MEDICIONES DIRECTAS 3 – DETERMINACIÓN DEL PERÍODO DE UN PÉNDULO ESTADÍSTICA

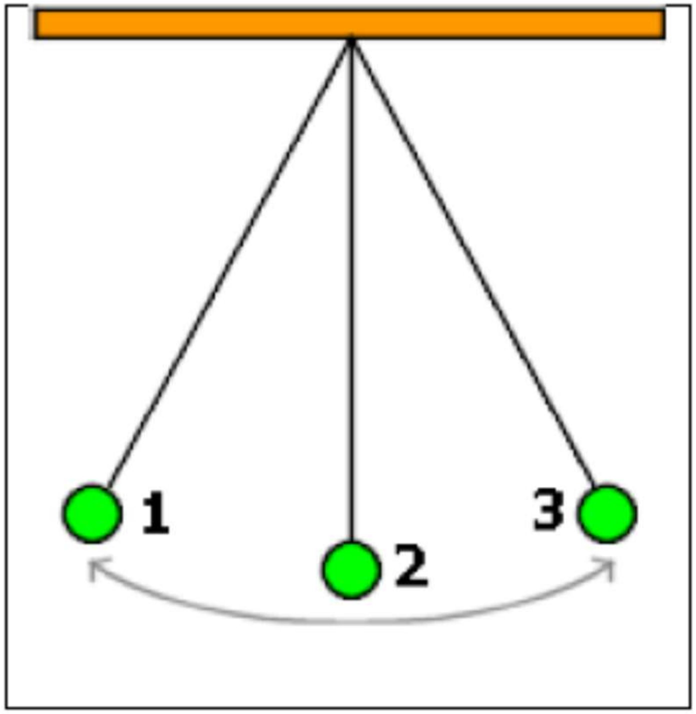
Laboratorio 1 – 2do Cuatrimestre de 2023

Departamento de Física
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

Repaso de la clase pasada

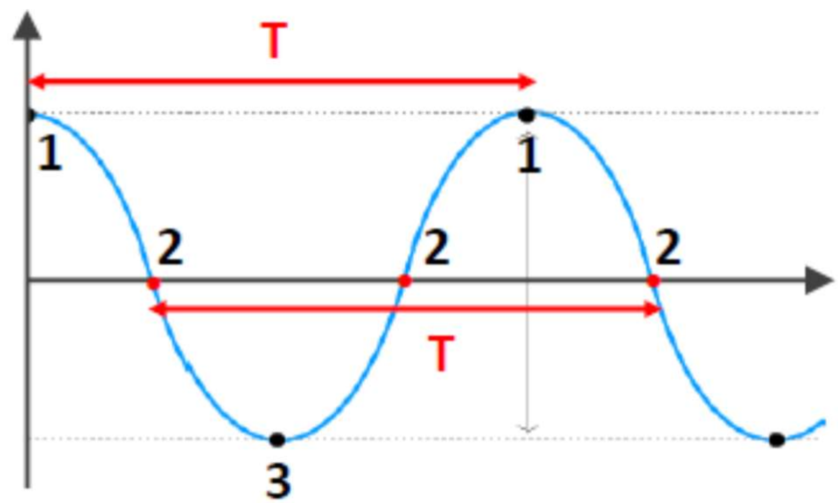
Período del péndulo



¿Y si comienzo a medir cuando pasa por el punto de equilibrio (2)?

Tiempo de una oscilación completa

Tiempo que tarda el péndulo en partir desde uno de sus extremos de amplitud (1), pasar por el punto de equilibrio (2), llegar al otro extremo de amplitud (3) y regresar nuevamente al primer punto (1)



universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

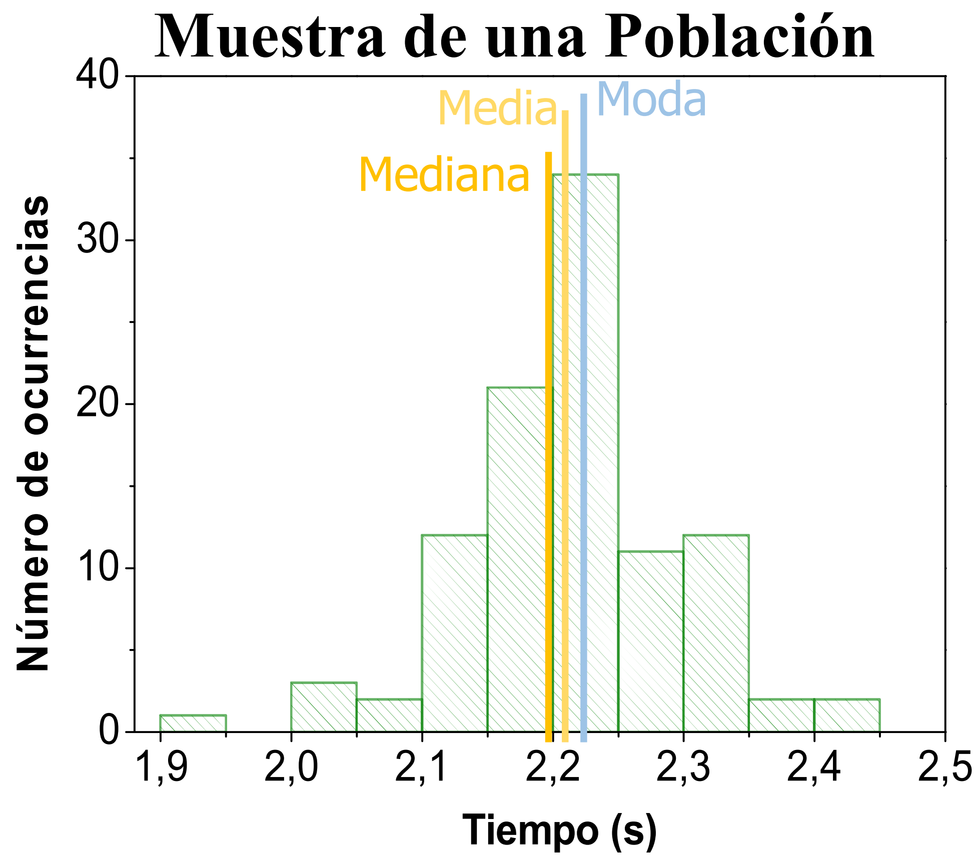
Repaso

MODA

Mo, x_{mo}: Valor de x que corresponde al máximo de frecuencia

MEDIANA

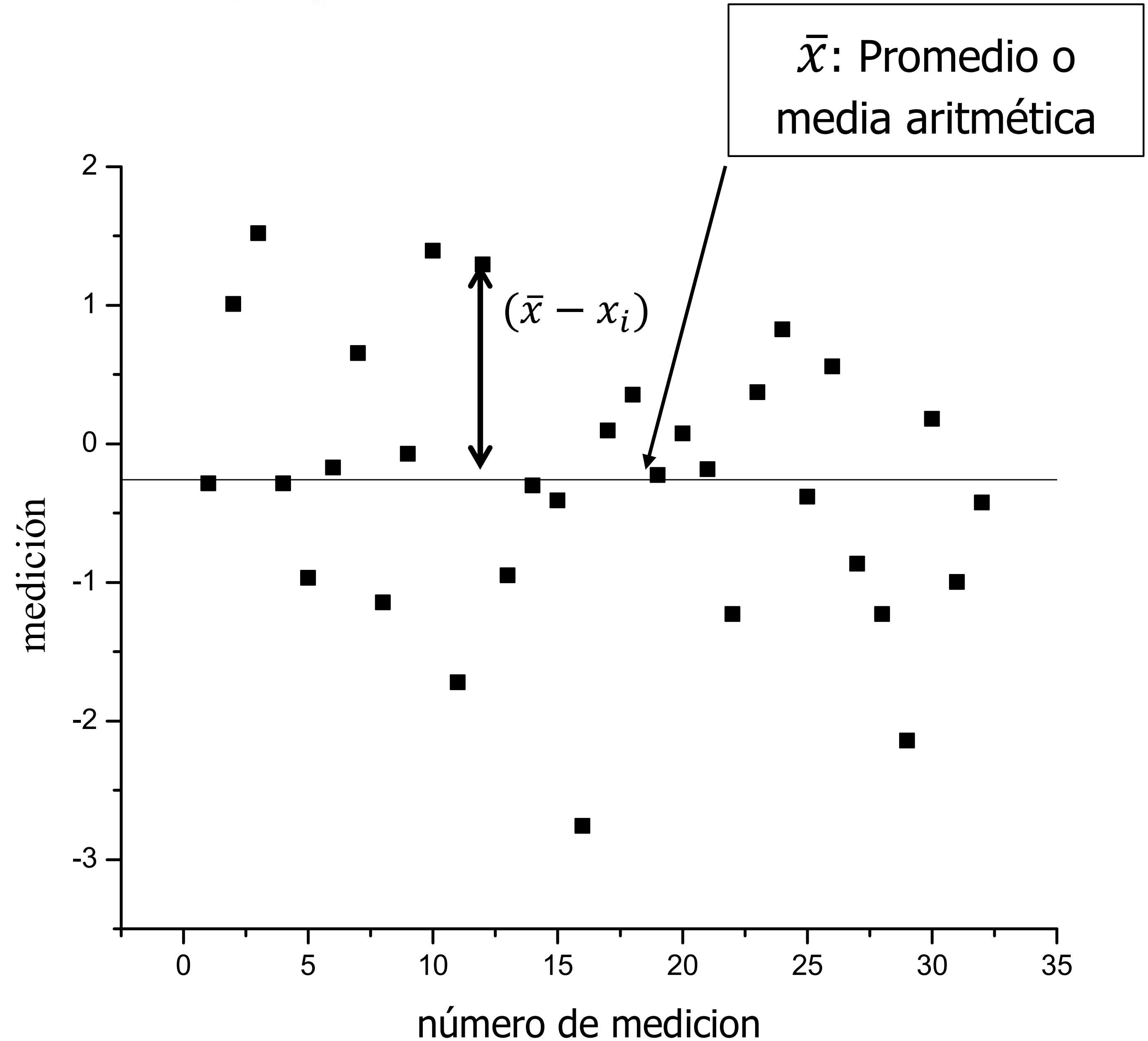
Me, $\tilde{x}$, x_{mo}: Valor de x que divide el 50% de los datos



MEDIA ($\overline{x}$)

$\bar{x}$: Promedio o media aritmética

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$



$\bar{x}$: Promedio o media aritmética
$(\bar{x} - x_i)$
2
1
0
-1
-2
-3
medición
0
5
10
15
20
25
30
35
número de medicion

universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

Varianza de una VA

$$V(X) = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}$$

X: VA; x_i: medición "i" de la VA

Propiedades de la Varianza

Supongamos X e Y VA independientes, entonces:

1. V(cte) = 0
2. $V(k.X) = k^2.V(X)$
3. V(X+Y) = V(X) + V(Y)

Dispersión de los datos x_i respecto de la media

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

DESVIACIÓN ESTÁNDAR (S)

$$S^2 = Var$$

Varianza de una VA

$$V(X) = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N-1}$$

X: VA; x_i: medición "i" de la VA

Propiedades de la Varianza

Supongamos X e Y VA independientes, entonces:

1. V(cte) = 0
2. V(k.X) = k^2.V(X)
3. V(X+Y) = V(X) + V(Y)

Dispersión de los datos x_i respecto de la media

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N-1}}$$

DESVIACIÓN ESTÁNDAR (S)

$$S^2 = Var$$

universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

Buscamos $\bar{x}$ que minimice la varianza $\Rightarrow$ $$\frac{dV}{d\bar{x}} = 0$$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_i \bar{x}_i}$$

HISTOGRAMA: El valor más representativo ~ Moda o Mediana.
Incerteza ~ ancho altura mitad

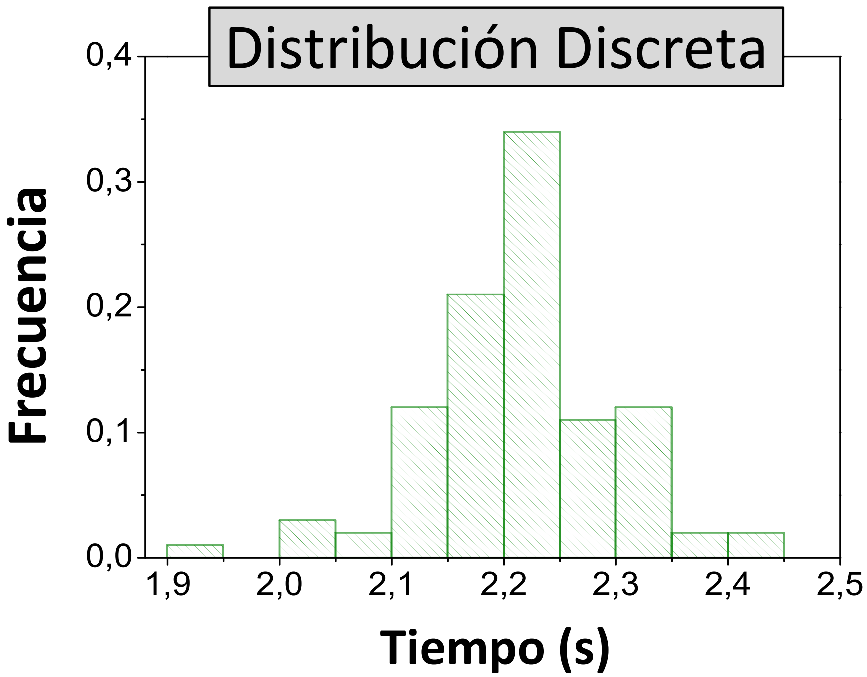
ESTADÍSTICA: El valor más representativo se asocia al promedio. $\bar{x}$
La incerteza se asocia a la desviación estándar. S

