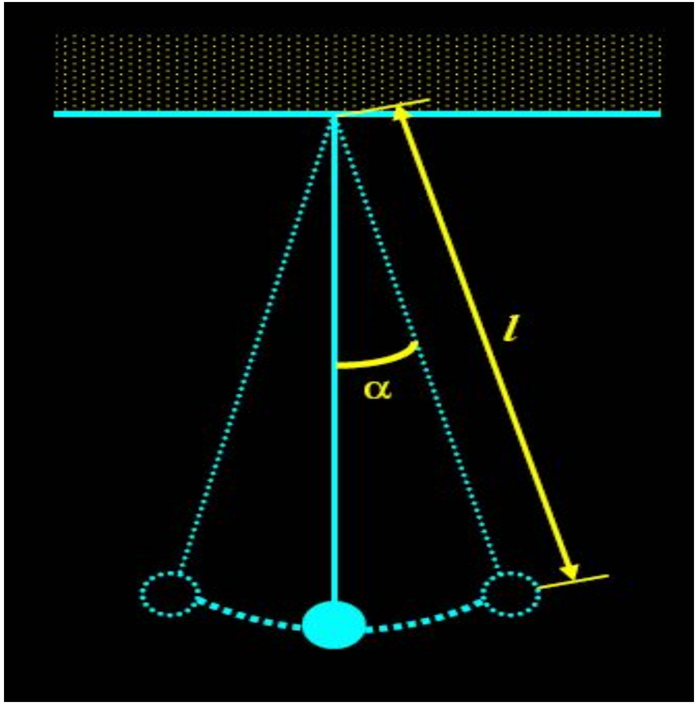
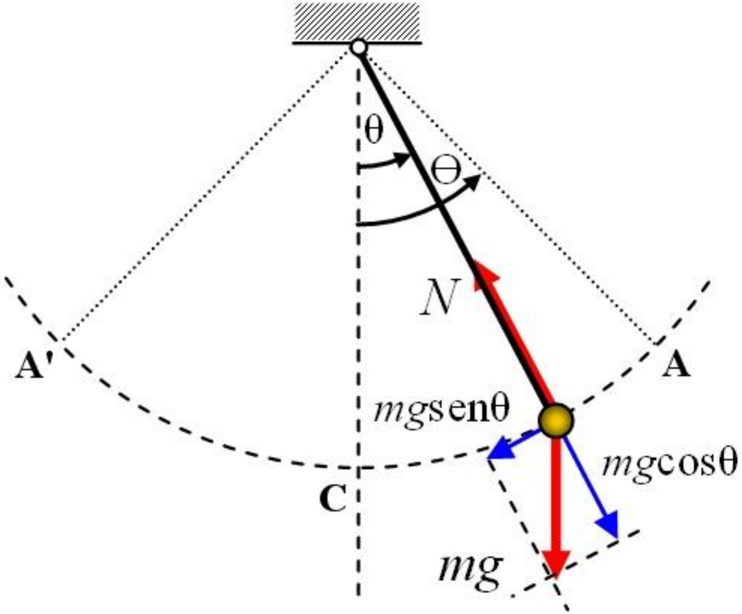
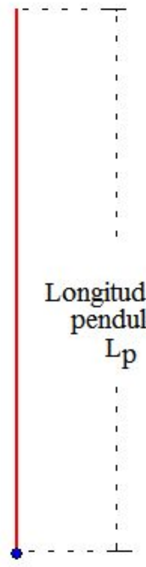
El péndulo simple



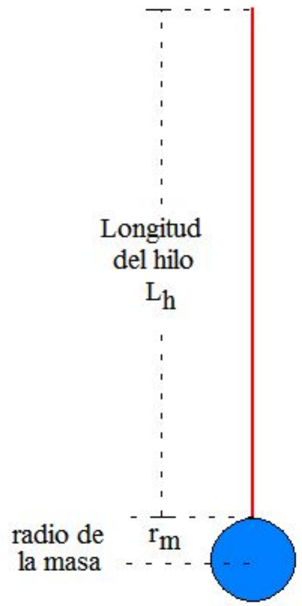


El péndulo simple

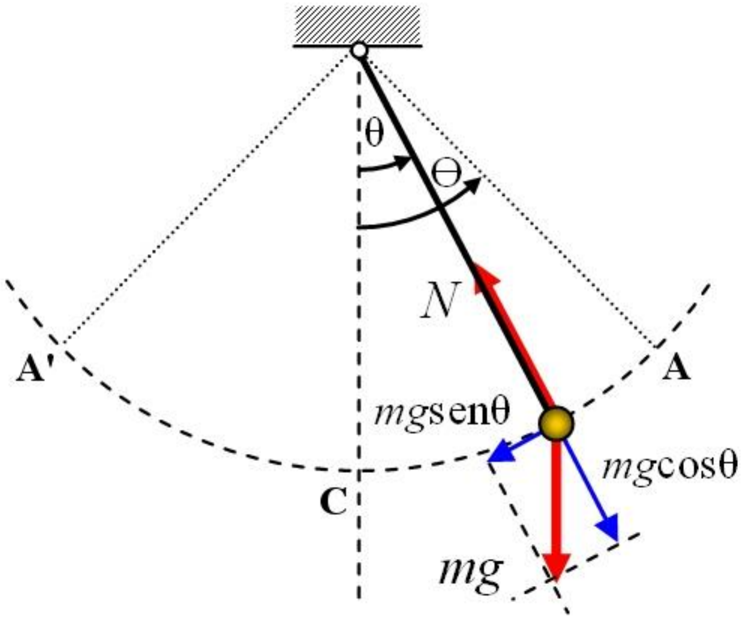
Caso ideal



Caso real



El péndulo simple



Ecuación de movimiento:

$$F_t = -m\,g\,sen(\theta) = ma_t$$

Relación entre aceleración tangencial y angular:

$$a_t = l\,\ddot{\theta}$$

Ecuación diferencial del movimiento plano del péndulo simple:

$$l\,\ddot{\theta} + gsen(\theta) = 0$$

El péndulo simple

Ecuación de movimiento: $l\,\ddot{\theta} + gsen(\theta) = 0$

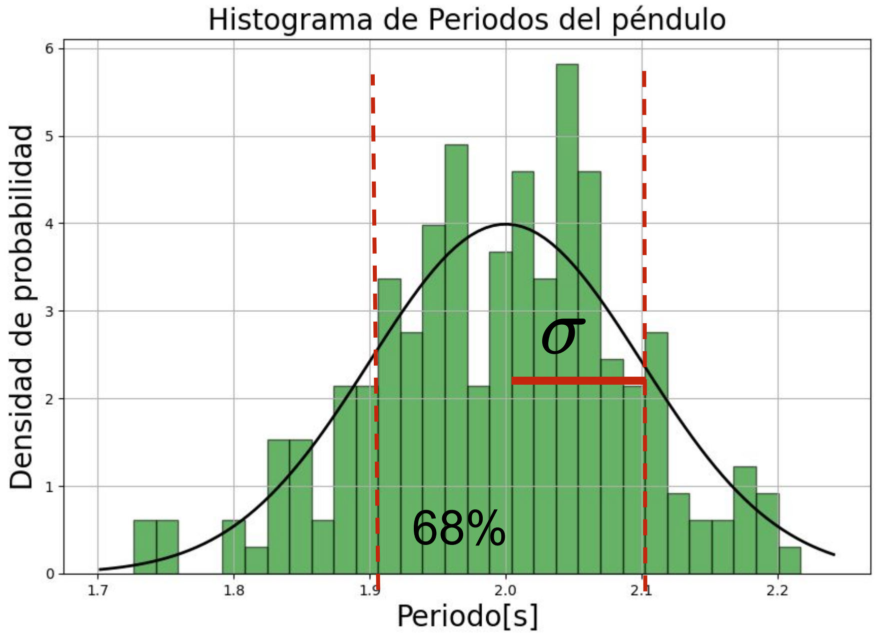
Θ(º)	Θ(rad)	senΘ	dif. %	Θ(º)	Θ(rad)	senΘ	dif. %
0	0,00000	0,00000	0,00	15	0,26180	0,25882	1,15
2	0,03491	0,03490	0,02	20	0,34907	0,34202	2,06
5	0,08727	0,08716	0,13	25	0,43633	0,42262	3,25
10	0,17453	0,17365	0,51	30	0,52360	0,50000	4,72

Ecuación de movimiento armónico simple: $l\,\ddot{\theta} + g\,\theta = 0$ **Aproximación de pequeñas oscilaciones**

Solución: $\theta(t) = A\,sen(\omega\,t + \phi)$ $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

El péndulo simple

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$



$$\sigma_T^2 = \frac{1}{n-1}\Sigma(T_i - \overline{T})^2$$

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{1}{n-1}\Sigma(T_i - \overline{T})^2}$$

El péndulo simple: ¿y si variamos l?

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \Longrightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l$$

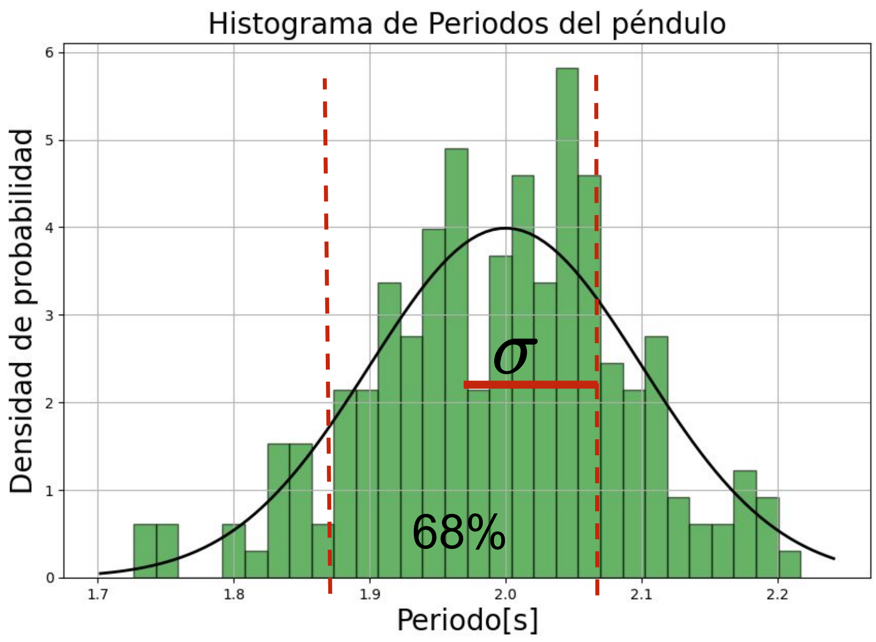
$$T_1^2 = \frac{4\pi^2}{g} l_1$$

$$T_2^2 = \frac{4\pi^2}{g} l_2$$

$$T_3^2 = \frac{4\pi^2}{g} l_3$$

$$\vdots$$

$$T_{10}^2 = \frac{4\pi^2}{g} l_{10}$$



El péndulo simple: ¿y si variamos l?

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l$$

$$T_1^2 = \frac{4\pi^2}{g} l_1$$

$$T_2^2 = \frac{4\pi^2}{g} l_2$$

$$T_3^2 = \frac{4\pi^2}{g} l_3$$

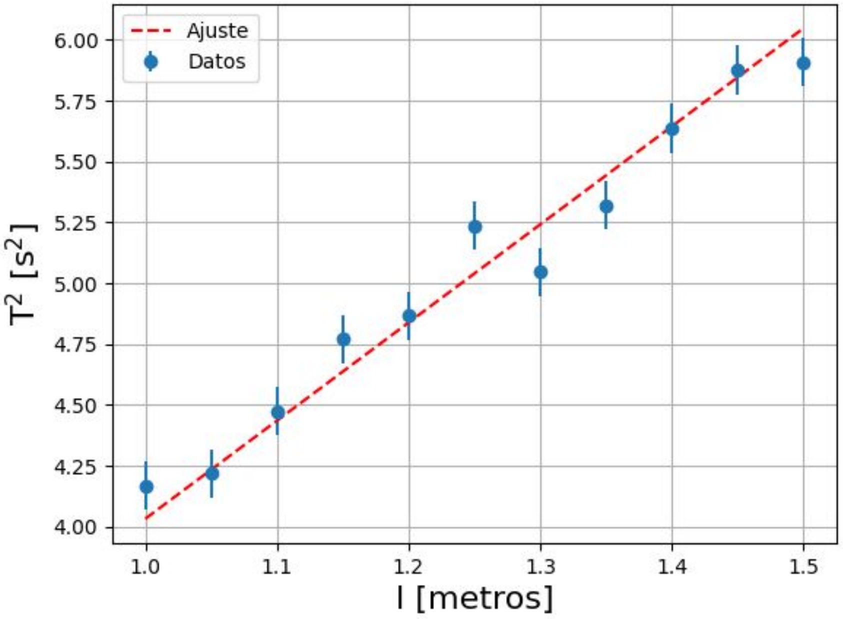
.

.

.

.

$$T_{10}^2 = \frac{4\pi^2}{g} l_{10}$$



El péndulo simple: ¿y si variamos l?

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

- Rango de variación de la longitud del péndulo
  Longitud mínima: masa puntual.
  Longitud máxima: condiciones del equipamiento.

- Amplitud inicial del péndulo (el modelo considera ángulos pequeños).
  Estimar máximo ángulo inicial admisible.

- Paso de variación en la longitud del péndulo.

- Realizar el experimento para al menos 10 longitudes diferentes.

Sugerencia para la medición del período

σ: propiedad de la distribución de la variable aleatoria.
Depende del experimento y del método.

¿y si en lugar de medir N veces, medimos una sola vez N períodos?

Esperamos que la nueva variable aleatoria cumpla: $< X >= N < x >$

X se mide con el mismo método usado previamente para *x*, por lo que su distribución tendrá un ancho dado por el mismo σ que el de una sola medición.

Entonces, el error de x, obtenido a partir de la medición de X:

$$(\Delta x)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)^2 (\Delta X)^2 = \left(\frac{1}{N}\right)^2 \sigma^2 \Rightarrow \Delta x = \frac{\sigma}{N}$$; con σ igual que la clase 3.

O sea que tengo dos métodos para (por ejemplo) obtener el error de T:

- El método "viejo" $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$

- El método "nuevo" $\frac{\sigma}{N}$

Para N > 1 , N siempre supera a su raíz, calculemos N para que $\Delta x_{(viejo)} = \Delta x_{(nuevo)}$, comparando con las 200 mediciones realizadas para el péndulo.

$$\sqrt{200} \approx 14{,}14$$

Esto significa que si hubiéramos medido una sola vez, 15 períodos seguidos, el error propagado del período del péndulo hubiera sido menor que el error estadístico que surge de las 200 mediciones individuales realizadas.

