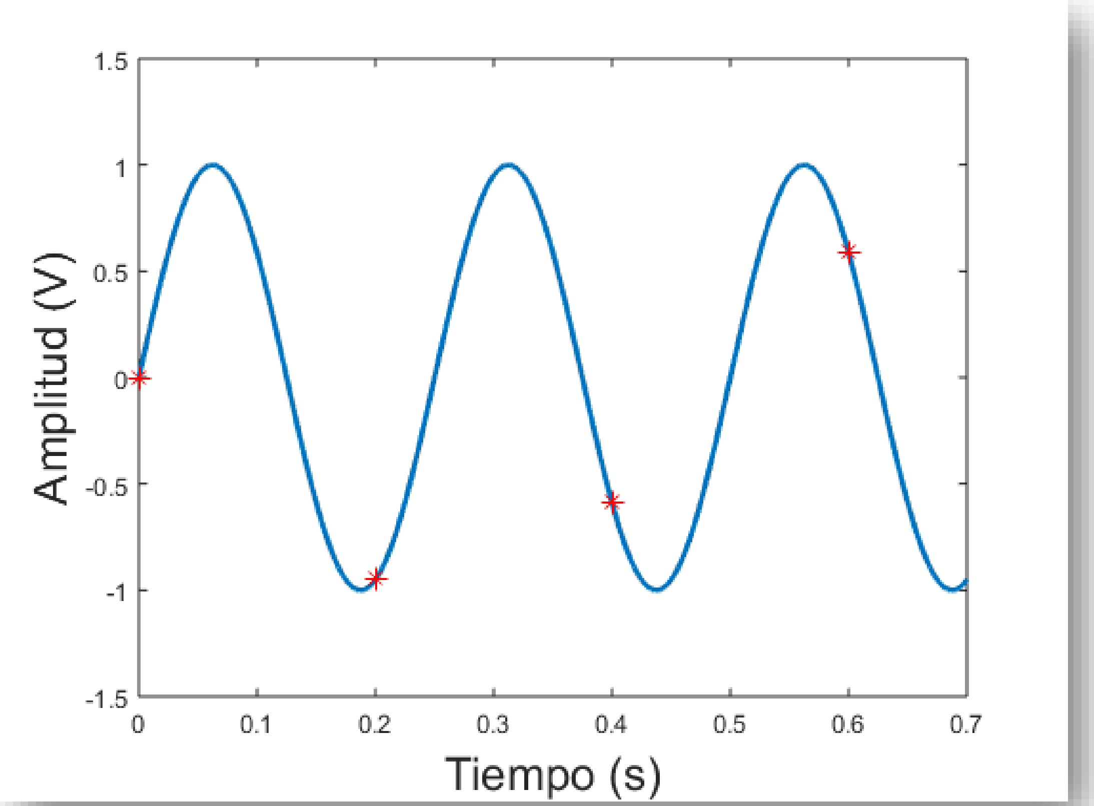
Así como la cantidad de bits determina los niveles en los que se discretiza la señal, la frecuencia de muestreo determina cada cuánto se toma una muestra

- $Frecuencia\ de\ muestreo = \frac{\#\ de\ muestras}{segundo},\quad [Fs] = \frac{1}{s} = Hz$