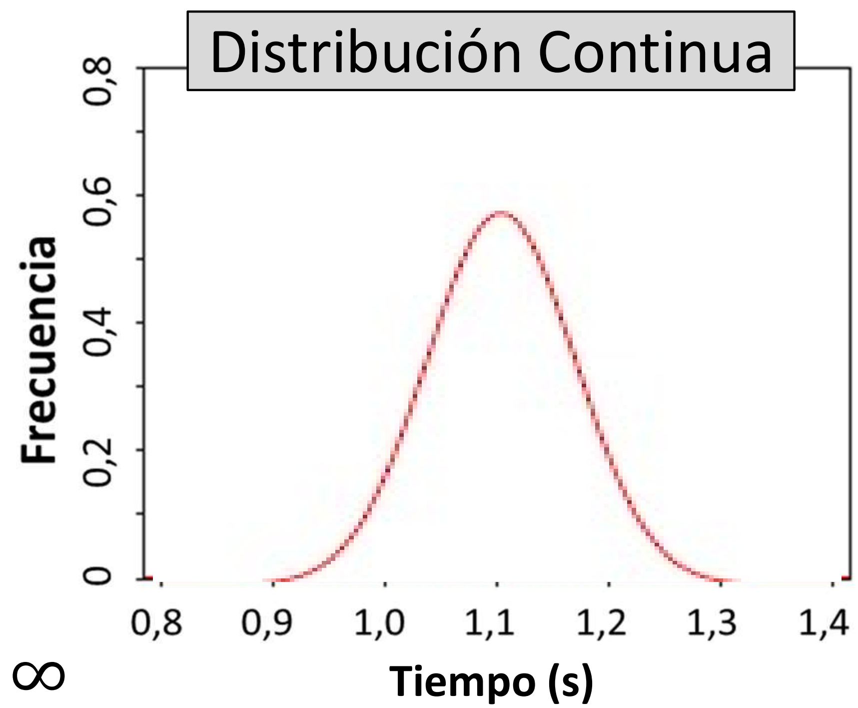
TENDENCIA EN PROBABILIDAD: N $\rightarrow \infty$

Análisis gráfico

Estimar los parámetros de la distribución a partir de los datos medidos

Tenemos una muestra finita de datos → Queremos obtener los parámetros de la distribución