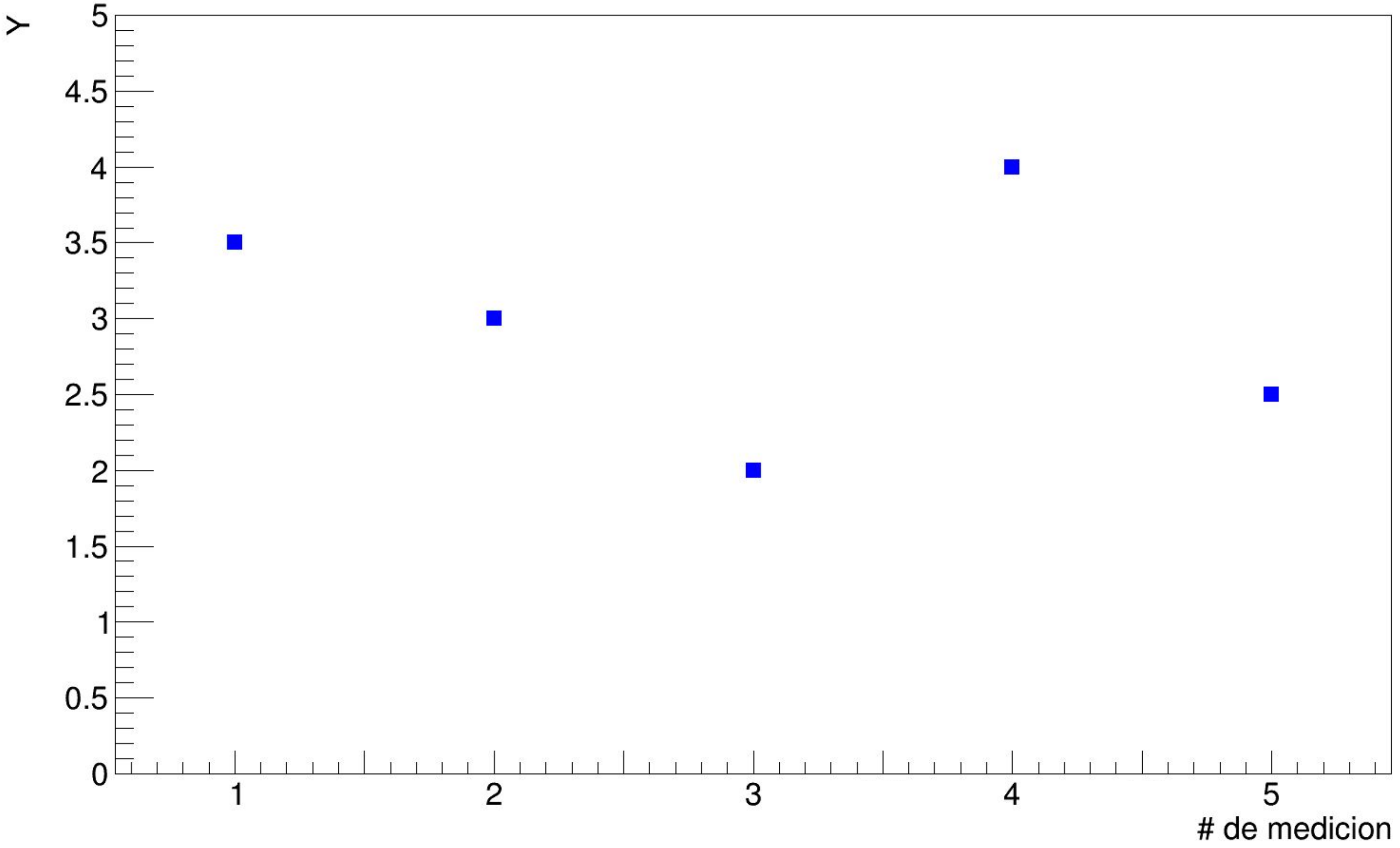
$$\sqrt{200} \approx 14{,}14$$

Esto significa que si hubiéramos medido una sola vez, 15 períodos seguidos, el error propagado del período del péndulo hubiera sido menor que el error estadístico que surge de las 200 mediciones individuales realizadas .

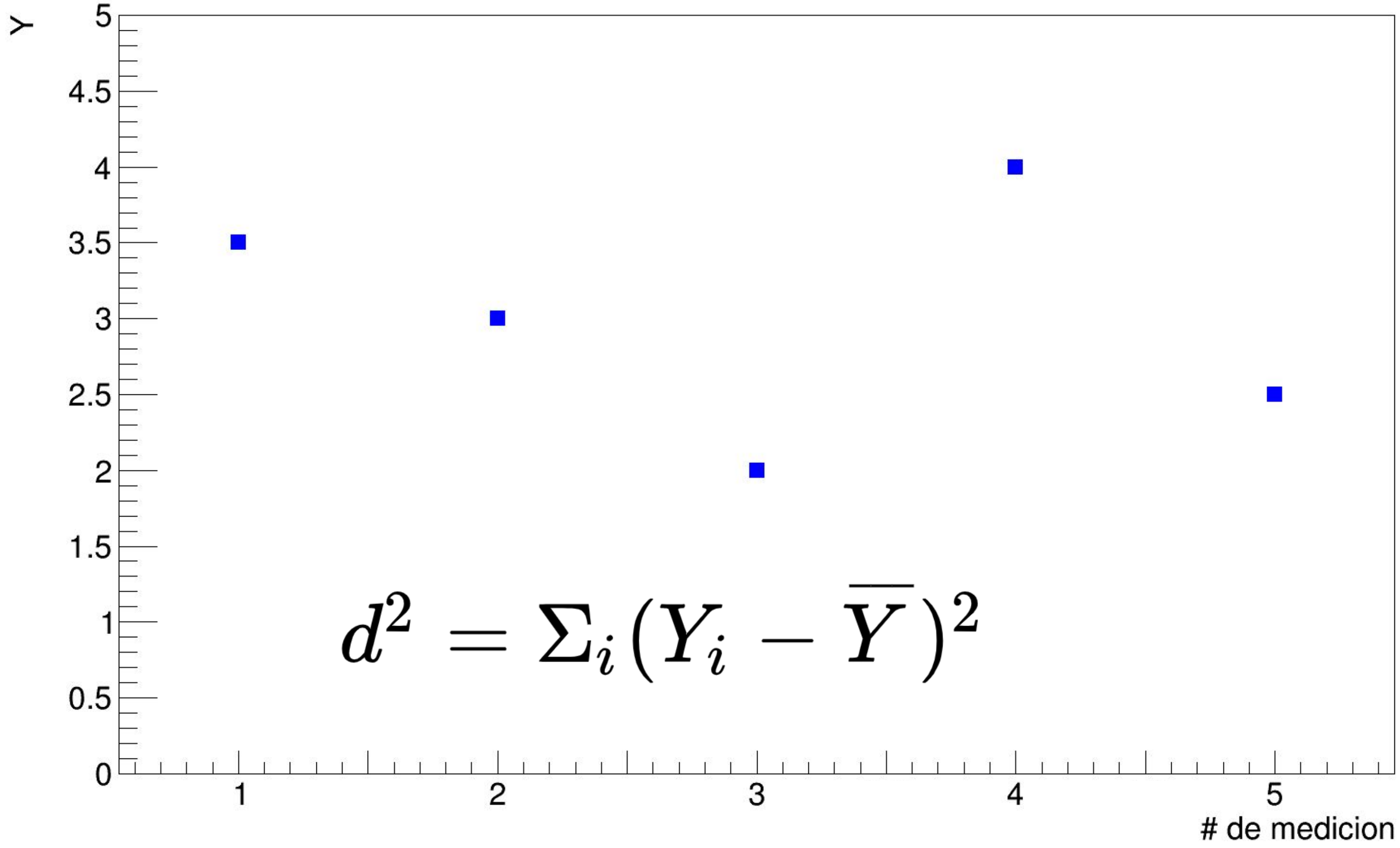
Cuadrados Mínimos

y la distribución chi cuadrado

Empecemos suponiendo que medimos cinco veces las misma magnitud Y:

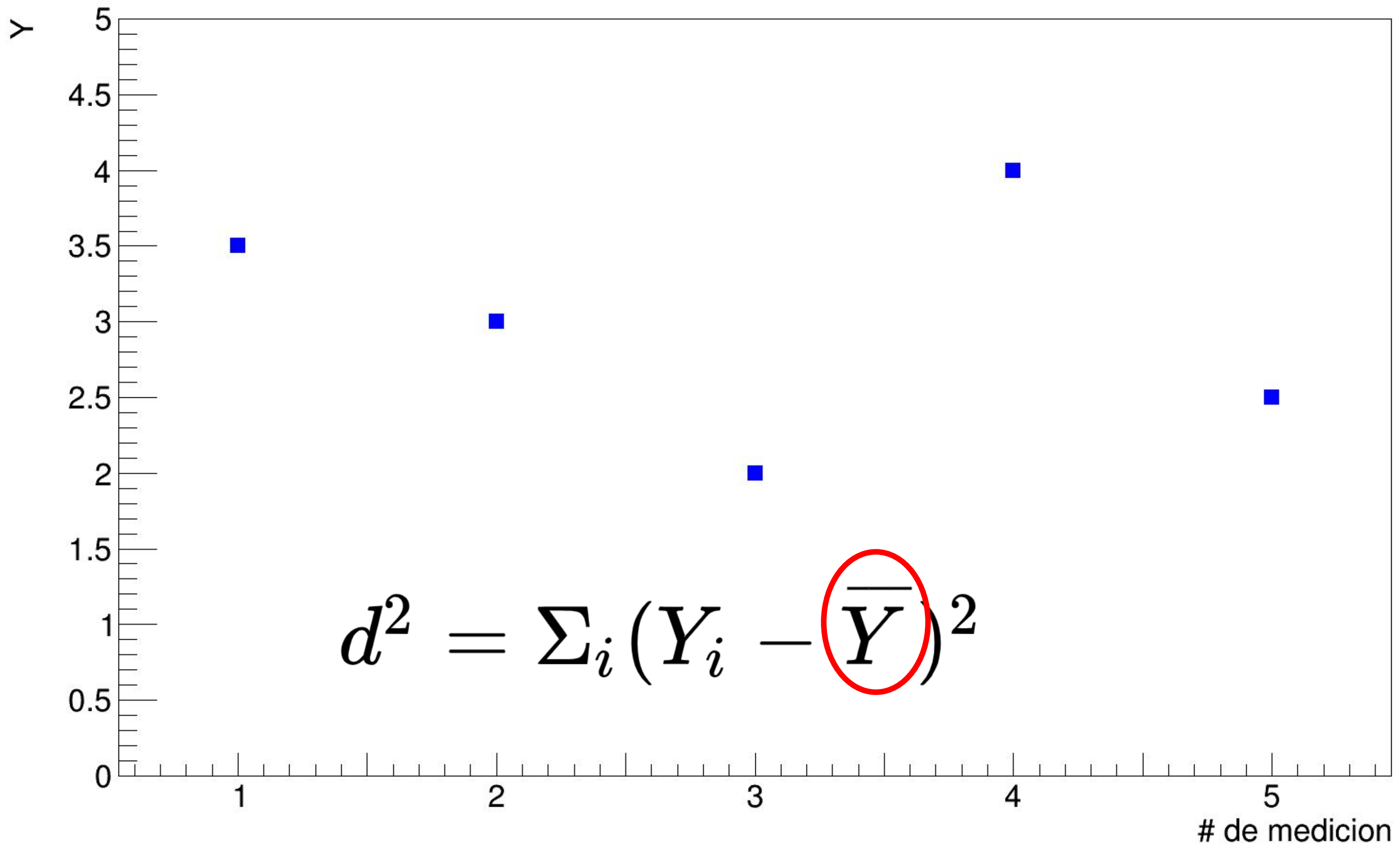


y queremos reportar un único valor que sea representativo de todos ellos

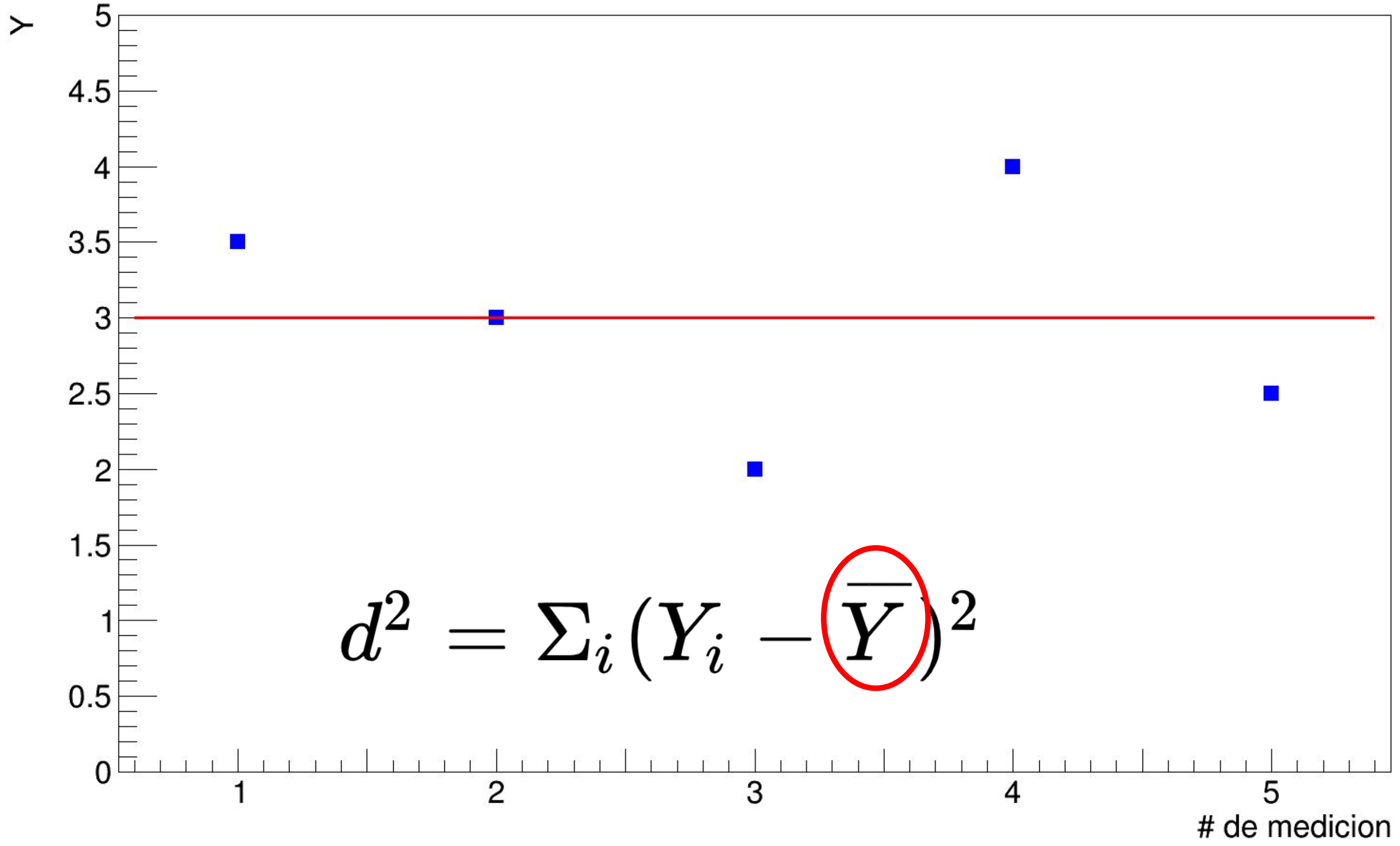


$$d^2 = \Sigma_i (Y_i - \overline{Y})^2$$

quien minimice esta distancia cuadrática a los cinco puntos es un candidato bien motivado