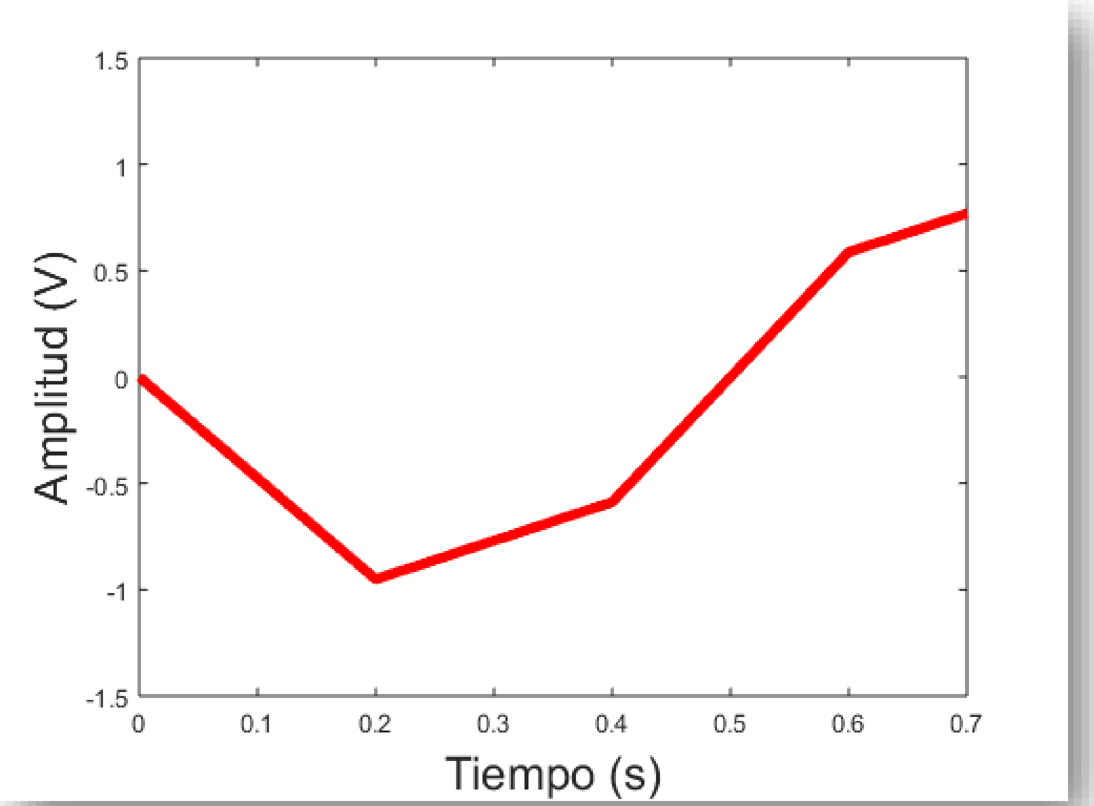


Frecuencia de muestreo

- ✓ La frecuencia de muestreo determina que frecuencias de la señal pueden ser recuperadas.
- ✓ La frecuencia de Nyquist , $f_s/2$.
- ✓ Un resultado intuitivo : Si se quiere ver una oscilación, al menos dos veces por período (fs > 2 x f(evento))



Mal muestreo



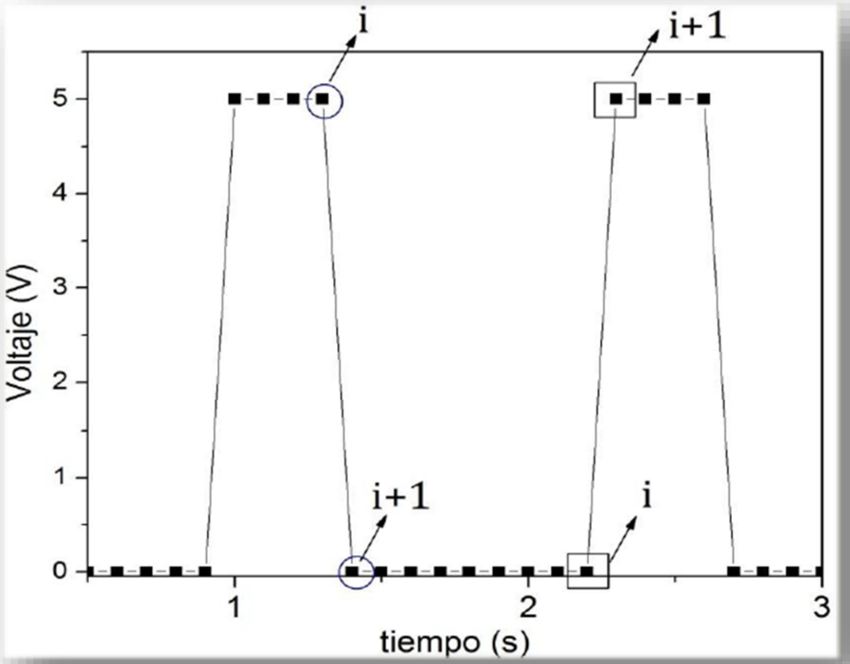
¿ Qué conversor analógico /digital usamos en Laboratorio 1 ?