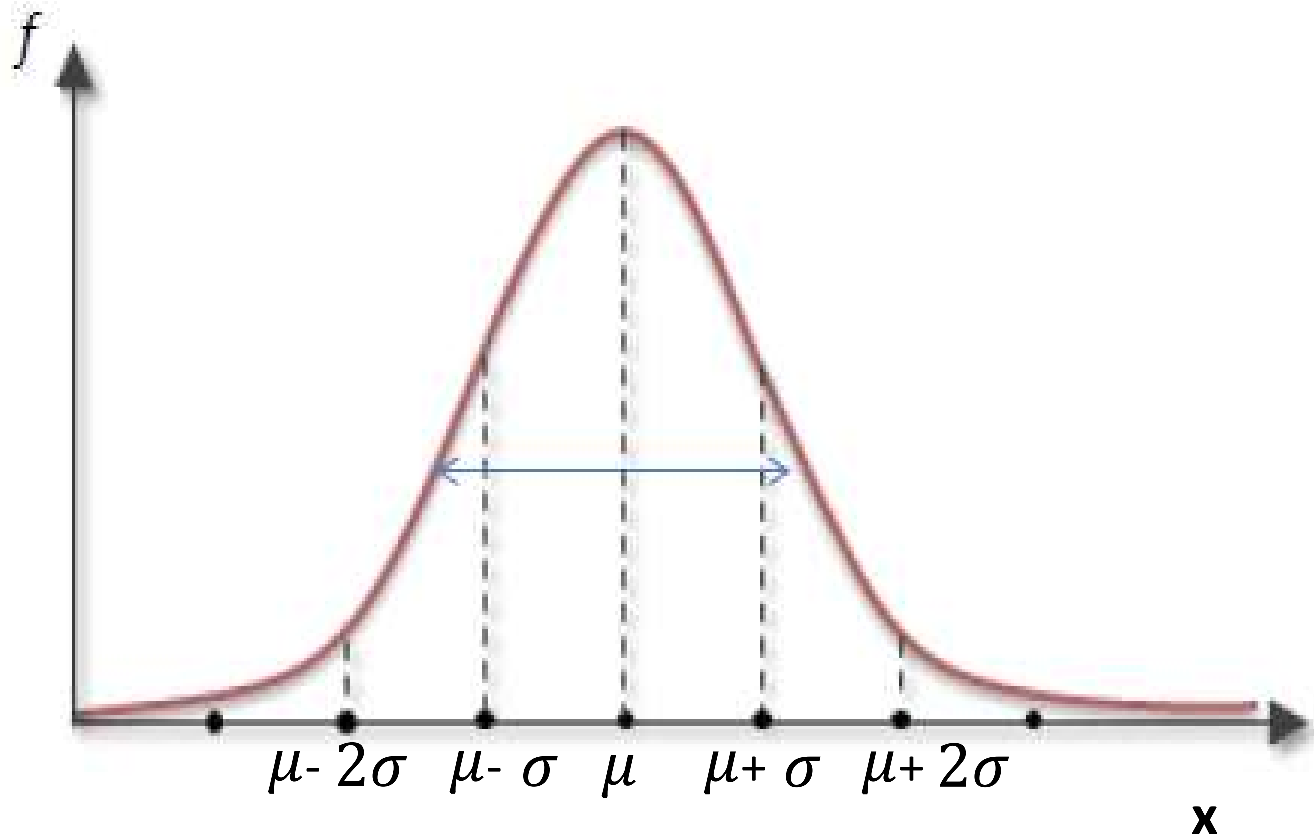
$N \to \infty$

$\bar{x} \longrightarrow ?$

$S \longrightarrow ?$

universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

Función de distribución



$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1}$$

$$\boxed{\int_{a}^{b} f(x)dx = P(a < x < b)}$$

$$\boxed{f(x)dx \ = P(x, x + dx)}$$

$f(x)$: DENSIDAD DE PROBABILIDAD

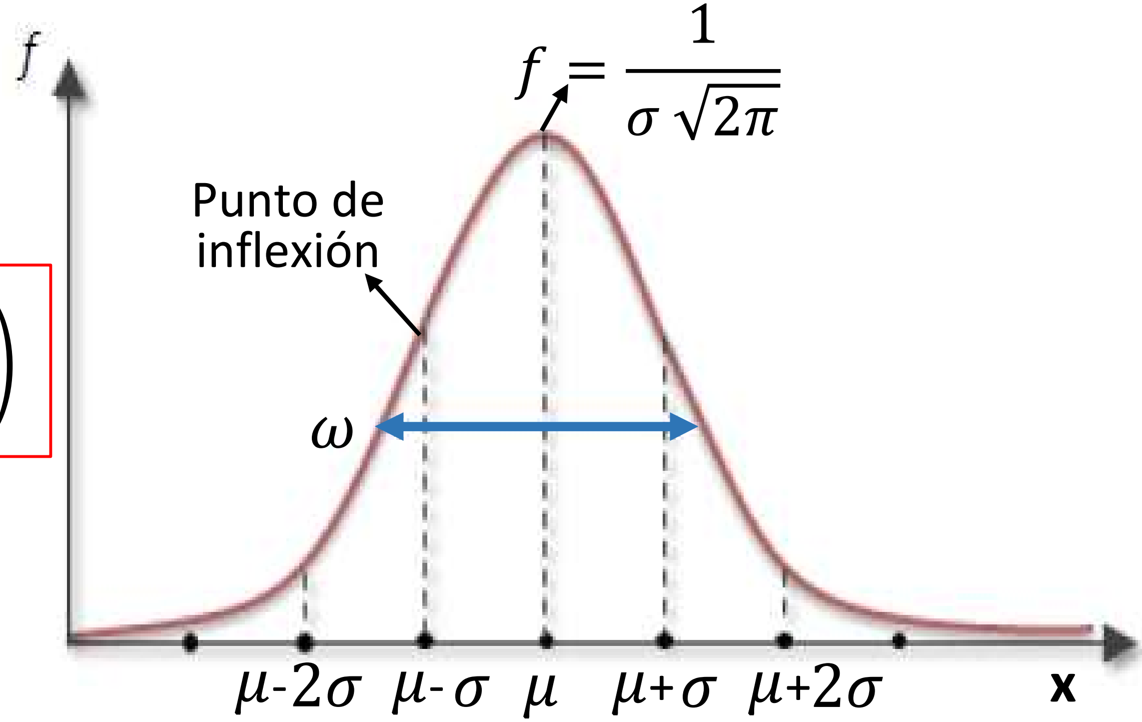
universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

Función de distribución

- Hay un sólo valor más probable (μ) y corresponde al promedio, la media y la moda.
- Las mediciones no están correlacionadas (ojo, aprendizaje)
- Es simétrica respecto del promedio (ojaime)
- La probabilidad decrece al alejarse del promedio
- Es asintótica a 0 para $x \to \infty$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Gaussiana



Función de distribución: Gauss

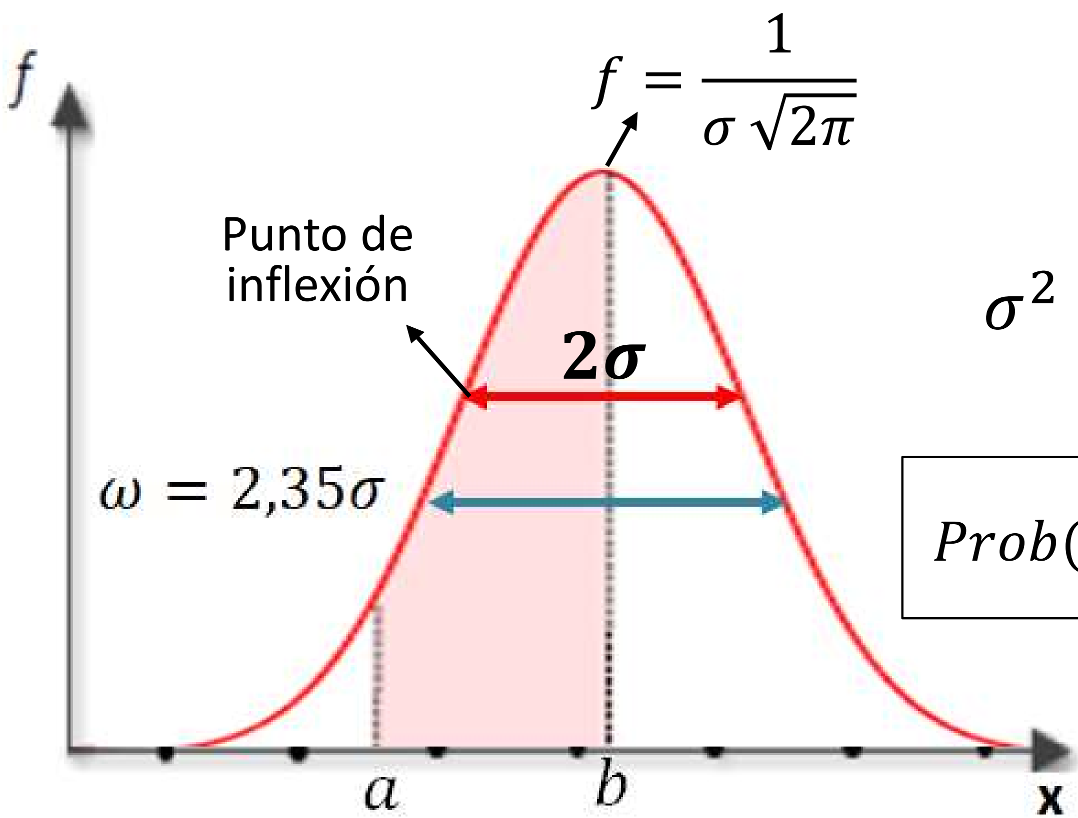
$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$\mu = \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$$

$$\sigma^2 = \sigma_x^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{x})^2 f(x)dx$$

$$\boxed{Prob(a \leq x \leq b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} dx}$$

