



## Masa Efectiva para un Sistema de Muelle Real

A. Arrieta<sup>1</sup>, E.S. Arrieta<sup>1</sup>, J.M. Tejeiros<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Física, Universidad de Córdoba, Montería.-Colombia

<sup>2</sup>Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

Recibido 23 de Oct. 2007; Aceptado 6 de Mar. 2009; Publicado en línea 30 de Abr. 2009

### Resumen

Uno de los casos más simple de un movimiento armónico es el sistema masa-resorte (oscilador armónico). En el cual, cuando no se considera la masa del resorte se tiene que el período de oscilación del sistema, es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la masa externa oscilante e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la constante del resorte. Pero realmente los resortes poseen masa, la cual afecta la dinámica del sistema. En este artículo se presenta un análisis teórico-experimental sobre como la masa de un resorte uniforme afecta la dinámica del sistema y que fracción de ella participa en el periodo de éste, de acuerdo al valor de la masa externa. En el proceso experimental, para medir los tiempos se emplea una barrera de luz con contador, cuya precisión es del orden de las milésimas y una balanza electrónica con la misma precisión para la obtención de las masas usadas.

**Palabras claves:** Sistema, resorte uniforme, período, masa, precisión.

### Abstract

One of the simplest case of harmonic movement is the system mass-spring (harmonic oscillator). In which it is not considered the mass of the spring, but the oscillation period of the system, it is directly proportional to the square root of the rocking external mass constant and inversely proportional to the square root of the constant of the spring. But the springs really pose mass, which affects the dynamic of the system. In this article a theoretical - experimental analysis is presented on as the mass of a uniform spring affects the dynamic of the system and that fraction of her participates in the period of this, according to the value of the external mass. In the experimental process, to measure the times a barrier of light it is used with counter, whose precision is the order of the thousandth and an electronic balance with the same precision for the obtaining of the used masses.

**Key Words:** system, uniform spring, period, mass, precision

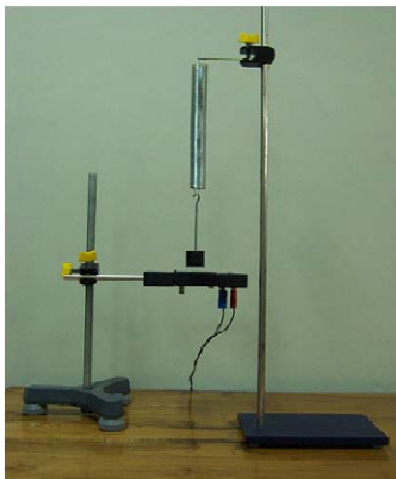
©2009 Revista Colombiana de física. Todos los derechos reservados.

### 1. Introducción

El movimiento vibratorio u oscilatorio de los sistemas mecánicos, constituye uno de los campos de estudio más importante de toda la física. Uno de estos sistemas que en muchas ocasiones ha sido objeto de nuestro estudio, es el sistema masa-resorte, debido a las diferentes facetas que este presenta.

Dentro de los estudios que se han realizado sobre este sistema, se encuentran aquellos relacionados con los efectos tanto estáticos como dinámicos originados por la masa del

resorte. El análisis de estos efectos, es de vital importancia ya que muchos objetos al vibrar se comportan precisamente como un resorte dotado de masa sin ninguna otra sujeta en su extremo libre. Nuestro estudio se centra en el efecto dinámico que la masa del resorte tiene sobre las oscilaciones verticales del sistema, el cual está constituido por un resorte uniforme de masa  $m_s$  y constante de elasticidad  $k$ , con una masa  $m$  sujeta en su extremo inferior. En este caso el período del sistema viene dado por la ecuación [1,9]:



**Fig.1** Montaje experimental para determinar el período de un oscilador de muelle real.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m + \alpha m_s}{k}}, \quad (1)$$

donde  $\alpha$  indica la fracción de la masa del resorte.