Resolución (tensión): 13 bits (2^{13} = 8192 números)

Frecuencia de muestreo máxima: 48000 Hz

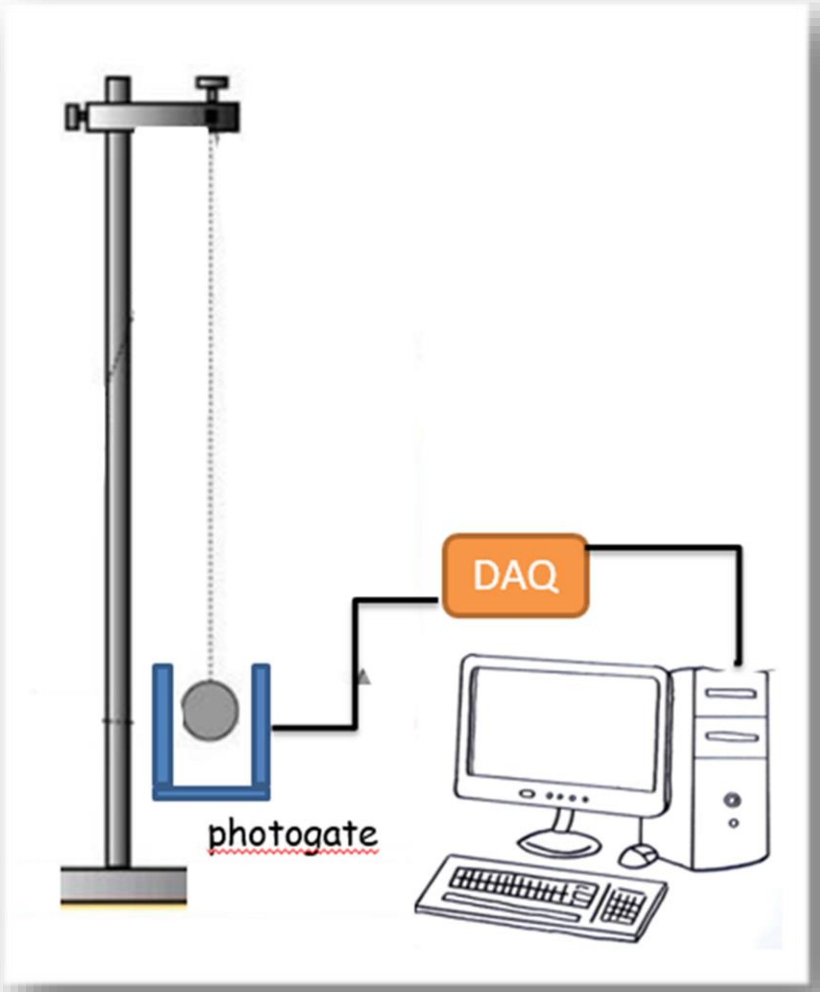
3 canales analógicos, 1 digital

En este caso, la salida que interesa son los tiempos en los que ocurre el evento, y no el valor de voltaje de salida.
Ver documento sobre cómo calcular velocidades a partir de estas señales.