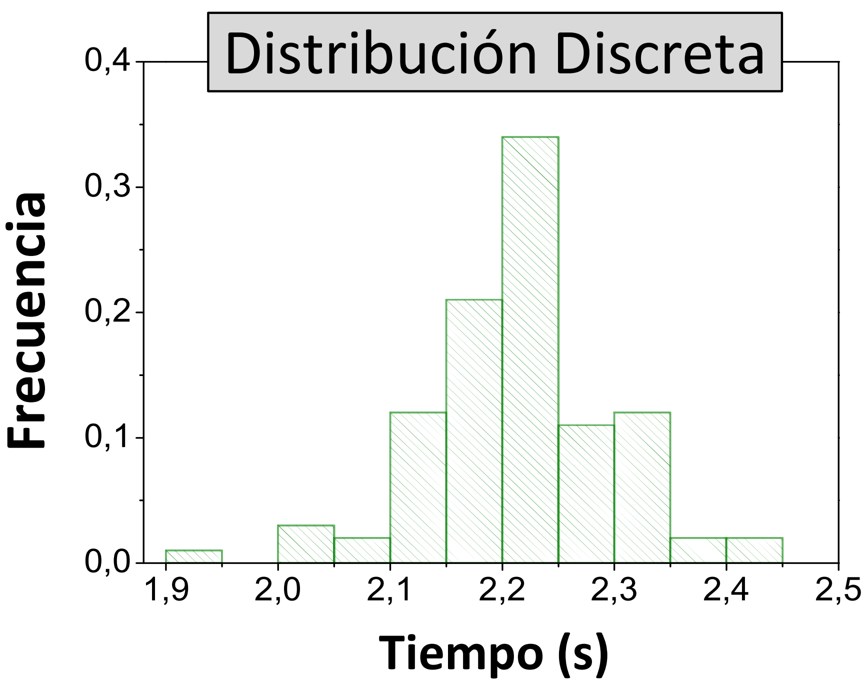


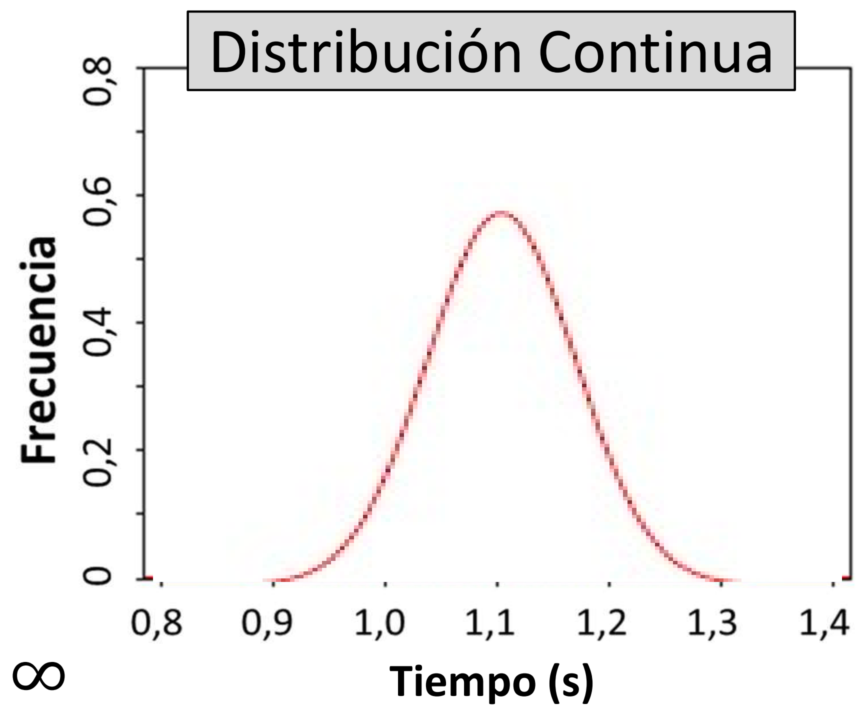
universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

Si nuestra VA es gaussiana

¿Qué nos dice la TENDENCIA EN PROBABILIDAD?

Tenemos una muestra finita de datos → Queremos obtener los parámetros de la distribución





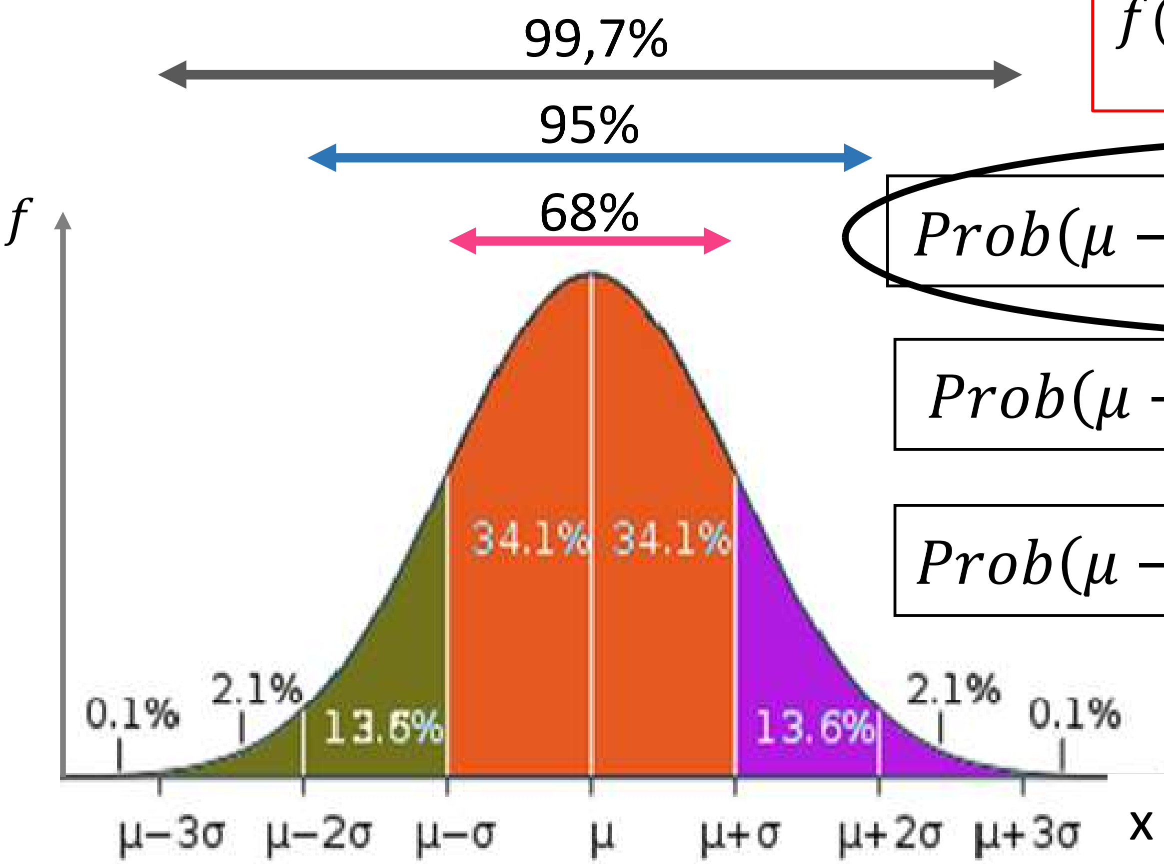
$N \rightarrow \infty$

$\bar{x} \longrightarrow \mu$

$S \longrightarrow \sigma$

Son propiedades de la distribución de la VA

Función de distribución: Gauss



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$Prob(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) \cong 0{,}6827$$