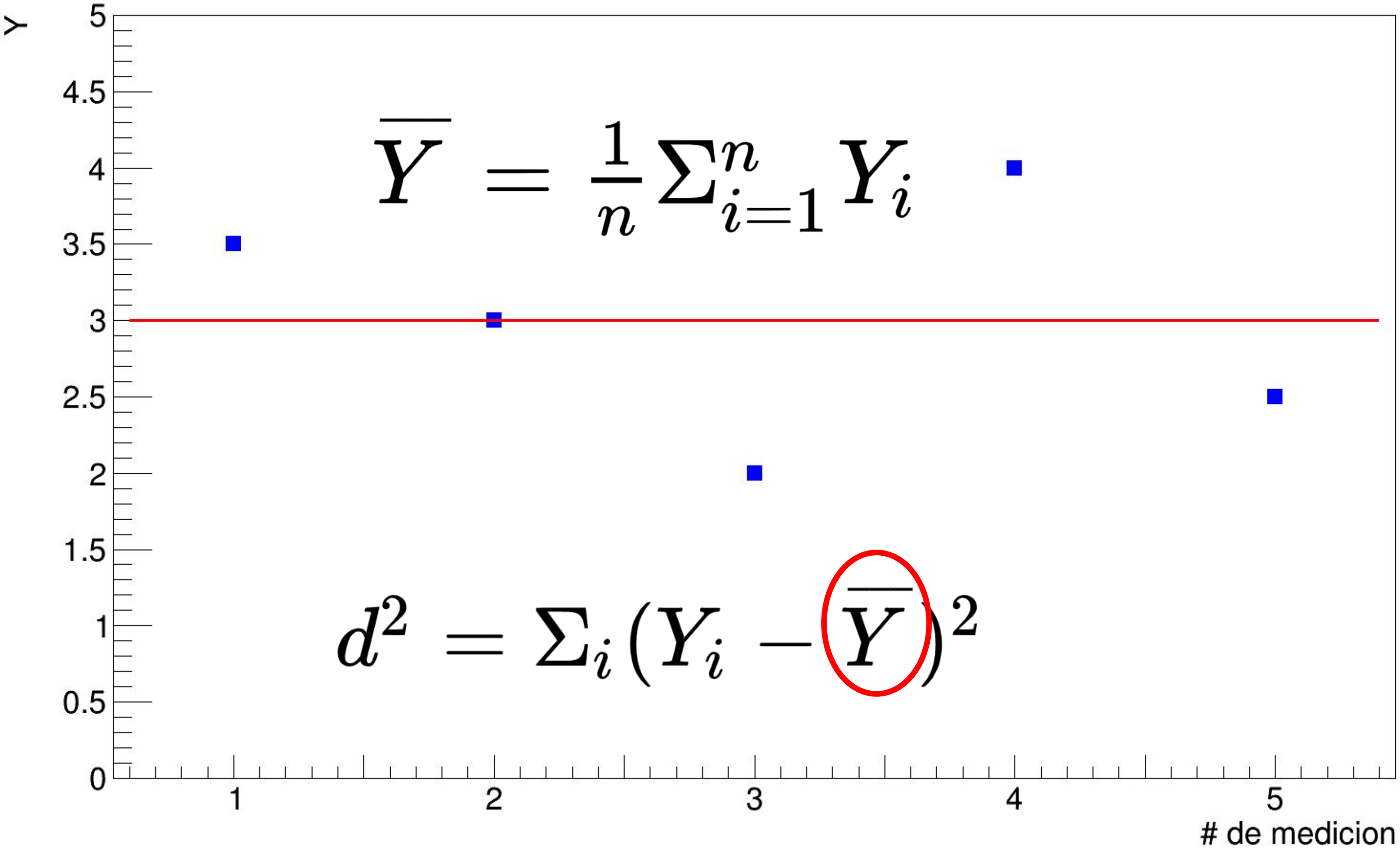


que podemos encontrar analíticamente derivando la expresión e igualando a cero

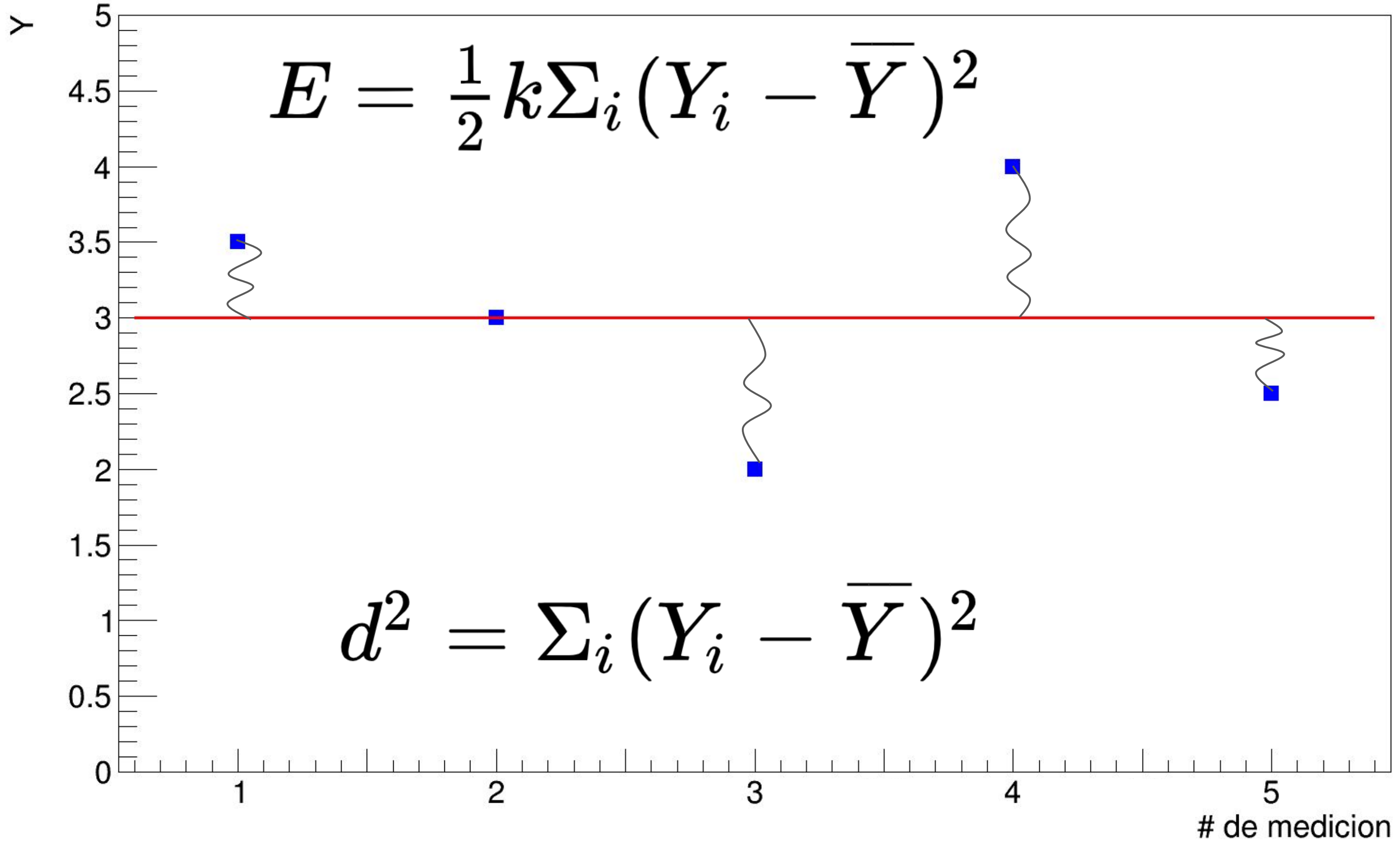


$$d^2 = \Sigma_i (Y_i - \overline{Y})^2$$

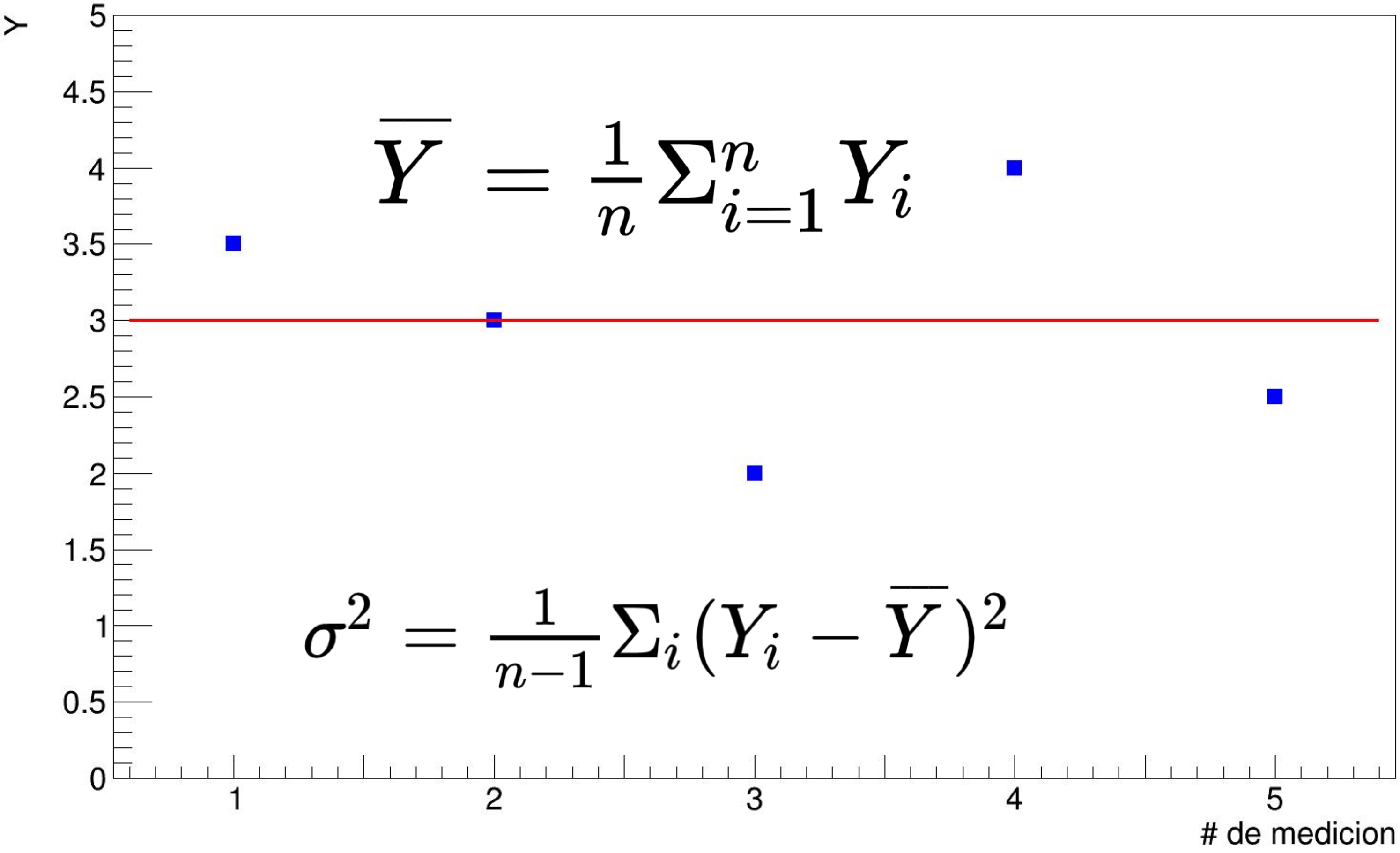
el resultado de ese cálculo es el ya conocido ***promedio***



motivación con "sentido físico"



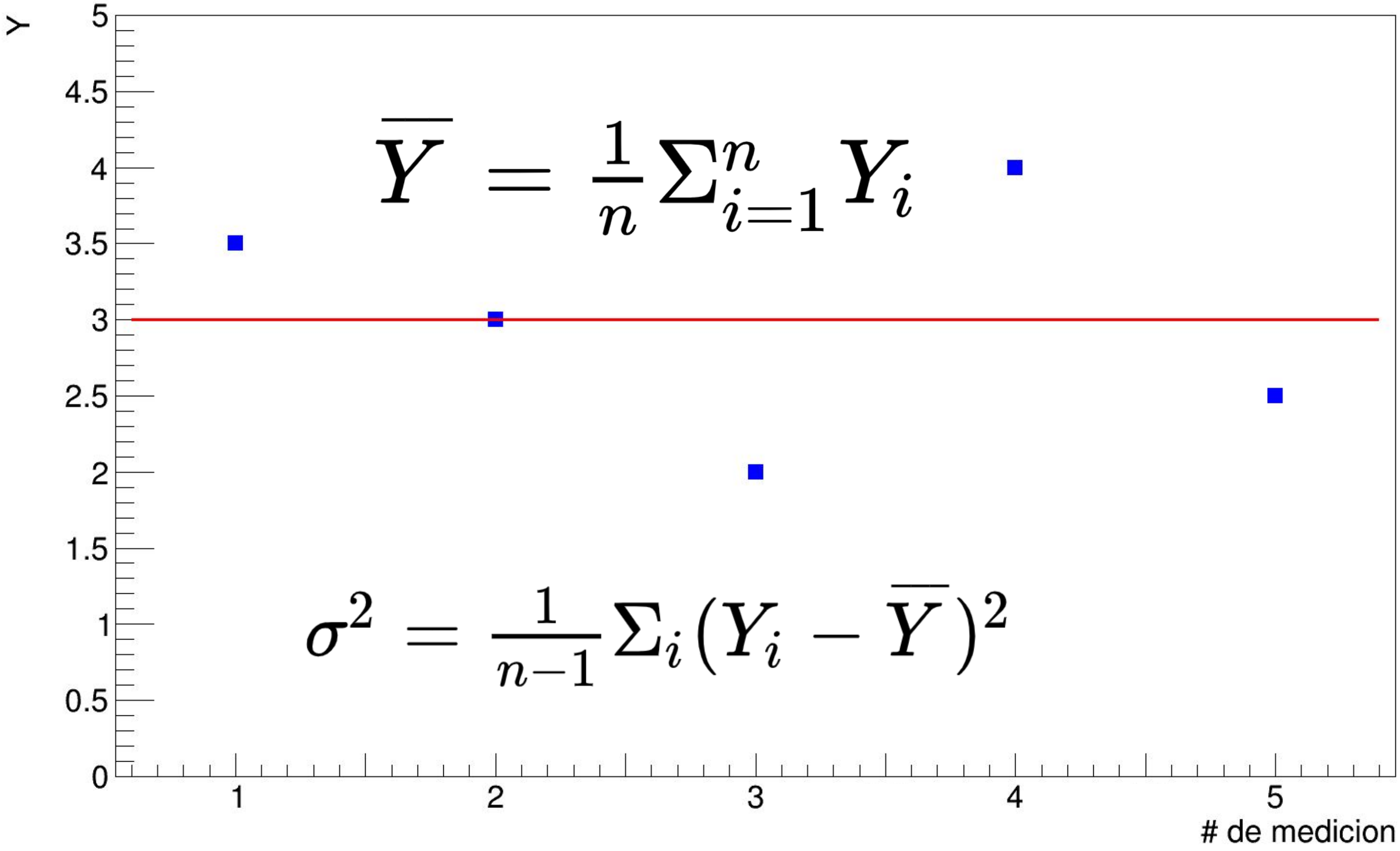
*y si a la distancia cuadrática la calculamos por unidad de puntos medidos, obtenemos la **varianza***



$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n} Y_i$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\Sigma_i (Y_i - \overline{Y})^2$$