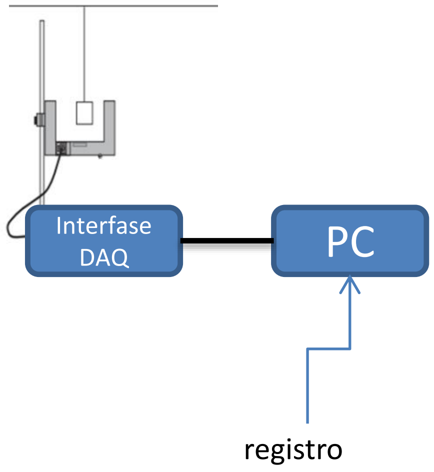


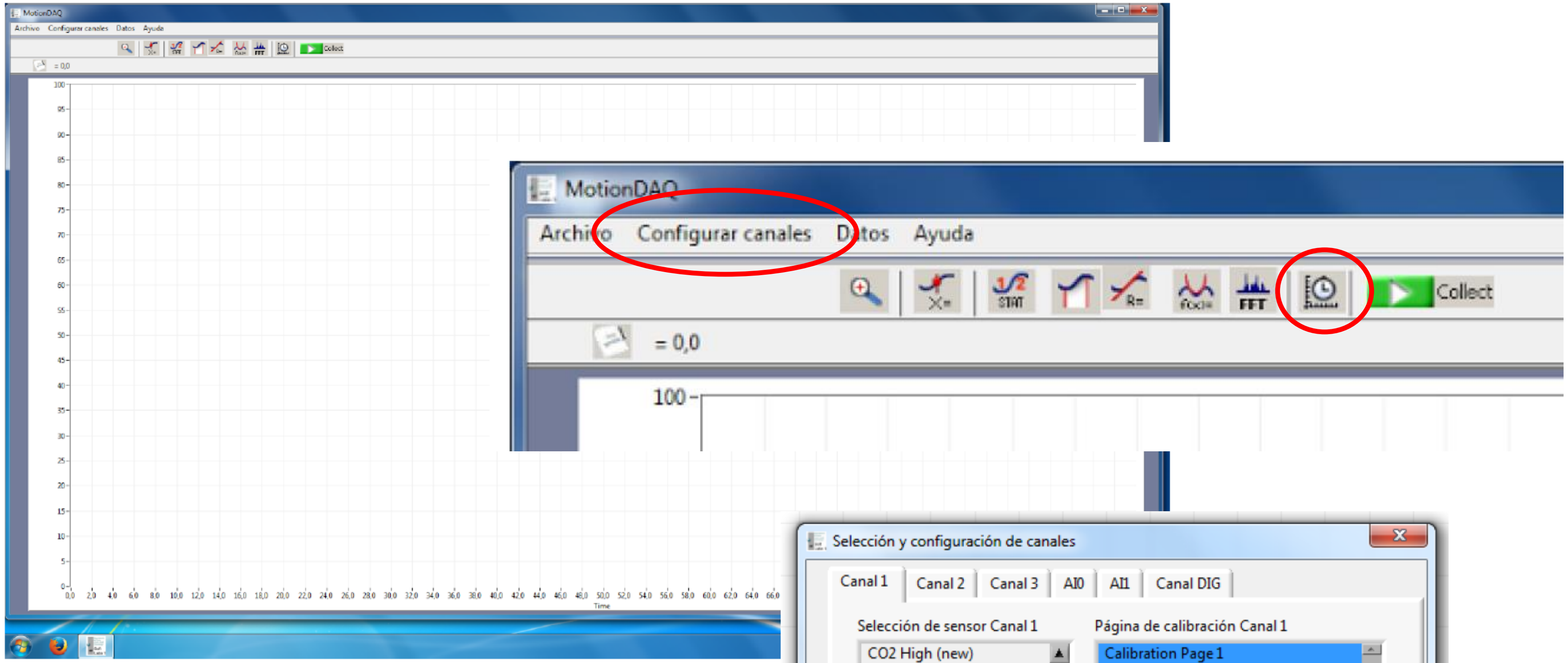
Ya que es un conversor A/D de 13 bits (8192 números) la sensibilidad es 5 Volts/8192 = 0,0006 Volts