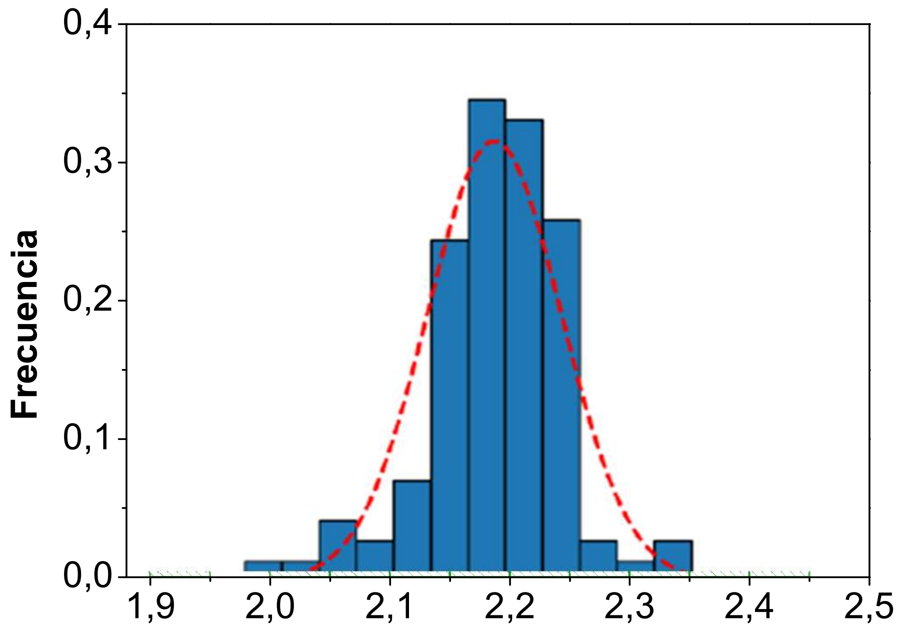
$$Prob(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) \cong 0{,}95$$

$$Prob(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) \cong 0{,}997$$

Desviación Estándar:
Asociada con el intervalo de confianza (prob. 68%) de UNA MEDICIÓN INDIVIDUAL → Incerteza

universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

Tenemos una muestra finita de datos ⇒ Estimamos los parámetros de la distribución



Si realizamos una nueva medición x, ésta tendrá una probabilidad de ~ 68% de encontrarse en el intervalo:

$(\bar{x} - S, \bar{x} + S)$

Discreto

$(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$

Continuo

universidad de buenos aires - exactas
departamento de Física

Parámetros de la distribución a partir de los datos de 1 Muestra con N medidas

Tenemos una muestra finita de datos ⇨ Estimamos los parámetros de la distribución

Distribución Discreta	$N \to \infty$	Distribución Continua
$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i$	→	$\bar{x} = \mu$
$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\bar{x} - x_i)^2}{N-1}}$	→	$S = \sigma$

Si realizamos una nueva medición x, ésta tendrá una probabilidad de ~ 68% de encontrarse en el intervalo:

$(\bar{x} - S, \bar{x} + S)$ → $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$

O sea que S (ó σ) es una medida del intervalo de confianza que nos da la incerteza para UNA MEDICIÓN CUALQUIERA

¿Cómo analizamos cuál es el intervalo de confianza que nos da la incerteza para EL PROMEDIO de 1 Muestra con N medidas?

Para esto, repetimos n veces el experimento: muestra Poblacional

Exp. 1 → N mediciones de x → $\bar{x}_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ $\quad S_{x1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}_1 - x_i)^2}{N-1}}$

Exp. 2 → N mediciones de x → $\bar{x}_2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ $\quad S_{x2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}_2 - x_i)^2}{N-1}}$

⋮

Exp. n → N mediciones de x → $\bar{x}_n = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ $\quad S_{xn} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}_n - x_i)^2}{N}}$

Si repetimos el experimento n veces, los valores de los x_i cambiarán, y la media ($<\bar{x}>$) de las medias ($\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, ... $\bar{x}_n$), y la desviación estándar de la media ($S_{\bar{x}}$) serán (por cálculo directo):

$$\boxed{< \bar{x} >= \frac{1}{n}\sum_{i} \bar{x}_i}$$

$$\boxed{S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(< \bar{x} > - \bar{x}_i)^2}}$$

Para esto, repetimos n veces el experimento: muestra Poblacional

Exp. 1 → N mediciones de x → $\bar{x}_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad S_{x1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}_1 - x_i)^2}{N}}$

Exp. 2 → N mediciones de x → $\bar{x}_2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad S_{x2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}_2 - x_i)^2}{N}}$

⋮

Exp. n → N mediciones de x → $\bar{x}_n = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad S_{xn} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}_n - x_i)^2}{N}}$

Si repetimos el experimento n veces, los valores de los x_i cambiarán, y la media ($<\bar{x}>$) de las medias ($\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, ... $\bar{x}_n$), y la desviación estándar de la media ($S_{\bar{x}}$) serán (por cálculo directo):

Sirve para encontrar el intervalo de confianza del promedio, pero:
Tenemos que realizar muchas muestras de N mediciones!!! (Muestra Poblacional)

Para esto, repetimos n veces el experimento: muestra Poblacional

Exp. 1 → N mediciones de x → $\bar{x}_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad S_{x1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}_1 - x_i)^2}{N}}$

Exp. 2 → N mediciones de x → $\bar{x}_2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad S_{x2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}_2 - x_i)^2}{N}}$

⋮

Exp. n → N mediciones de x → $\bar{x}_n = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad S_{xn} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}_n - x_i)^2}{N}}$

Si repetimos el experimento n veces, los valores de los x_i cambiarán, y la media ($<\bar{x}>$) de las medias ($\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, ... $\bar{x}_n$), y la desviación estándar de la media ($S_{\bar{x}}$) serán (por cálculo directo):

Sirve para encontrar el intervalo de confianza del promedio, pero:
Tenemos que realizar muchas muestras de N mediciones!!! (Muestra Poblacional)
RECORDAR