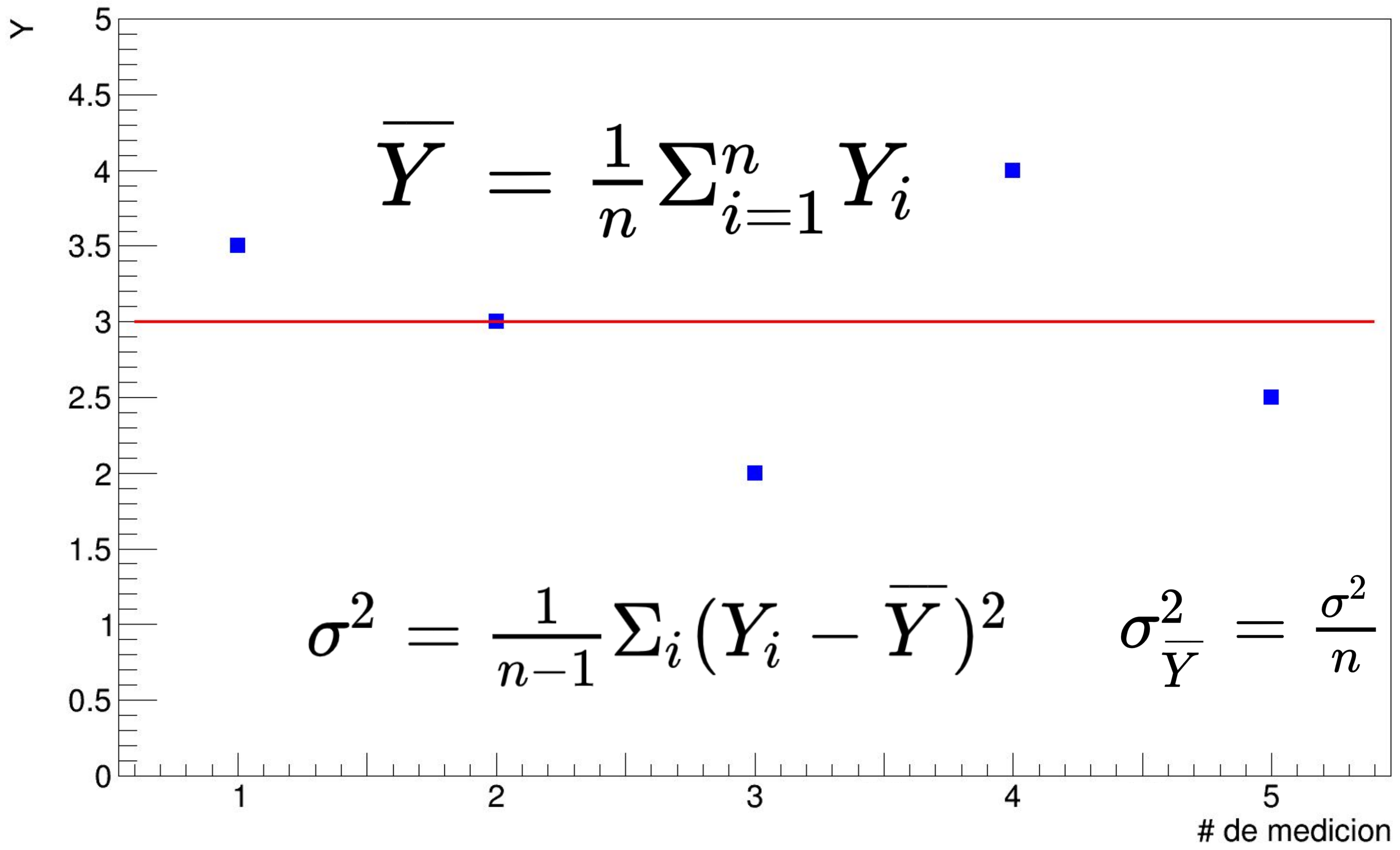
la varianza es una medida de la dispersión de los datos, y usamos su raíz cuadrada como medida del error



$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n} Y_i$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\Sigma_i (Y_i - \overline{Y})^2$$

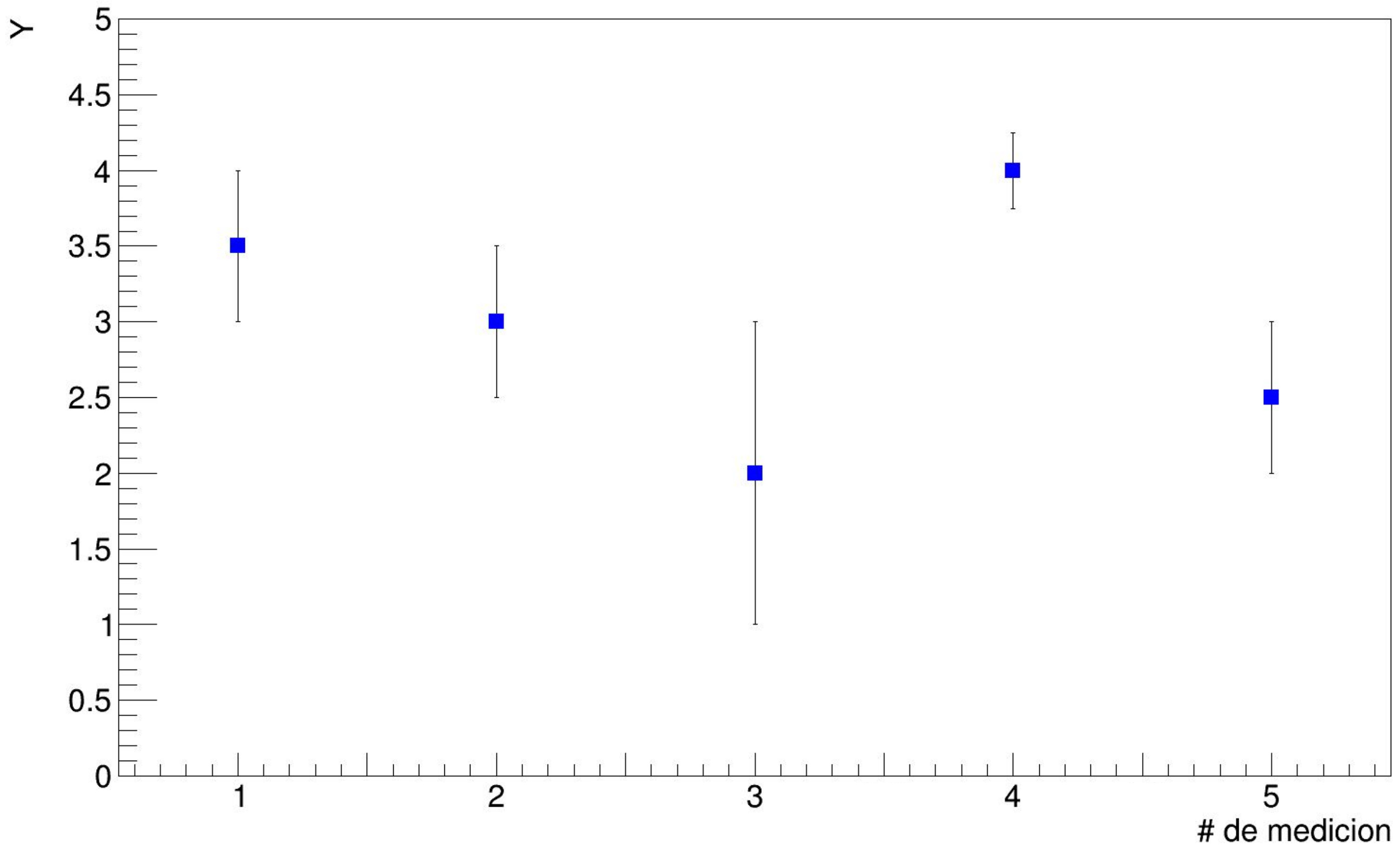
Importante! *la varianza del promedio es* ***n*** *veces más chica! (si las mediciones son independientes)*



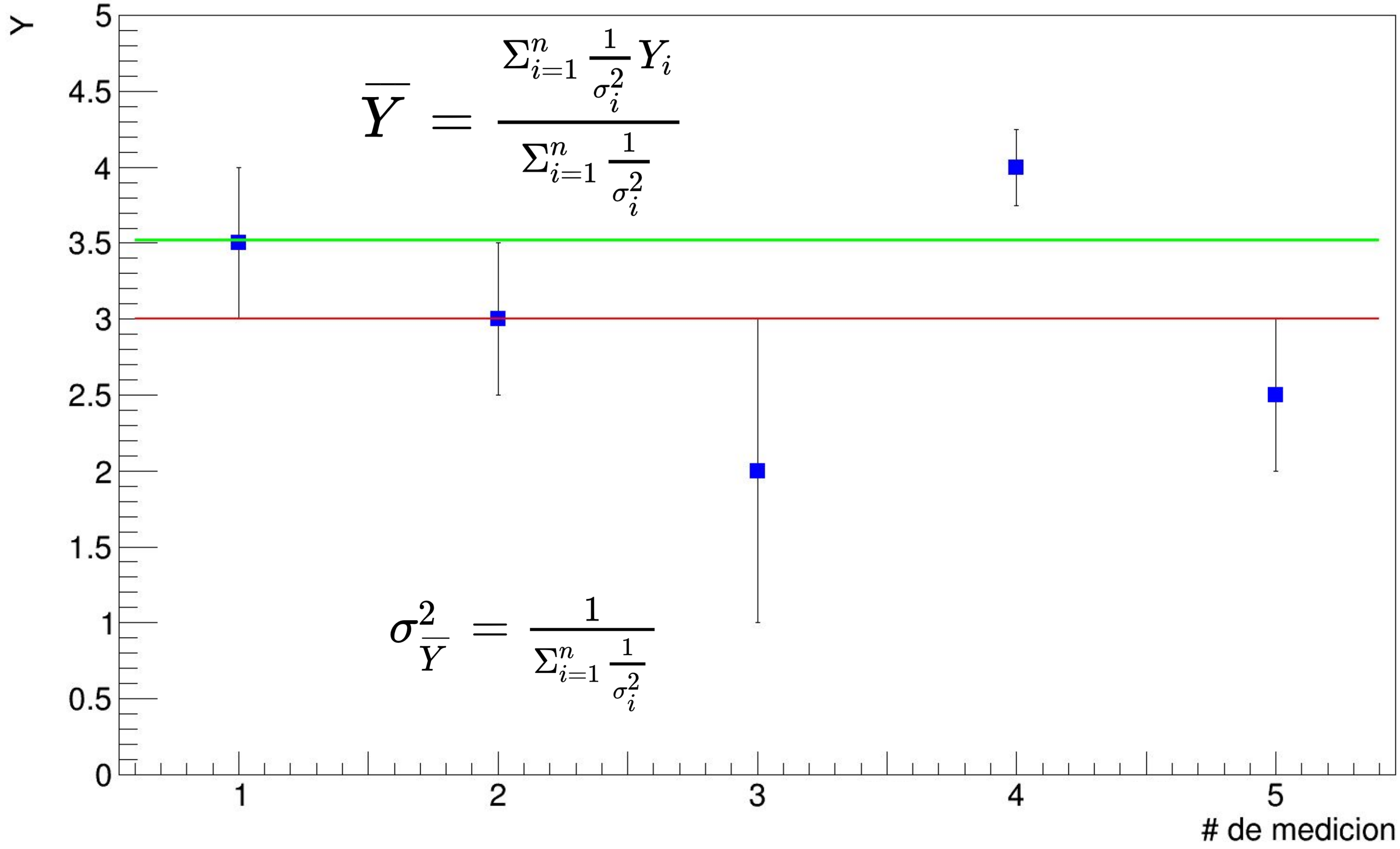
$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n} Y_i$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\Sigma_i (Y_i - \overline{Y})^2 \qquad \sigma^2_{\overline{Y}} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Volvamos al principio, pero ahora conociendo la incerteza de cada medición



Tenerlas en cuenta nos lleva a calcular un ***promedio pesado,*** *de quien también podemos obtener incerteza*



$$\overline{Y} = \frac{\Sigma_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} Y_i}{\Sigma_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

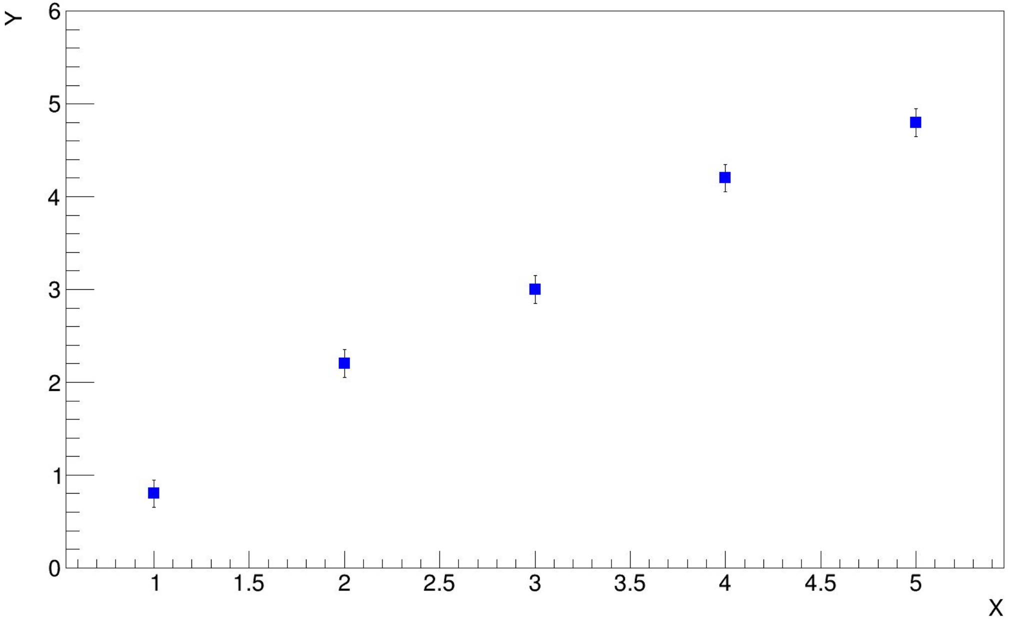
$$\sigma_{\overline{Y}}^2 = \frac{1}{\Sigma_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

$Y(x)$

¿y si medimos una cantidad que depende de otra?