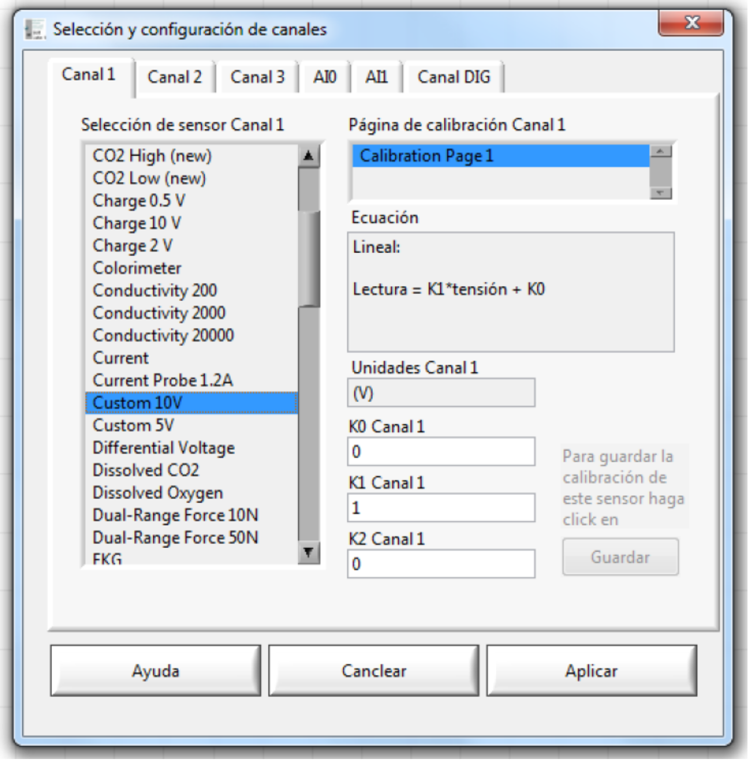
Realización de la experiencia



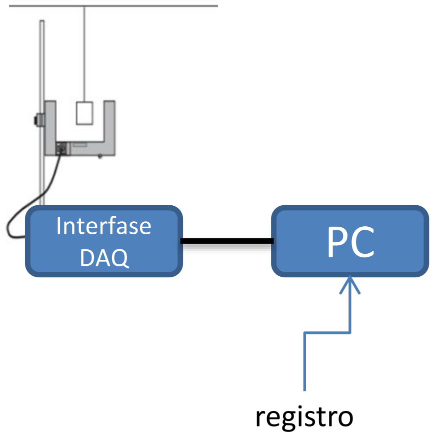
- ✓ Medir la longitud del hilo del péndulo.
- ✓ Se coloca el sensor (photogate) en un soporte.
- ✓ El sensor es conectado al adquisidor de datos (SensorDaq Vernier) a su vez conectado a la PC.
- ✓ Se activa el software de la PC (MotionDAQ) que reconoce el sensor.
- ✓ Se debe setear el tiempo de medición para que tome aproximadamente 100 períodos y la velocidad de muestreo en 100 muestras/s.
- ✓ Aplicar al péndulo una amplitud de oscilación máxima baja (ángulos pequeños).
- ✓ Cada vez que la masa del péndulo pasa por el photogate, el mismo envía una señal al adquisidor de datos.
- ✓ Cuando la masa obtura el led del photosensor, la señal detectada es nula, de lo contrario, la señal es máxima (5V aprox).
- ✓ Repetir la velocidad de muestreo. (100 m/s , 200 m/s ,1000 m/s, 5000 m/s).
- ✓ Comparar los parámetros estadísticos obtenidos en cada caso.