Desviación estándar de los promedios
Error estadístico

Alternativamente, si calculamos la varianza del promedio (cualquiera de los $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, ... $\bar{x}_n$) de una serie de N mediciones no correlacionadas, obtenemos:

$$V(\bar{x}) = V\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i}{N}\right) = V\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i\right) = \frac{1}{N^2}V\left(\sum_{i=1}^{N}x_i\right) = \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{N}V(x_i)\right)$$

$$= \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{N}V(x)\right) = \frac{V(x)}{N}$$

(Ver demostración en el material de la clase)

La ventaja de este resultado es que nos permite predecir el intervalo de confianza del promedio de una serie de N mediciones (con desviación estándar "*S*"). Nos dice que el promedio de una muestra de datos estará mejor definido cuanto mayor sea el número de los datos de esa muestra.

$$\boxed{\sigma_e = S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{N}}}$$

ERROR ESTADÍSTICO (σ_e)

$$\boxed{(\bar{x} - S\,, \bar{x} + S)} \xrightarrow[N \to \infty]{} \boxed{(\mu - \sigma\,, \mu + \sigma)}$$

Entonces para una muestra, un $\bar{x}$ dado tendrá

- ***Probabilidad de ~68%*** de encontrarse en $\boxed{(\bar{x} - \sigma_e , \bar{x} + \sigma_e)}$
- ***Probabilidad de ~95%*** de encontrarse en $\boxed{(\bar{x} - 2\sigma_e , \bar{x} + 2\sigma_e)}$
- ***Probabilidad de ~99%*** de encontrarse en $\boxed{(\bar{x} - 3\sigma_e , \bar{x} + 3\sigma_e)}$
- En la práctica, $\bar{x}$ puede ser un promedio o el promedio de los promedios.

universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

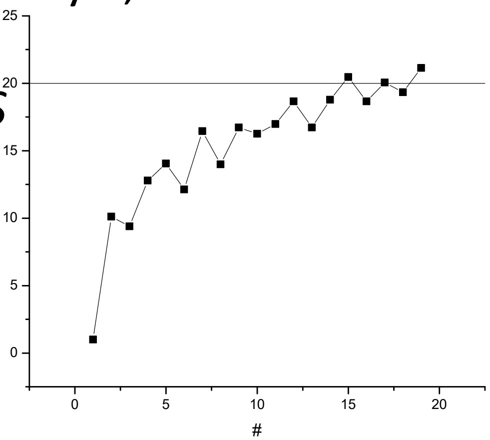
Actividad 1

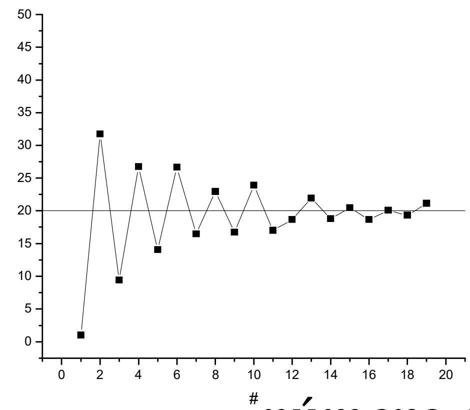
Análisis de la tendencia en probabilidad

Para las series de 10, 20, 50, 100 y 200 datos.

a) Obtener $\bar{T}$ y S, analizar

$\bar{T}$ y/o S





$número\ de\ mediciones$

b) Compatibilidad con la distribución gaussiana.
Superponer a cada histograma la gaussiana correspondiente (guía). Analizar.

c) Analizar proporción de mediciones en el intervalo ($\bar{T} \pm S$)

d) ¿cuál es la función de distribución que describe al período del péndulo medido en estas condiciones? ¿depende del número de mediciones de la serie? ¿cuál es la mejor forma de determinar el período y la desviación estándar de mi variable aleatoria? (DEBE DEDUCIRSE DEL TRABAJO REALIZADO)

Actividad 2

Error estadístico, Error del promedio

Arme 10 series de 20 mediciones cada una.

a) Obtener $\bar{T}_1$,..., $\bar{T}_{10}$ y S_1, ..., S_{10}; Comparar los S_i. ¿Son "similares"? ¿Cómo se comparan con el S de la serie completa de 200 mediciones? ¿Cuál elegiría si tiene que caracterizar la desviación estándar de la variable aleatoria?

b) Obtener <$\bar{T}$> y $S_{\bar{T}}$. ¿Cómo se compara $S_{\bar{T}}$ con S (200 datos)? ¿Cuál es el significado estadístico de $S_{\bar{T}}$?

c) Haga un histograma de los promedios $\bar{T}_1$,..., $\bar{T}_{10}$. Superponga una gaussiana centrada en <$\bar{T}$> usando $\frac{S}{\sqrt{20}}$ como desviación estándar (S es la desviación estándar de las 200 mediciones, la usamos en la hipótesis de que tiende en probabilidad hacia σ, la desviación estándar de la variable aleatoria). El objetivo de este punto es analizar si este valor puede asociarse al error estadístico. Compare $\frac{S}{\sqrt{20}}$ con $S_{\bar{T}}$ obtenido en b). La gaussiana obtenida ¿describe adecuadamente la distribución de los promedios $\bar{T}_i$? ¿qué probabilidad hay de que, si realizo una nueva serie de 20 mediciones, su promedio se encuentre en el intervalo (<$\bar{T}$> $\pm \frac{S}{\sqrt{20}}$)? ¿Tiene sentido decir que $\frac{S}{\sqrt{N}}$ es el error estadístico del promedio de una serie de N mediciones?

universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

Actividad 3

Volvemos a la variable aleatoria original, con N=200 mediciones

Use lo aprendido en las actividades 1 y 2 para determinar el resultado correspondiente a la serie completa, con su error: $\bar{T} \pm \Delta T$.