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{n-1}\Sigma(Y_i - \overline{Y})^2$$



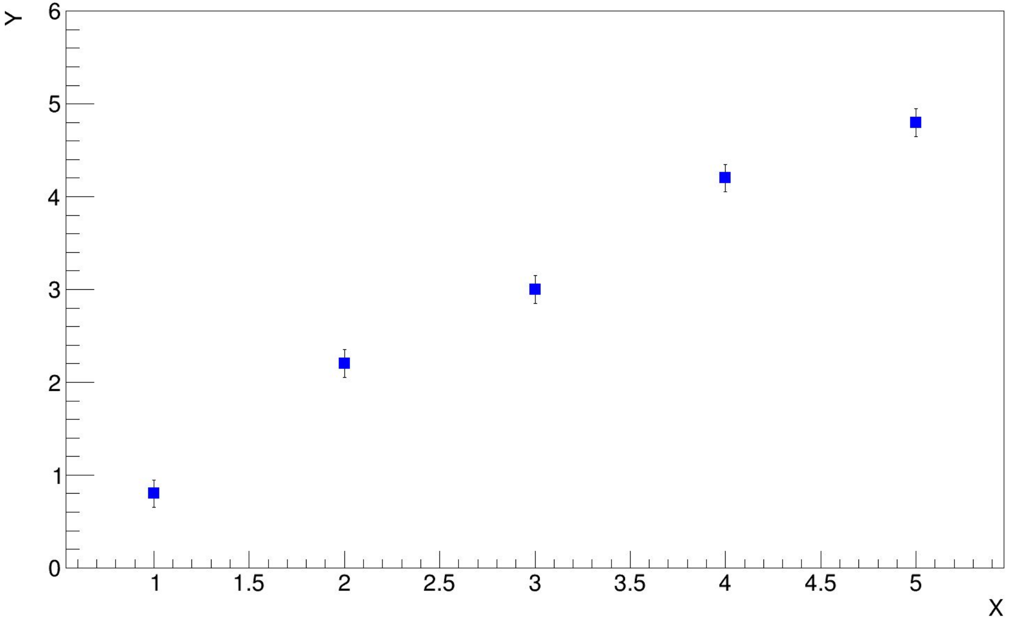
Podríamos comenzar haciendo lo mismo que antes pero para cada una de ellas

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{n-1}\Sigma(X_i - \overline{X})^2$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{n-1}\Sigma(Y_i - \overline{Y})^2$$



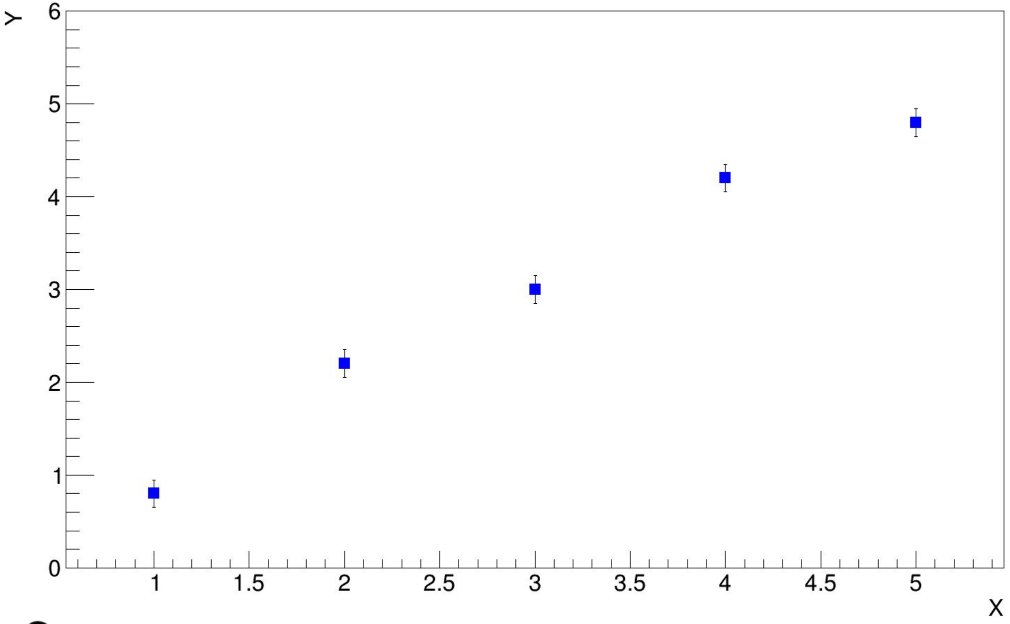
Correlación

$$\rho^2 = \frac{[\Sigma(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})]^2}{\Sigma(X_i-\overline{X})^2\Sigma(Y_i-\overline{Y})^2}$$

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{n-1}\Sigma(X_i - \overline{X})^2$$

y si lo hacemos respecto de un modelo?

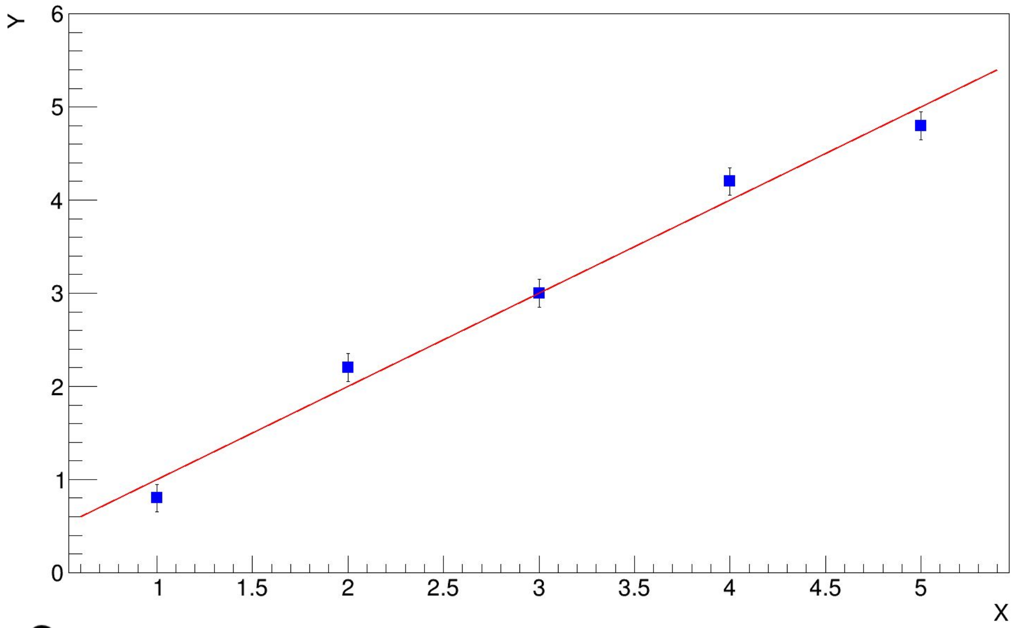


$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{n-1}\Sigma(Y_i - \overline{Y})^2$$

$$\chi_\nu^2 = \Sigma_i^n \left(\frac{Y_i - f(x_i)}{\sigma_i}\right)^2$$

$$f(x_i) = mx_i + b$$

Cuadrados mínimos

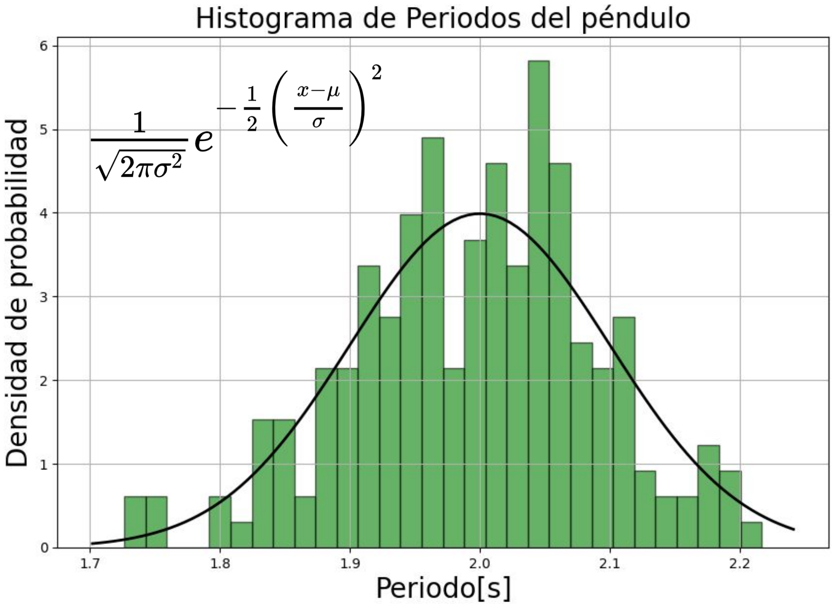


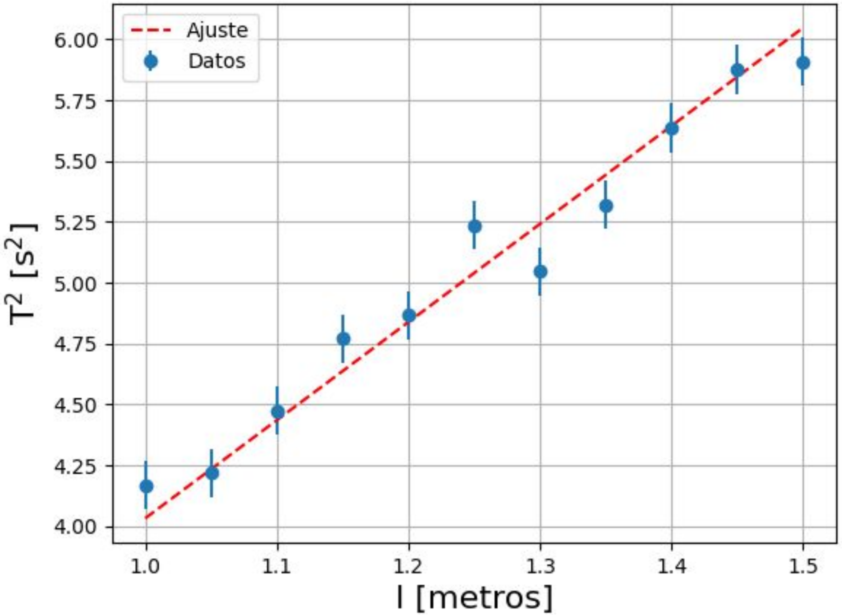
$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{n-1}\Sigma(Y_i - \overline{Y})^2$$

$$\chi_\nu^2 = \Sigma_i^n\left(\frac{Y_i - f(x_i)}{\sigma_i}\right)^2$$

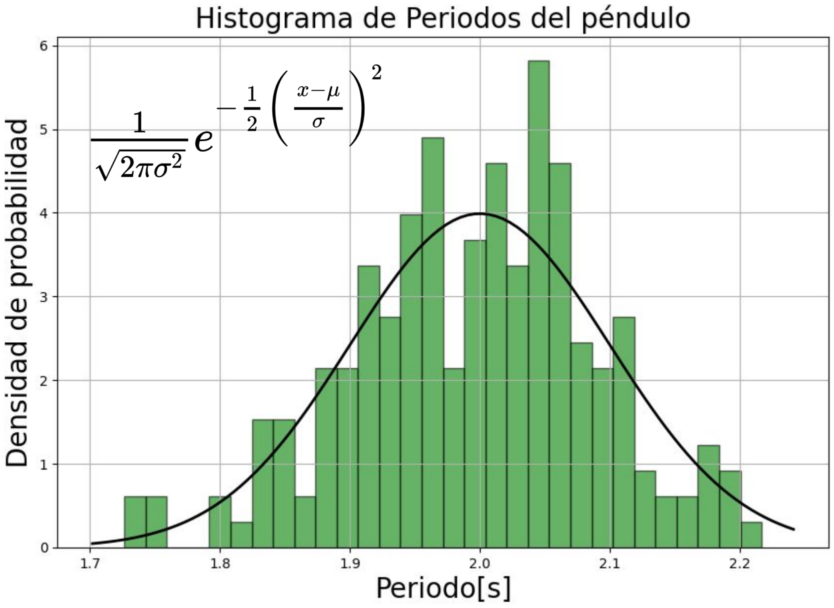
$$f(x_i) = mx_i + b$$

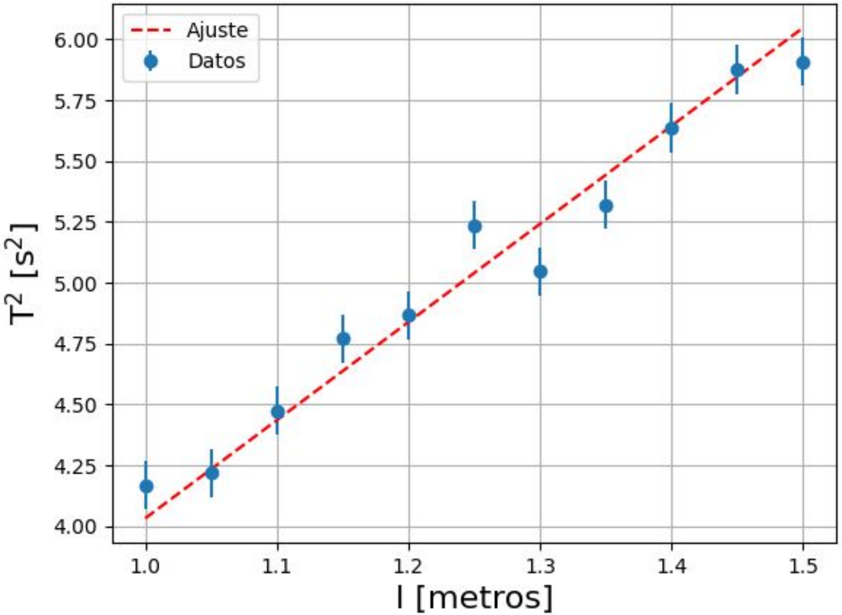
$$\left\{\begin{array}{c} m = (n\Sigma x_i y_i - \Sigma x_i \Sigma y_i)/\Delta \\ b = (\Sigma x_i^2 \Sigma y_i - \Sigma x_i \Sigma x_i y_i)/\Delta \\ \Delta = n\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2 \end{array}\right\}$$


Histograma de Periodos del péndulo
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$
Densidad de probabilidad
Periodo[s]
0
1
2
3
4
5
6
1.7
1.8
1.9
2.0
2.1
2.2

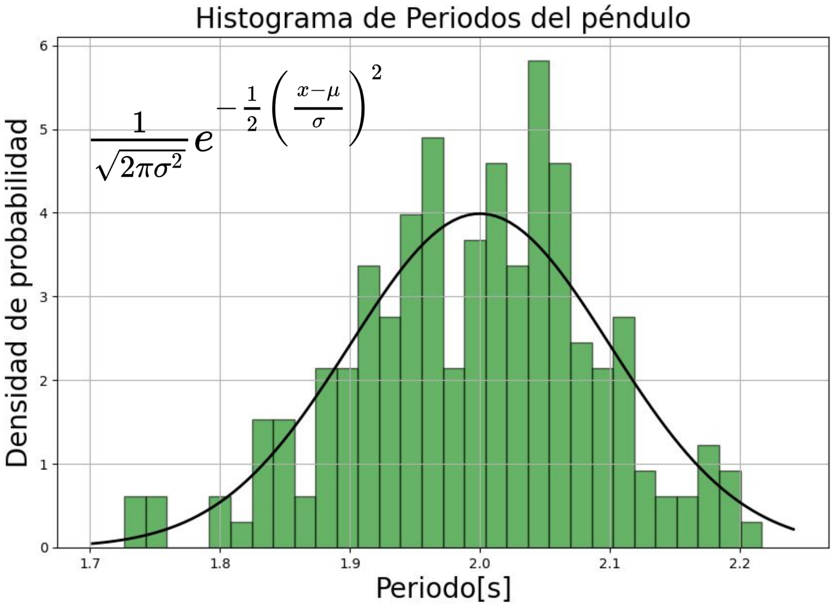

Ajuste
Datos
T^2 [s^2]
l [metros]
4.00
4.25
4.50
4.75
5.00
5.25
5.50
5.75
6.00
1.0
1.1
1.2
1.3
1.4
1.5

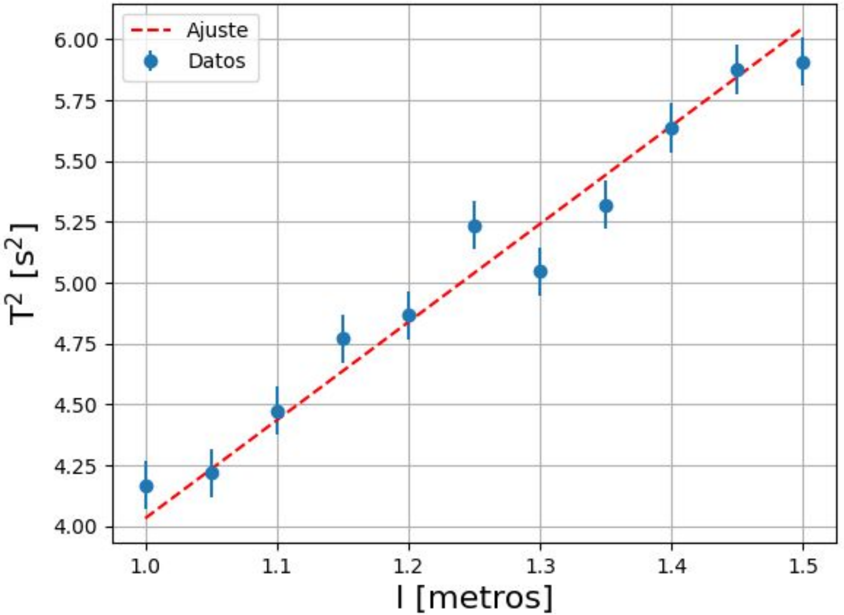
$$\Pi_i \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2}$$





$$\Pi_i \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^N e^{-\frac{1}{2}\Sigma_i\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2}$$