## 2. Sistema masa- resorte

Hay dos situaciones, en las cuales la masa del resorte sería incluida. Primero, la masa del resorte varía la posición de equilibrio de este colgado verticalmente, porque mayor masa es soportada por las partes superiores del resorte. Esta corrección estática, no afecta el período del movimiento oscilatorio del sistema. Segundo, la inercia de un resorte masivo produce una corrección dinámica a  $T$ . Las correcciones debido a este efecto no son las mismas y son más notorias en un resorte más liviano. Del estudio analítico sobre este último efecto se obtiene la ecuación trascendental [1, 2, 6].

$$\left( \omega \sqrt{\frac{m_s}{k}} \right) \tan \left( \omega \sqrt{\frac{m_s}{k}} \right) = \frac{m_s}{m}, \quad (2)$$

la cual podemos escribir en términos del período como:

$$\left( \frac{2\pi}{T} \sqrt{\frac{m_s}{k}} \right) \tan \left( \frac{2\pi}{T} \sqrt{\frac{m_s}{k}} \right) = \frac{m_s}{m}, \quad (3)$$

mientras que en función de la fracción de la masa del resorte viene dada por:

$$\left( \sqrt{\frac{m_s}{m + \alpha m_s}} \right) \tan \left( \sqrt{\frac{m_s}{m + \alpha m_s}} \right) = \frac{m_s}{m}. \quad (4)$$

## 3. Análisis numérico

Una manera de caracterizar la contribución inercial del resorte es definir la masa equivalente del sistema como  $m^* = m + \alpha m_s$ , es decir,  $m^*$  es la masa de un cuerpo cuyo período es  $T$  cuando oscila en un resorte sin masa de

constante  $k$ : [ $T = 2\pi \sqrt{m^* / k}$ ]. Analíticamente se ha encontrado que la fracción del resorte varía entre  $\frac{4}{\pi^2}$  y  $\frac{1}{3}$  para un resorte uniforme [8]. Esto se obtiene resolviendo la ec. (4) para cuando  $\frac{m_s}{m} \rightarrow \infty$  y  $\frac{m_s}{m} \rightarrow 0$ .

Al solucionar numéricamente las ecuaciones (3) y (4) considerando un resorte uniforme de constante de elasticidad  $k = (5.704 \pm 0.005)\text{N/m}$  y de masa igual a  $m_s = (69.158 \pm 0.001)\text{gr}$ , se obtuvieron unos valores de  $T$ , para varios valores de  $m$  (medidos con una balanza electrónica digital, la cual tenía una precisión del orden de las milésimas). Estos resultados se muestran en la Tabla.1, con  $q = m / m_s$ ,  $T$  el período del sistema y  $\alpha$  la contribución del resorte.

**Tabla No.1** En esta tabla se muestra el período  $T$  del sistema y la fracción  $\alpha$  del resorte, para un rango de valores de  $q = m / m_s$ .


| $q$   | $T$   | $\alpha$ |
|-------|-------|----------|
| 0     | 0.440 | 0.405    |
| 0.072 | 0.472 | 0.393    |
| 0.289 | 0.563 | 0.373    |
| 0.723 | 0.719 | 0.356    |
| 1.164 | 0.851 | 0.349    |
| 1.457 | 0.929 | 0.346    |
| 2.469 | 1.160 | 0.342    |
| 3.190 | 1.300 | 0.340    |
| 3.628 | 1.378 | 0.339    |
| 4.059 | 1.451 | 0.338    |
| 4.495 | 1.521 | 0.338    |
| 5.072 | 1.609 | 0.338    |
| 5.360 | 1.651 | 0.337    |
| 5.357 | 1.651 | 0.337    |
| 5.793 | 1.713 | 0.337    |
| 6.224 | 1.772 | 0.337    |
| 6.516 | 1.811 | 0.337    |

|          |              |       |
|----------|--------------|-------|
| 7.239    | 1.904        | 0.336 |
| 14.460   | 2.661        | 0.335 |
| 57.839   | 5.277        | 0.334 |
| $\infty$ | $\sim\infty$ | 0.333 |

#### 4. Resultados experimentales

Con el fin de corroborar el resultado teórico se presentan ciertos valores del período  $T$  (para varios valores de  $m$ ) de un resorte uniforme, empleando los mismos valores de  $k$  y  $m_s$  dados arriba.

El montaje experimental empleado fué dispuesto como se muestra en la figura.1.

Para medir los tiempos se empleó una barrera de luz con contador (Light Barrier with Counter), en el modo de operación , el cual registra el tiempo correspondiente a un período del sistema. Esta barrera de luz tiene una precisión del orden de las milésimas de segundo y un rango de medidas de 0 a 9.999s. Seguidamente, para cada masa atada previamente medida con una balanza de precisión del orden de las milésimas; se tomó un total de 15 medidas de las cuales se obtuvo un valor promedio con su respectiva incertidumbre (mediante el empleo de métodos estadísticos) y luego de un exhaustivo análisis se tomaron algunos de estos resultados y fueron llevados a la tabla.2.