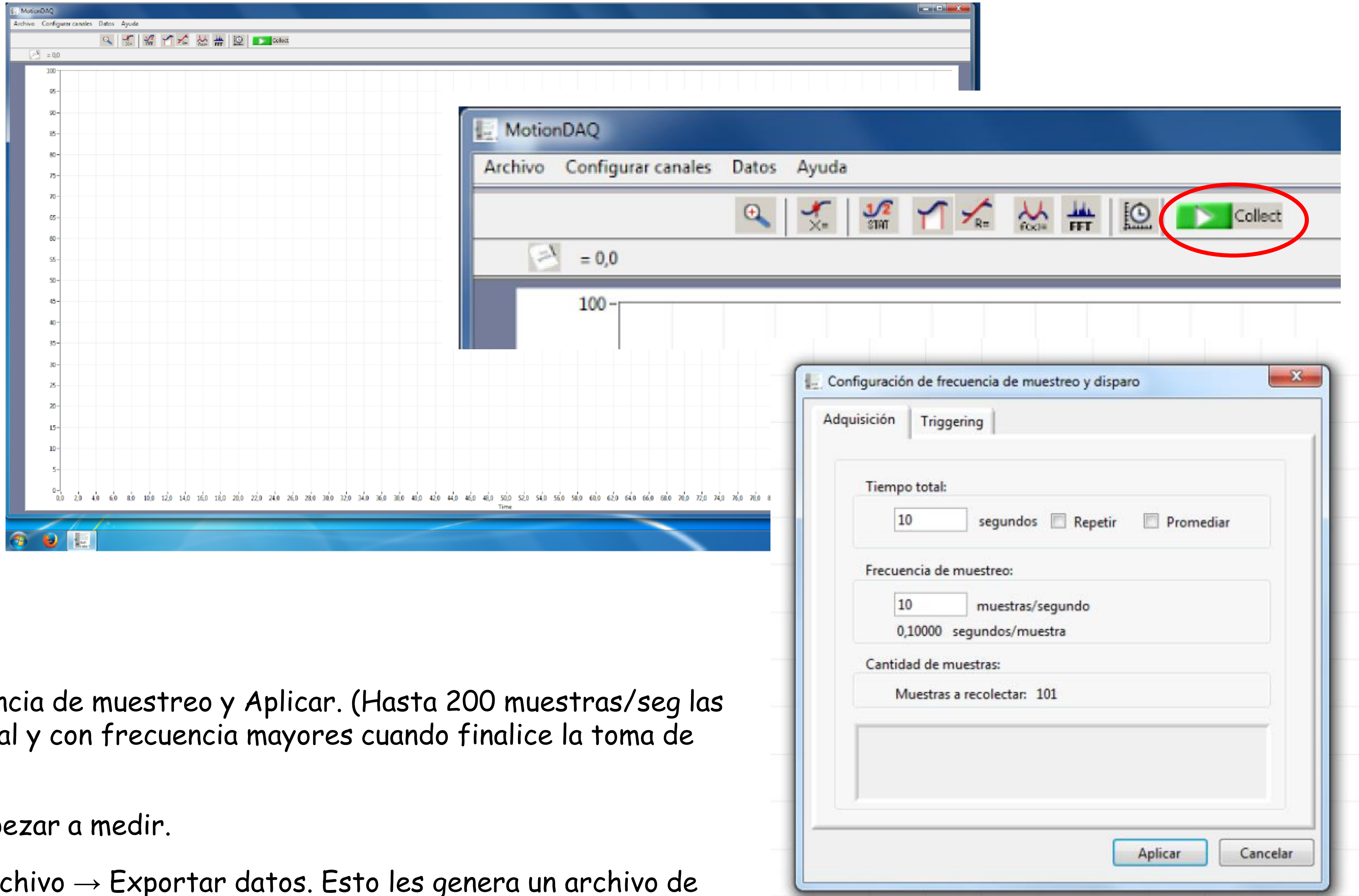






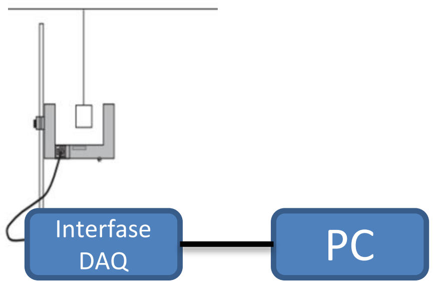
- ✓ Al activar el software MotionDAQ se mostrará en la pantalla similar.
- ✓ Si el software reconoce el sensor, automáticamente se pondrá la escala vertical en la magnitud y unidades que mide el mismo.
- ✓ También se pueden configurar los canales en la solapa Configurar canales.
- ✓ Para usar el photogate elegir donde esta conectado al Sensor DAQ, luego elegir a Custom 10 V y Aplicar.
- ✓ Clikear el botón Data Collection