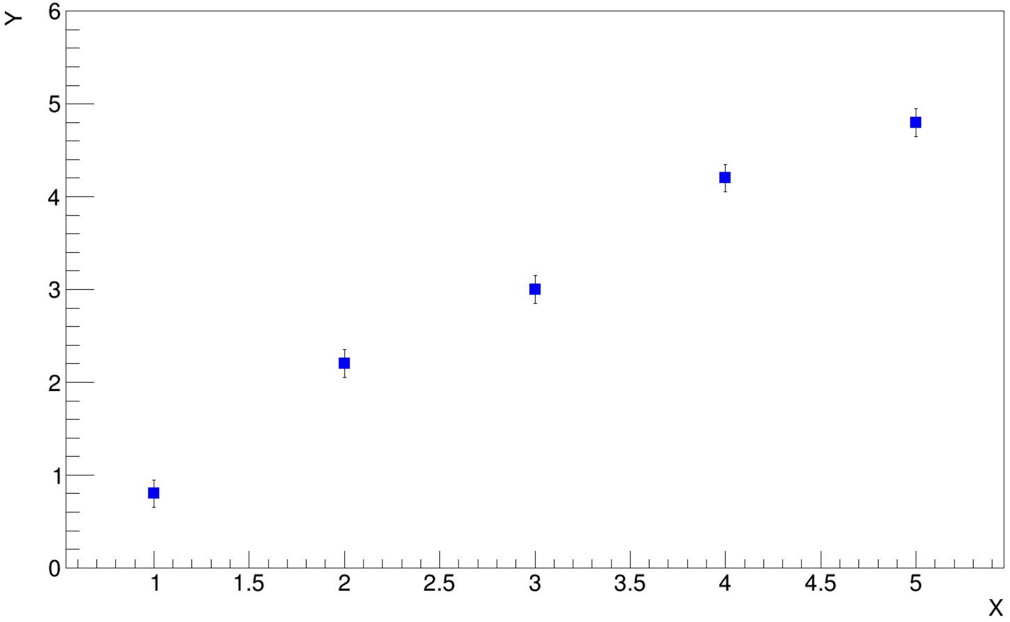
Cuadrados mínimos maximiza la verosimilitud cuando los errores son gaussianos

Sobre el R^2

que nos dice y que no

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n} Y_i$$

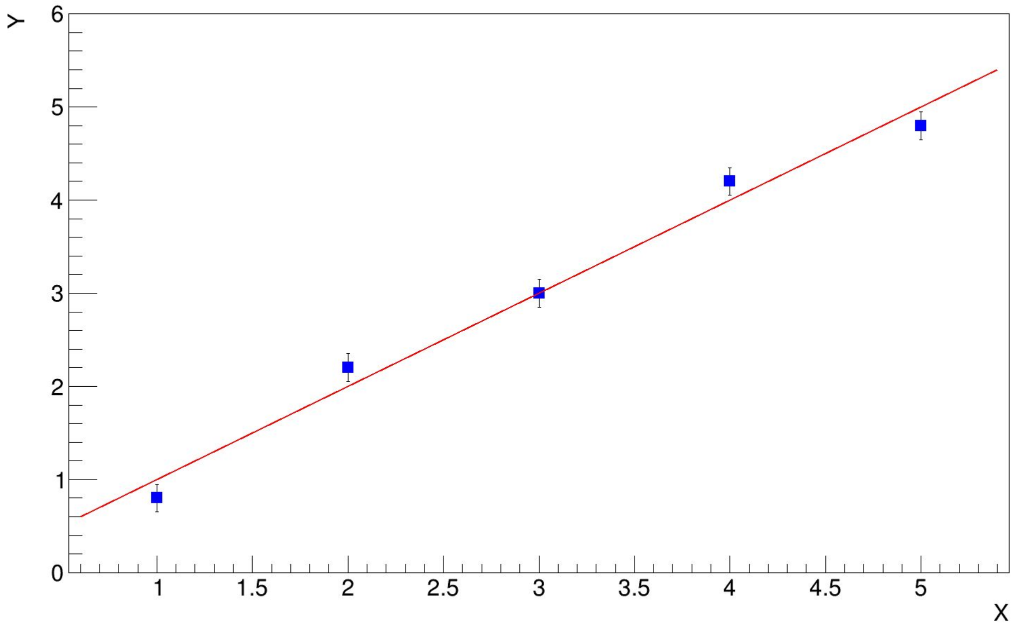
$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{n-1}\Sigma(Y_i - \overline{Y})^2$$



$$f(x_i) = mx_i + b$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n} Y_i$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{n-1}\Sigma(Y_i - \overline{Y})^2$$

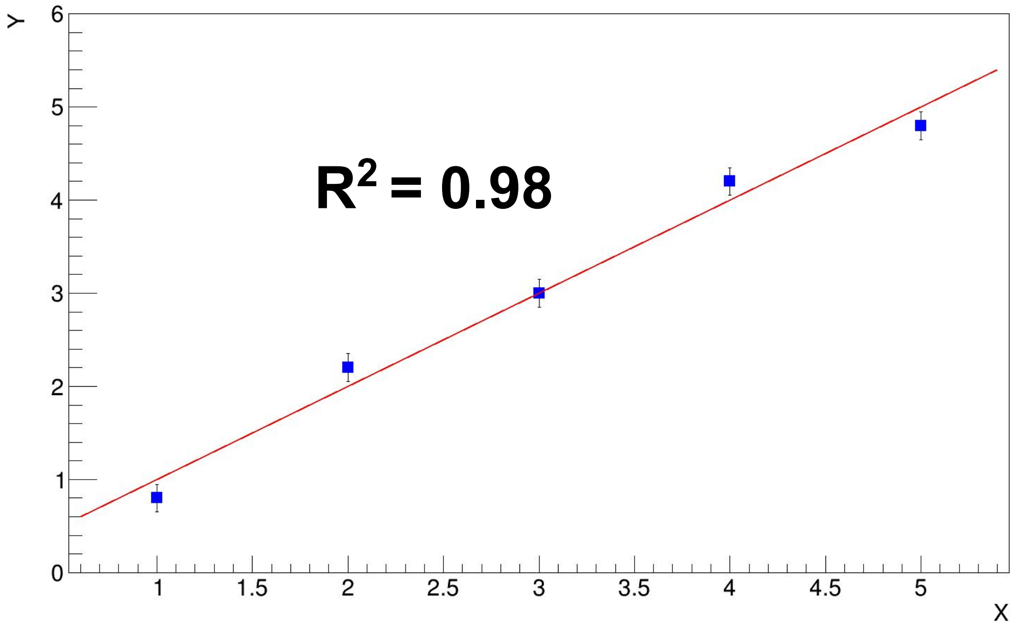


$$R^2 = 1 - \frac{\Sigma(Y_i - f(X_i))^2}{\Sigma(Y_i - \overline{Y})^2}$$

$$f(x_i) = mx_i + b$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n} Y_i$$

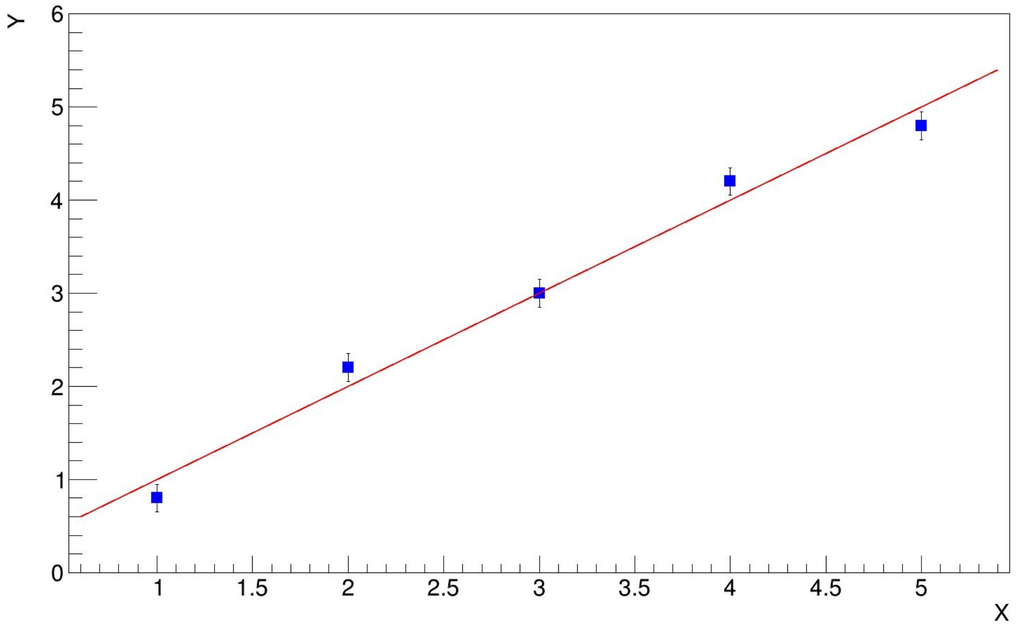
$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{n-1}\Sigma(Y_i - \overline{Y})^2$$



$$R^2 = 1 - \frac{\Sigma(Y_i - f(X_i))^2}{\Sigma(Y_i - \overline{Y})^2} \qquad f(x_i) = mx_i + b$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n} Y_i$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{n-1}\Sigma(Y_i - \overline{Y})^2$$



$$R^2 = \rho^2$$

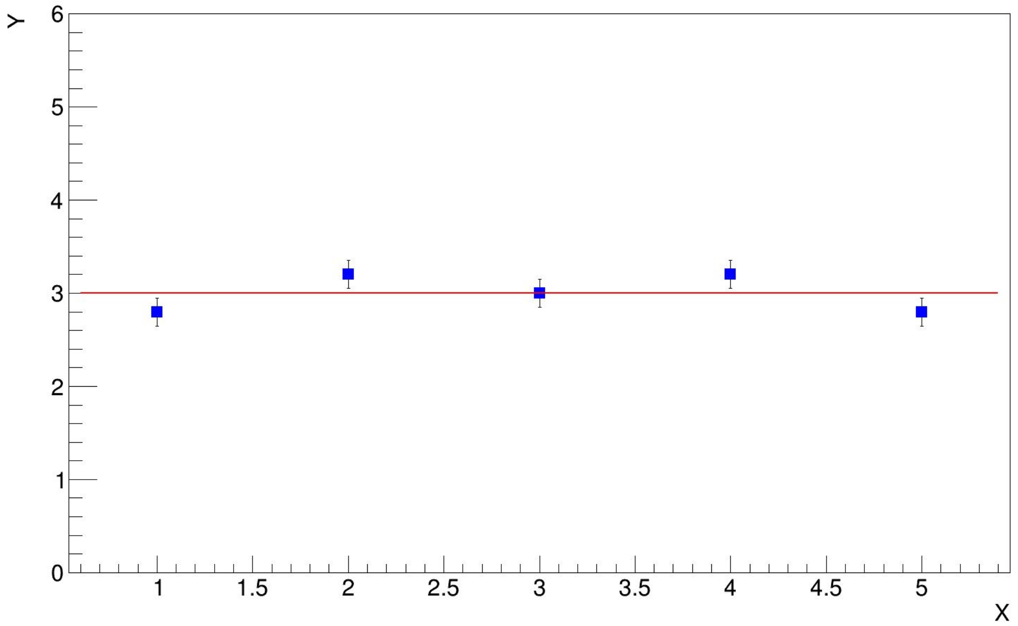
para el caso lineal

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n} X_i$$

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{n-1}\Sigma(X_i - \overline{X})^2$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{n-1}\Sigma(Y_i - \overline{Y})^2$$

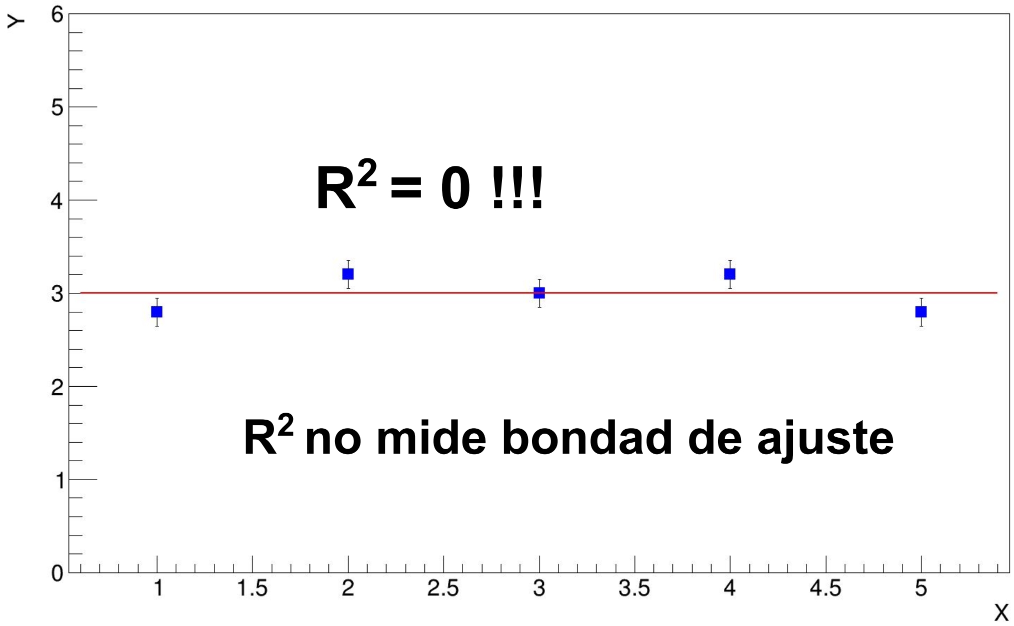


$$R^2 = 1 - \frac{\Sigma(Y_i - f(X_i))^2}{\Sigma(Y_i - \overline{Y})^2}$$

$$f(x_i) = mx_i + b$$

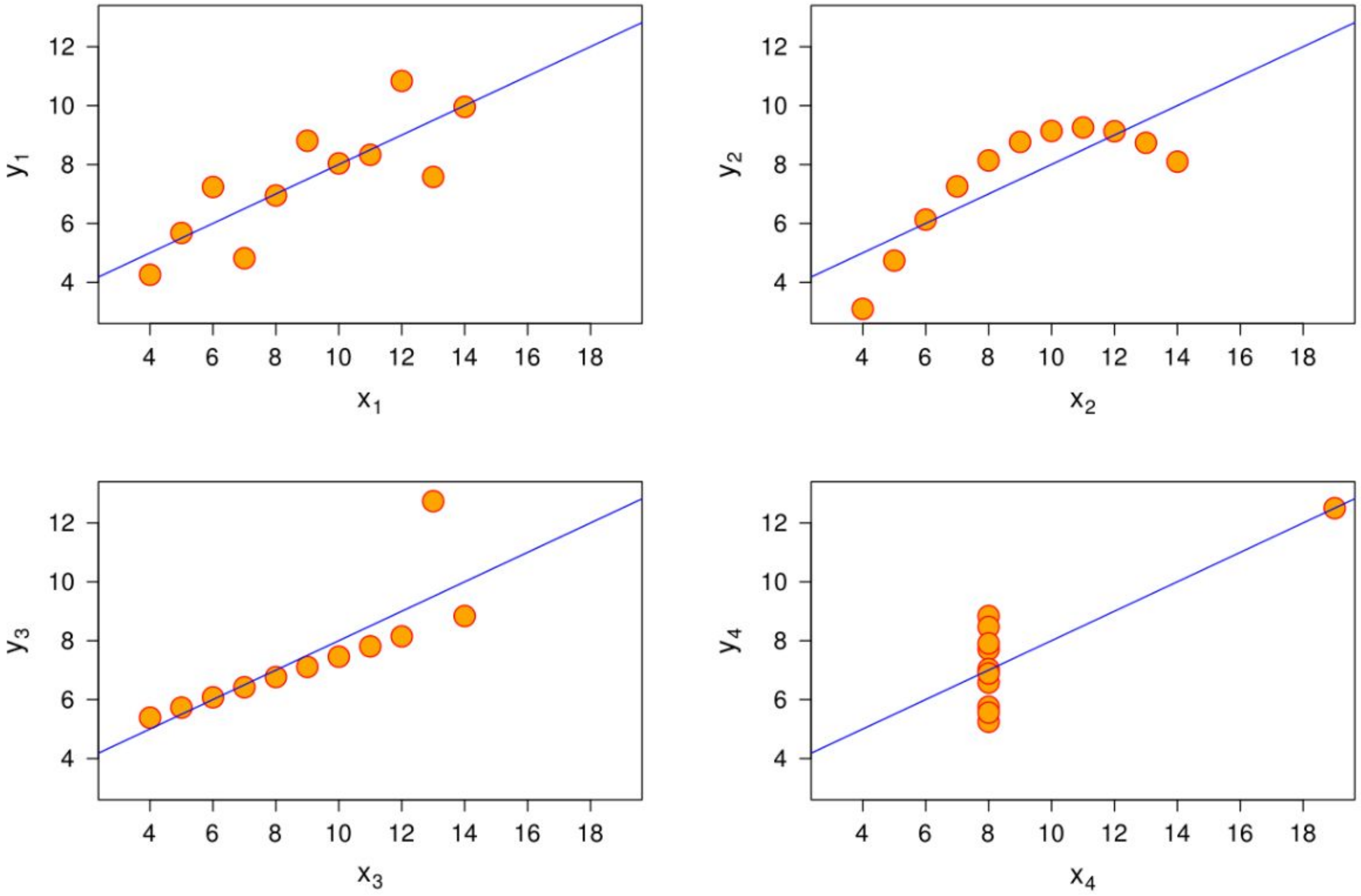
$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n} Y_i$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{n-1}\Sigma(Y_i - \overline{Y})^2$$