**Tabla No.2** En esta tabla se muestran algunos resultados experimentales sobre el período  $T$  del sistema y la fracción  $\alpha$  del resorte, para un rango de valores de  $q = m / m_s$ .

| $q$               | $T$               | $\alpha$ |
|-------------------|-------------------|----------|
| $1.164 \pm 0.031$ | $0.852 \pm 0.001$ | 0.353    |
| $1.457 \pm 0.036$ | $0.93 \pm 0.004$  | 0.350    |
| $2.469 \pm 0.051$ | $1.161 \pm 0.001$ | 0.347    |
| $3.190 \pm 0.061$ | $1.301 \pm 0.001$ | 0.346    |
| $3.628 \pm 0.067$ | $1.379 \pm 0.002$ | 0.345    |
| $4.059 \pm 0.059$ | $1.452 \pm 0.001$ | 0.344    |
| $4.495 \pm 0.079$ | $1.522 \pm 0.002$ | 0.344    |
| $5.072 \pm 0.088$ | $1.610 \pm 0.002$ | 0.344    |
| $5.360 \pm 0.092$ | $1.652 \pm 0.002$ | 0.341    |
| $5.793 \pm 0.098$ | $1.713 \pm 0.001$ | 0.337    |
| $6.224 \pm 0.104$ | $1.772 \pm 0.002$ | 0.337    |
| $6.516 \pm 0.109$ | $1.881 \pm 0.002$ | 0.336    |
| $7.239 \pm 0.119$ | $1.904 \pm 0.002$ | 0.335    |

#### Conclusiones

Una vez hecho el estudio teórico-experimental del efecto dinámico que la masa del resorte tiene sobre las oscilaciones verticales del sistema, se encontró que:

La masa del resorte si afecta la dinámica del sistema (tanto más apreciable cuanto más despreciable sean las masas de las pesas que se cuelgan en su extremo inferior) en comparación con la suya.

Para que la masa del resorte aparezca en la expresión del período del mismo modo que lo hace la masa externa  $m$ , esta se debe encontrar concentrada en su extremo inferior. Pero debido a que este no es el caso, el resorte no contribuye con toda su masa.

Para  $q$  grande ( $m \gg m_s$ ) la fracción del resorte es  $1/3$ , lo cual se obtiene calculando la energía cinética del resorte, asumiendo que la amplitud para cada elemento es proporcional a su distancia del extremo fijo.

En la mayoría de los casos, para aquellos resortes livianos y no tan rígidos, es suficiente usar  $1/3$  como corrección dinámica.

Para  $q$  pequeño ( $m \ll m_s$ ) es difícil de obtener experimentalmente la contribución, ya que el extremo inferior del resorte está "libre" y por tanto las oscilaciones no son del todo verticales.

#### Referencias

- [1] J. M. Nunes da Silva; .Renormalized vibrations of a loaded spring, .Am. J. phys. 62 (5), 423-426 (1994).
- [2] J. Christensen; .An improved calculation of the mass for the resonant spring pendulum, .Am. J. phys. 72 (6), 721-848 (2004).
- [3] E. E. Galloni y M. Kohen, .Influence of the mass of the spring on its static and dynamic effects, .Am. J. phys. 47 (12), 1076-1078 (1979).
- [4] T. C. Heard y N. D. Newby, Jr., .Behavior of a soft spring, .Am. J. phys. 45 (11), 1102-1106 (1977).
- [5] J. T. Cushing, .The Spring-mass system revisited, .Am. J. phys. 52 (10), 925-937 (1984).
- [6] R. Weinstock, .Spring-mass correction in uniform circular motion, .Am. J. phys. 32 (5), 370-376 (1964).
- [7] R. Weinstock, .Oscillations of a particle attached to a heavy spring: An application of the Stieltjes integral, .Am. J. phys. 47(6), 508-514 (1964).
- [8] F. A. McDonald, .Deceptively simple harmonic motion: A mass on a spiral spring, .Am. J. phys. 48 (3), 189-192 (1980).
- [9] J. M. Bowen, .Slinky oscillations and the motion of effective mass, .Am. J. phys. 50 (12), 1145-1148 (1982).