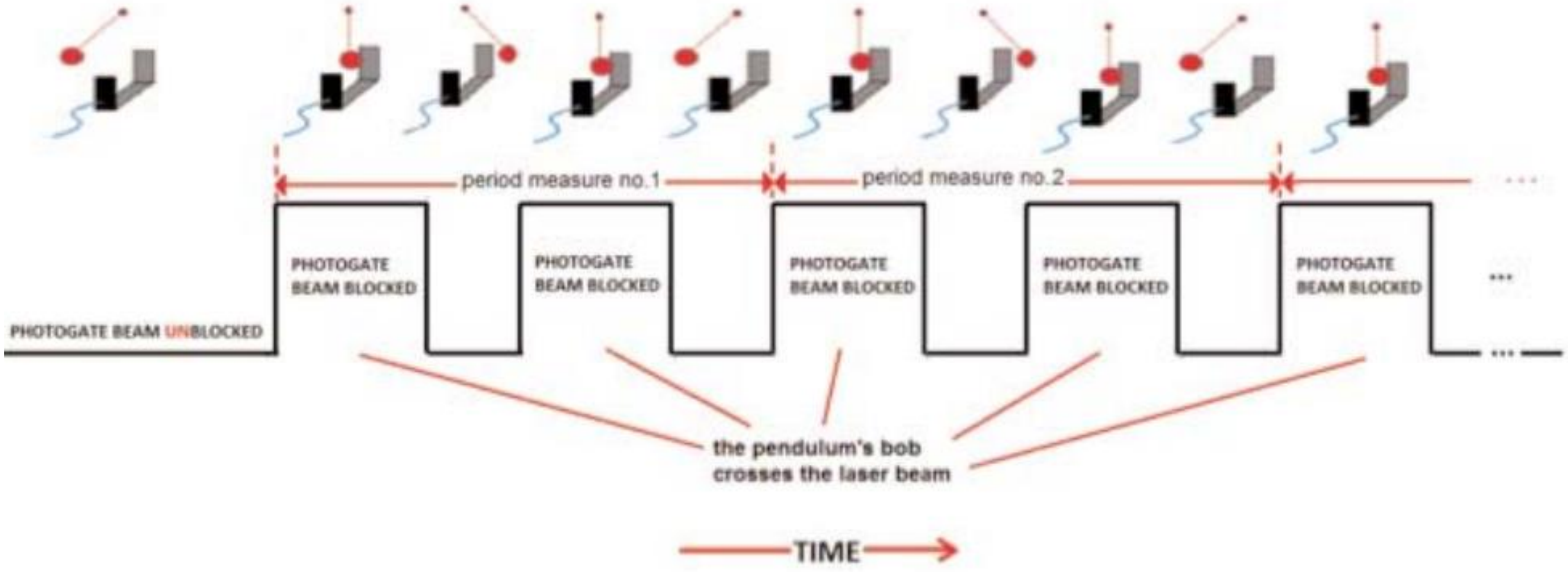




- ✓ Clikear el botón Data Collection.
- ✓ Elegir el tiempo total y la Frecuencia de muestreo y Aplicar. (Hasta 200 muestras/seg las mediciones se verán en tiempo real y con frecuencia mayores cuando finalice la toma de datos).
- ✓ Clikear el botón Collect par a empezar a medir.
- ✓ Una vez hecha la medición ir a Archivo → Exportar datos. Esto les genera un archivo de texto con los datos que midieron qu elo pueden leer con cualquier planilla de cálculos.

¿ Qué señal se obtiene del photogate ?