$$R^2 = 1 - \frac{\Sigma(Y_i - f(X_i))^2}{\Sigma(Y_i - \overline{Y})^2} \qquad f(x_i) = mx_i + b = \overline{Y}$$

Cuarteto de Anscombe



Cuarteto de Anscombe

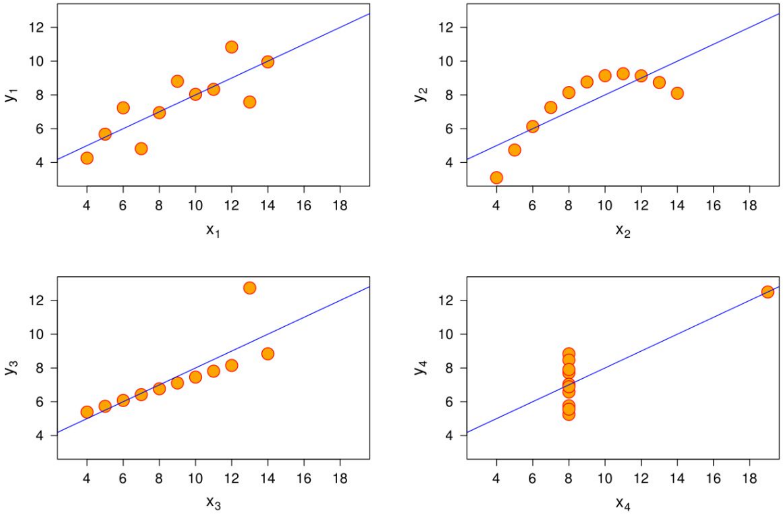
$$\overline{X} = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n} X_i \qquad \overline{Y} = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n} Y_i$$

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{n-1}\Sigma(X_i - \overline{X})^2 \qquad \sigma_Y^2 = \frac{1}{n-1}\Sigma(Y_i - \overline{Y})^2$$

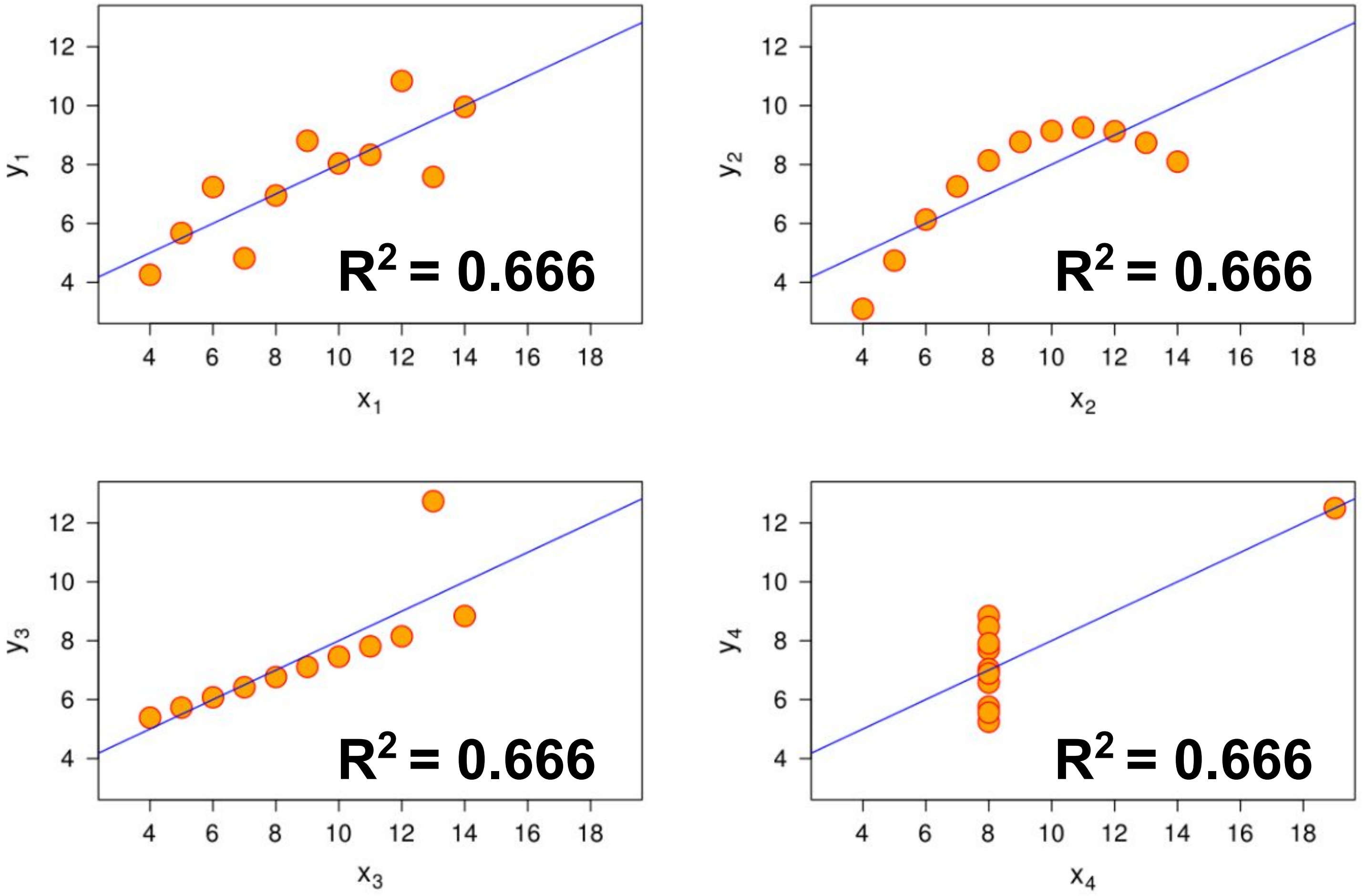
$$R^2 = \rho^2$$

para el caso lineal

Propiedad	Valor
Media de cada una de las variables *x*	9.0
Varianza de cada una de las variables *x*	11.0
Media de cada una de las variables *y*	7.5
Varianza de cada una de las variables *y*	4.12
Correlación entre cada una de las variables *x* e *y*	0.816
Recta de regresión	$y = 3 + 0.5x$



Cuarteto de Anscombe



Para terminar, volvamos con todo esto al experimento para determinar g usando un péndulo simple

El péndulo simple

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l$$

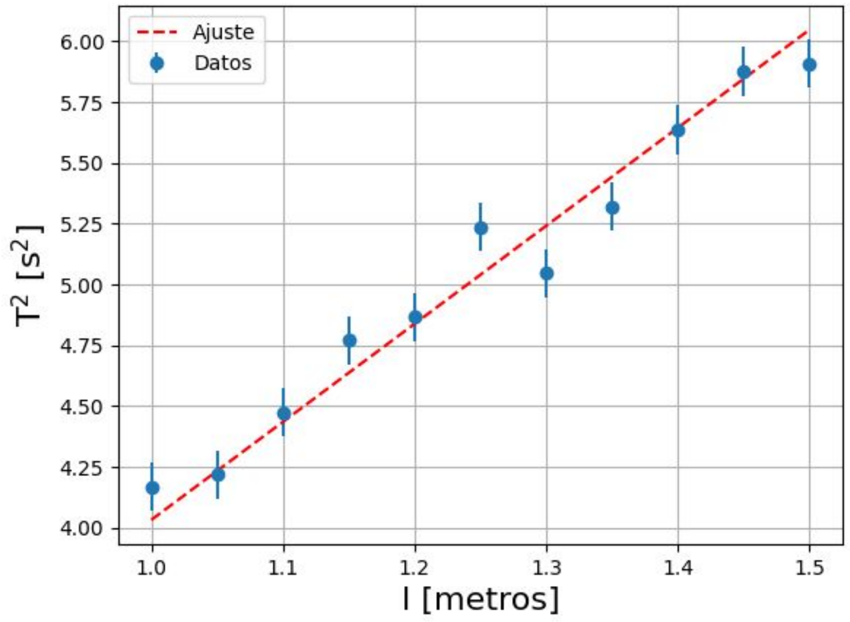
$$T_1^2 = \frac{4\pi^2}{g} l_1$$

$$T_2^2 = \frac{4\pi^2}{g} l_2$$

$$T_3^2 = \frac{4\pi^2}{g} l_3$$

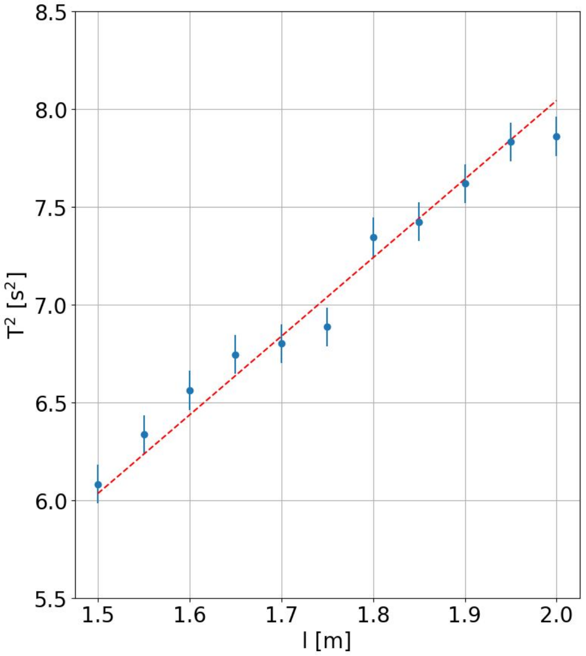
$$\vdots$$

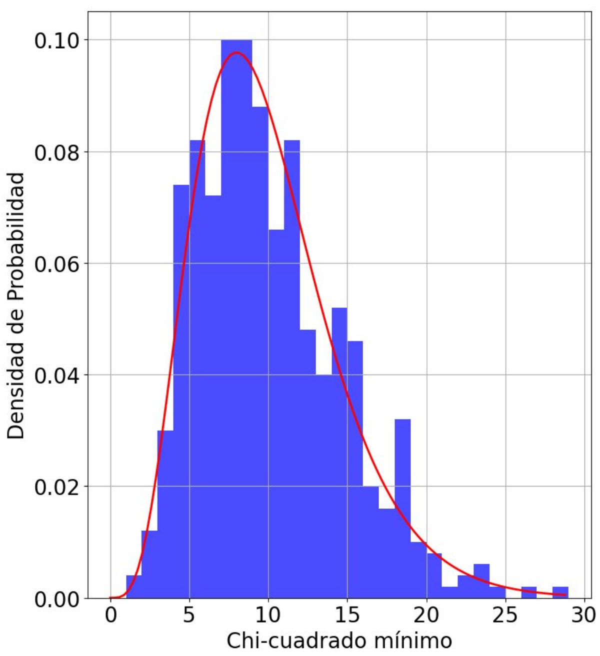
$$T_{10}^2 = \frac{4\pi^2}{g} l_{10}$$



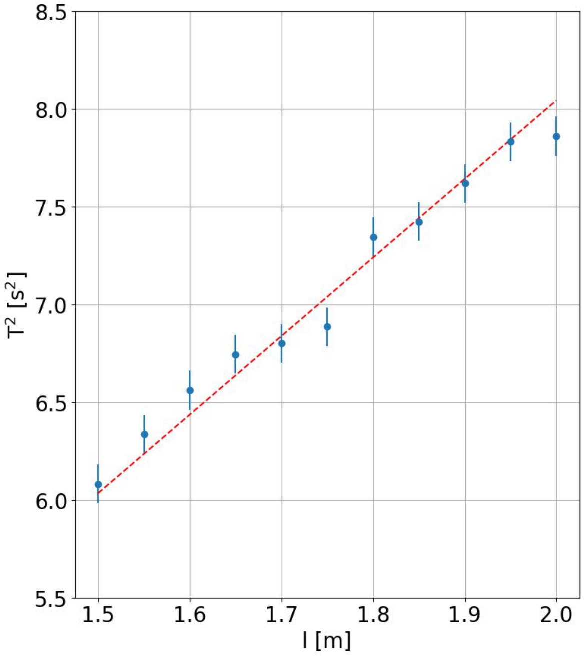
Simulamos 500 veces la clase de hoy, donde 10 grupos miden el período para 10 longitudes del hilo diferente

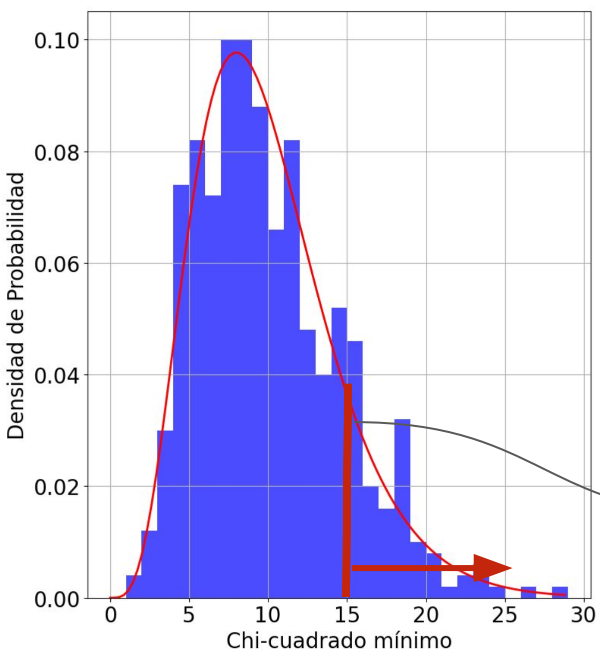
$$\chi^2_\nu = \Sigma_i^n \left(\frac{Y_i - f(x_i)}{\sigma_i} \right)^2$$





$$\chi^2_\nu = \sum_i^n \left(\frac{Y_i - f(x_i)}{\sigma_i}\right)^2$$

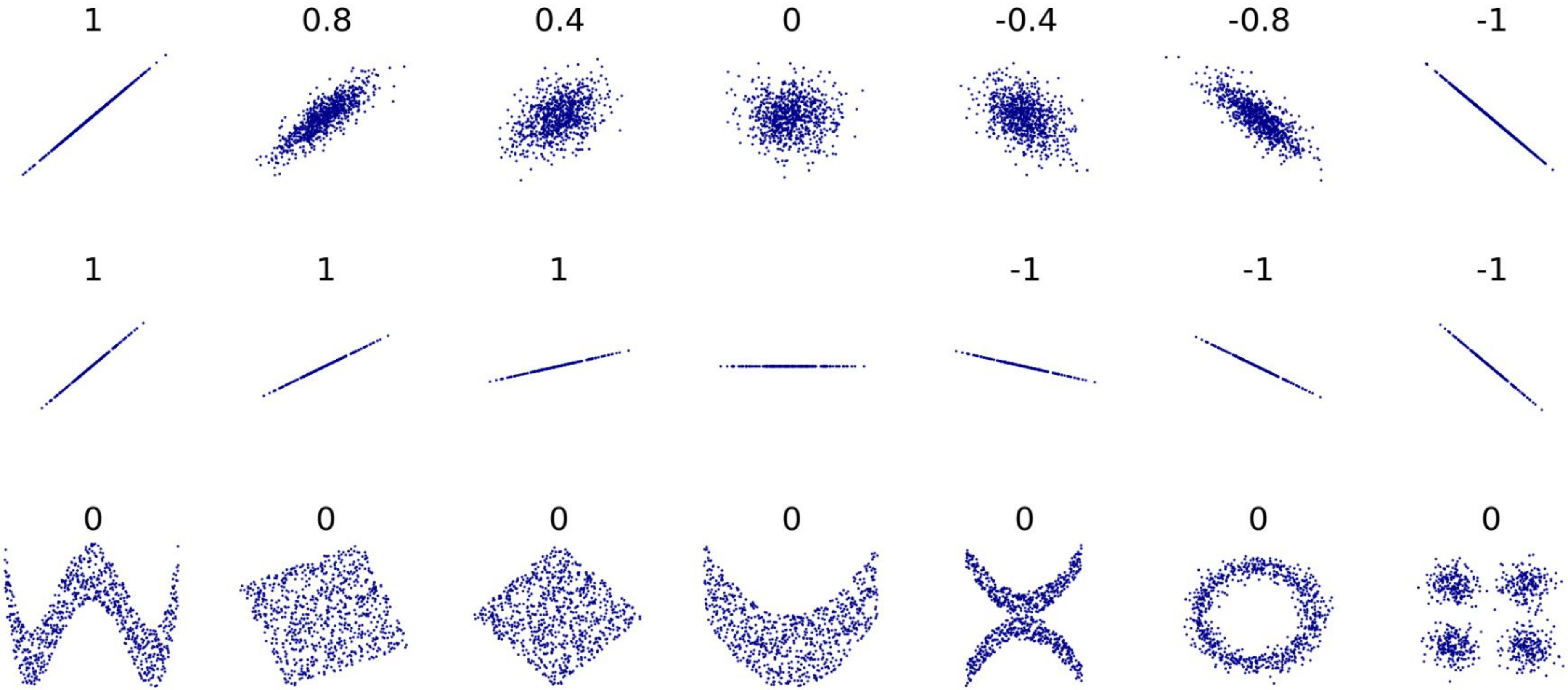


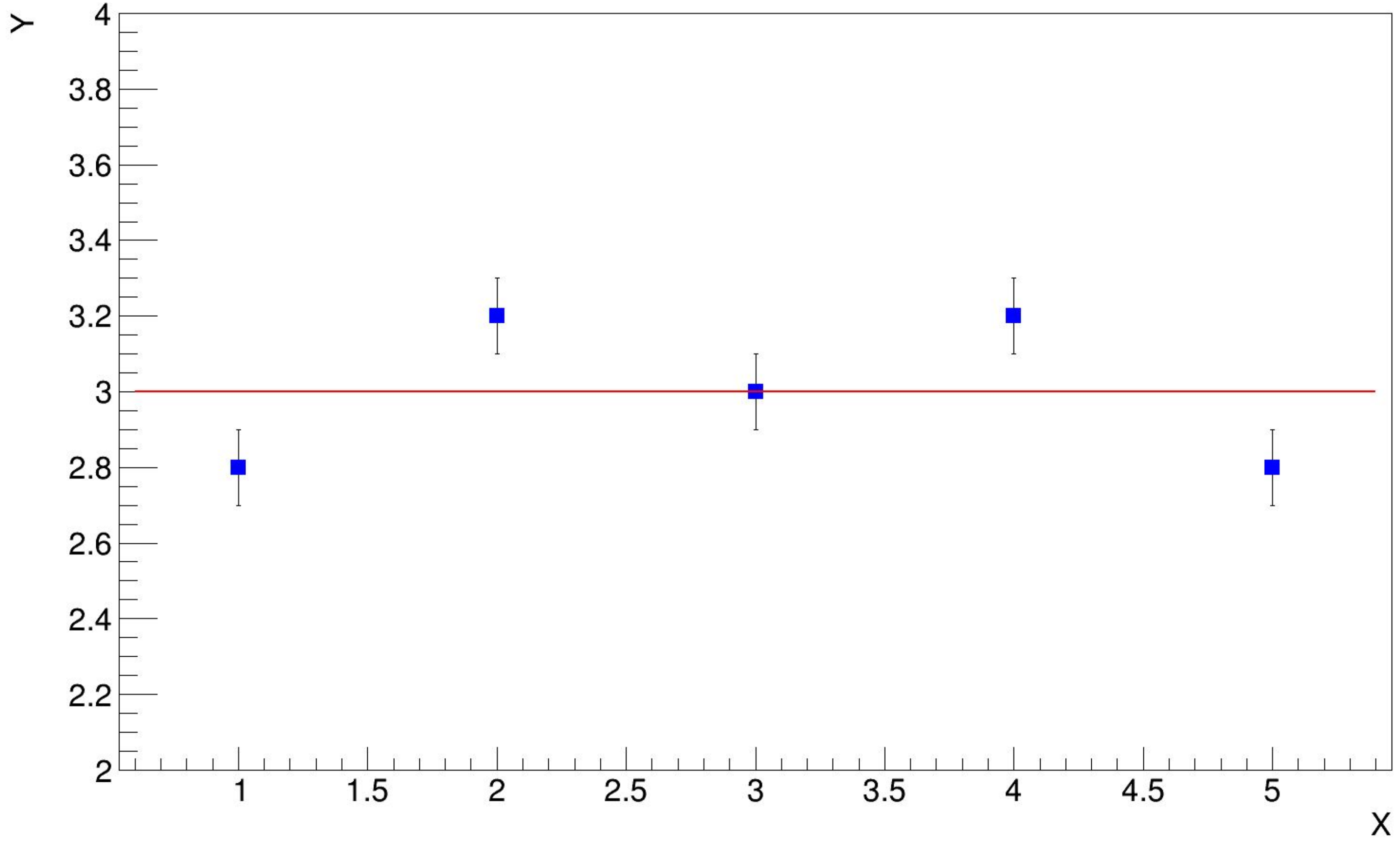


p-valor = probabilidad de obtener un resultado igual o más extremo que el obtenido bajo la hipótesis de que es correcto el modelo con el que ajusté los datos

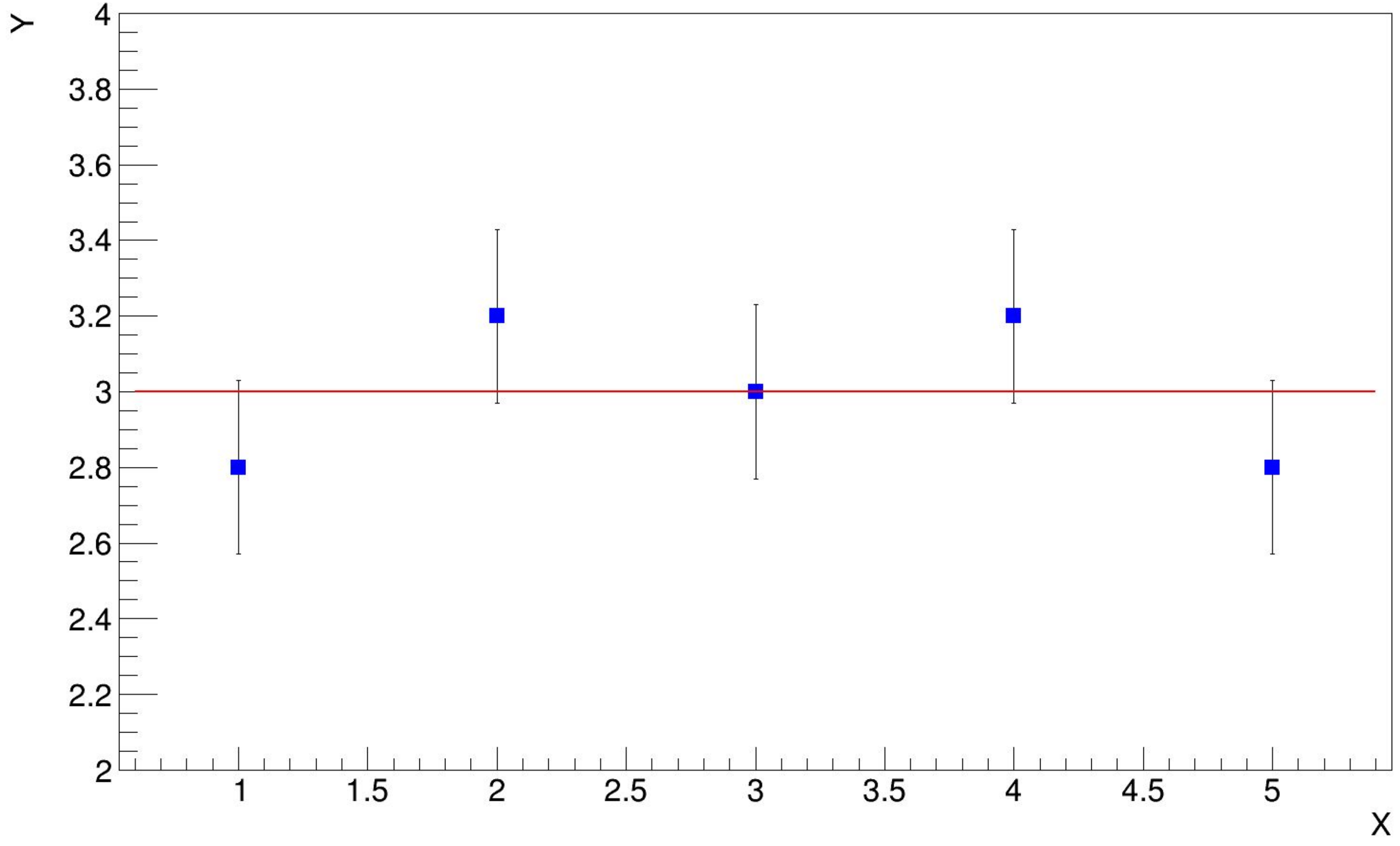
ejemplo: resultado obtenido = 15

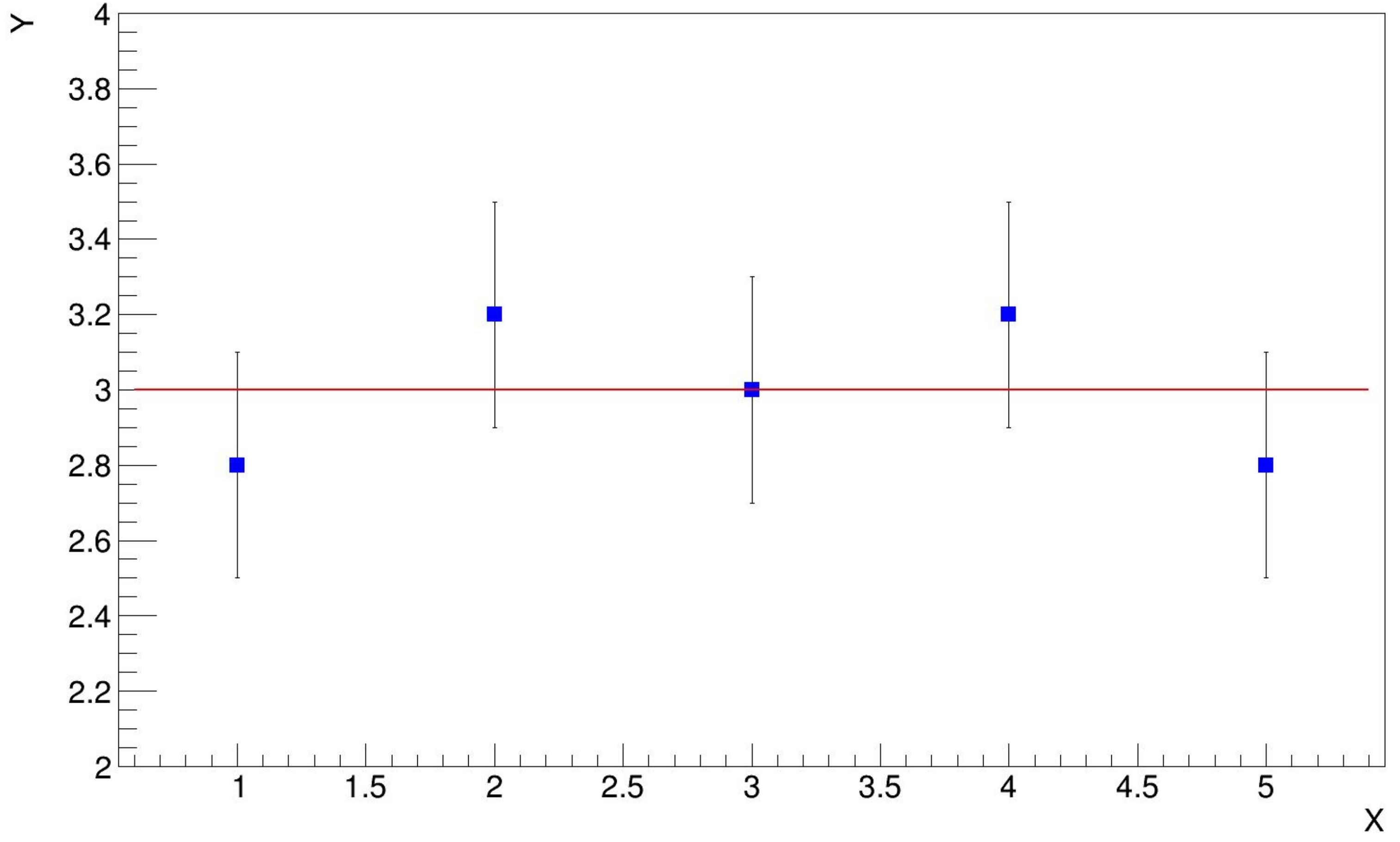
¿Preguntas?


1
0.8
0.4
0
-0.4
-0.8
-1
1
1
1
-1
-1
-1
0
0
0
0
0
0
0



Y
4
3.8
3.6
3.4
3.2
3
2.8
2.6
2.4
2.2
2
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
X


Y
4
3.8
3.6
3.4
3.2
3
2.8
2.6
2.4
2.2
2
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
X


Y
4
3.8
3.6
3.4
3.2
3
2.8
2.6
2.4
2.2
2
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
X