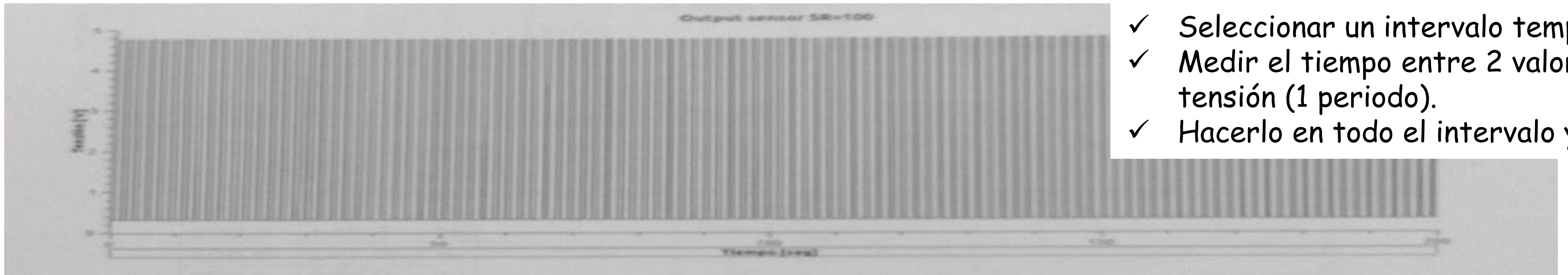


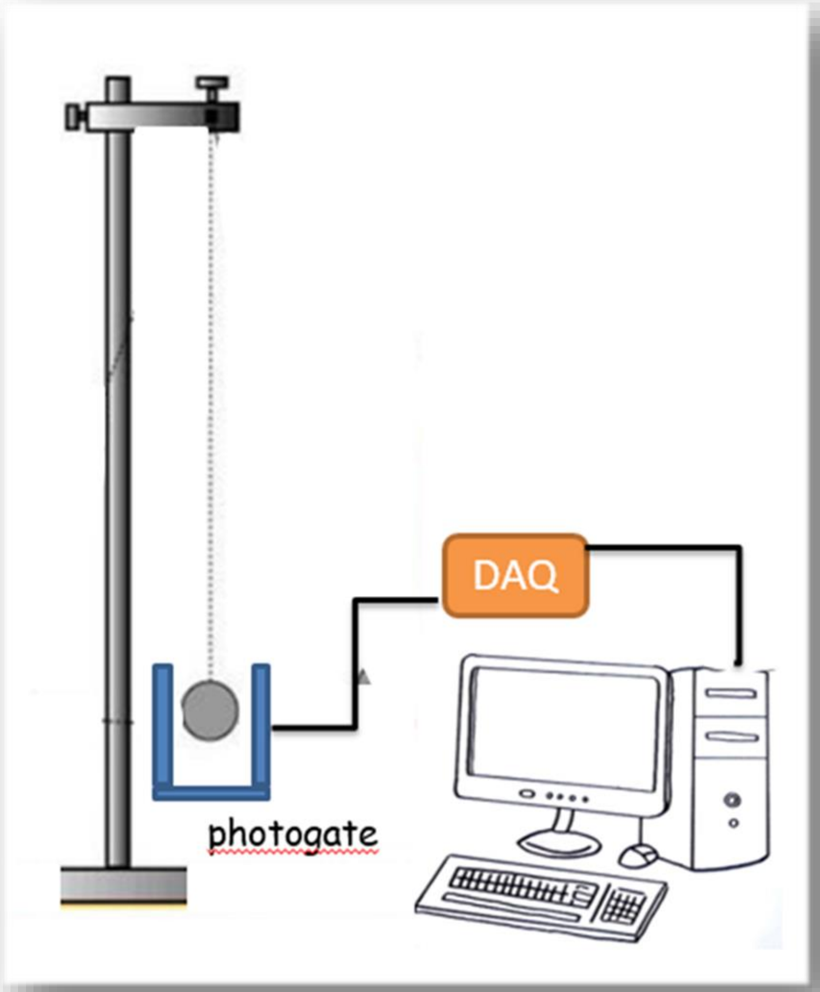
Figura 12: Gráfico de señal del sensor.

	Media	Mediana	Moda	Desvío estandar	Error de instrumento
f = 100 Hz	1,8802	1,88	1,88	0,002	0,01
f = 5000 Hz	1,8801	1,8802	1,8802	0,00038	0,0002

Tabla 10: Estadística de las mediciones automatizadas.

- ✓ Seleccionar un intervalo temporal
- ✓ Medir el tiempo entre 2 valores intercalados de máxima tensión (1 periodo).
- ✓ Hacerlo en todo el intervalo y se tendrán N períodos.

Realización de la experiencia



- ✓ Medir la longitud del hilo del péndulo.
- ✓ Se coloca el sensor (photogate) en un soporte.
- ✓ El sensor se conectado al adquisidor de datos (SensorDaq Vernier) a su vez conectado a la PC.
- ✓ Se activa el software de la PC que reconoce el sensor.
- ✓ Se debe setear el tiempo de medición para que tome aproximadamente 100 períodos y la velocidad de muestreo en 100 m/s.
- ✓ Aplicar al péndulo una amplitud de oscilación máxima baja (ángulos pequeños).
- ✓ Cada vez que la masa del péndulo pasa por el photogate, el mismo envía una señal al adquisidor de datos.
- ✓ Cuando la masa obtura el led del photosensor, la señal detectada es nula, de lo contrario, la señal es máxima (5V aprox).
- ✓ Repetir la velocidad de muestreo. (100 m/s , 200 m/s ,1000 m/s, 5000 m/s).
- ✓ Comparar los parámetros estadísticos obtenidos en cada caso.

¿ PREGUNTAS ?