Recuerde que $\Delta T^2 = \Delta T_{ap}{}^2 + \sigma_e{}^2 = \Delta T_{ap}{}^2 + \left(\frac{S}{\sqrt{N}}\right)^2$

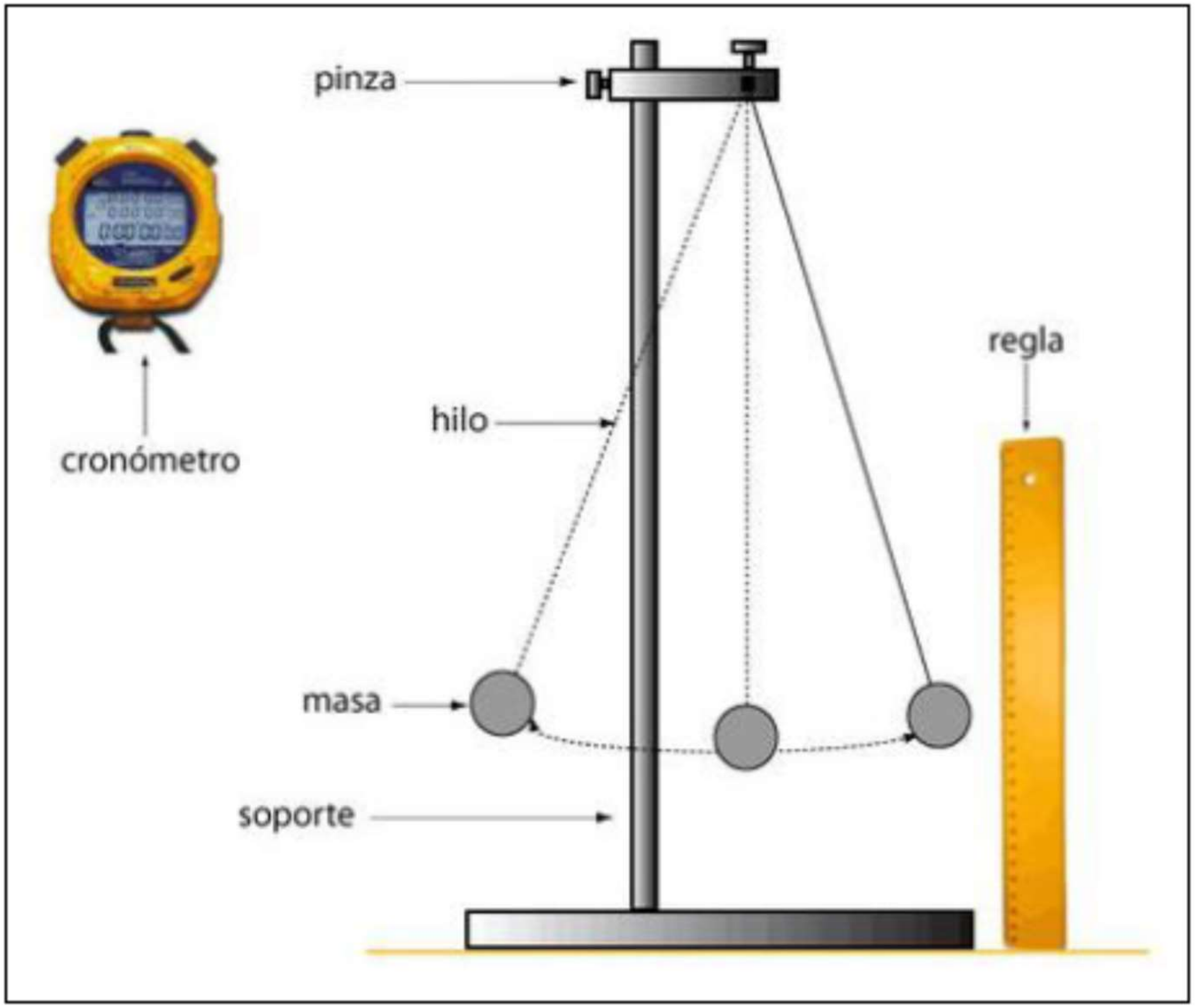
Halle el número de mediciones "óptimo", tal que $\Delta T \sim \Delta T_{ap}$. ¿Puede despreciar al error estadístico considerando sus mediciones?

universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

EXPERIMENTO

Exp. 2

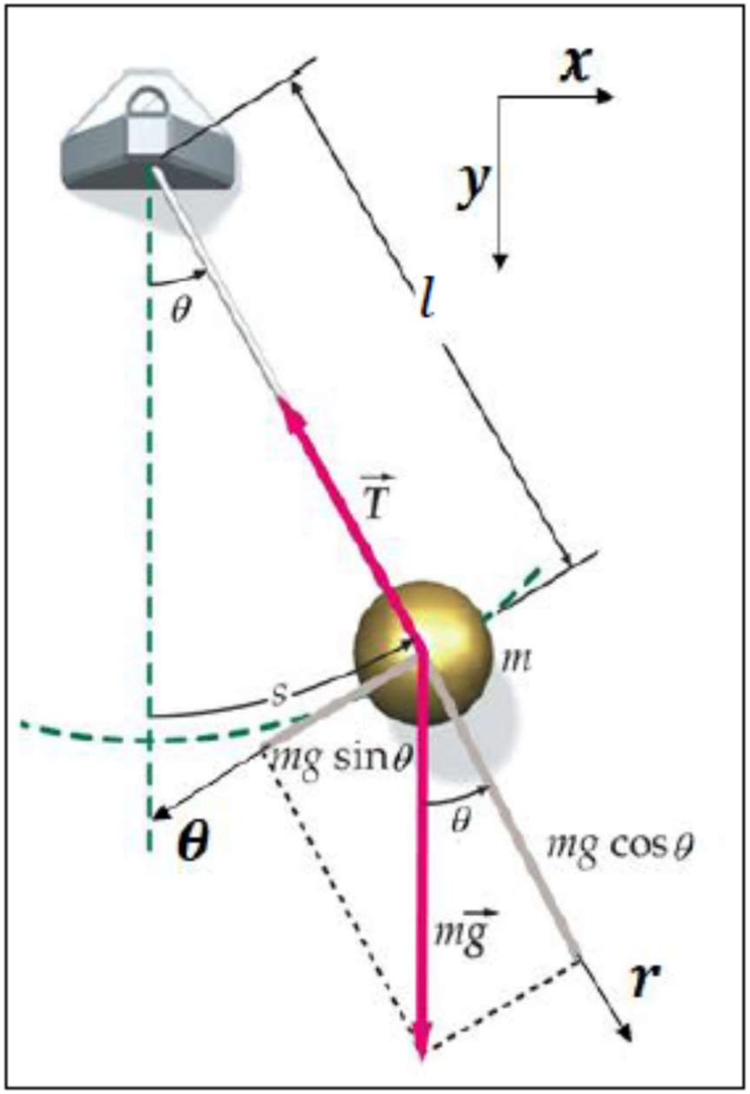
DETERMINAR EL PERÍODO DE UN PÉNDULO



universidad de buenos aires - exactos
departamento de física

Período de un Péndulo Simple

Diagrama de cuerpo libre



2da Ley de Newton: $\sum F_{ext} = ma$

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{r}}: mg\cos\theta - T = ma_r \rightarrow a_r = 0 \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}: -\cancel{m}g\,sen\theta = \cancel{m}a_\theta \rightarrow a_\theta = -g\,sen\theta \end{cases}$$

$$s = l\theta$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$a_\theta = \frac{d^2 s}{dt^2} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\,sen\theta$$

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} + g\,sen\theta = 0$$

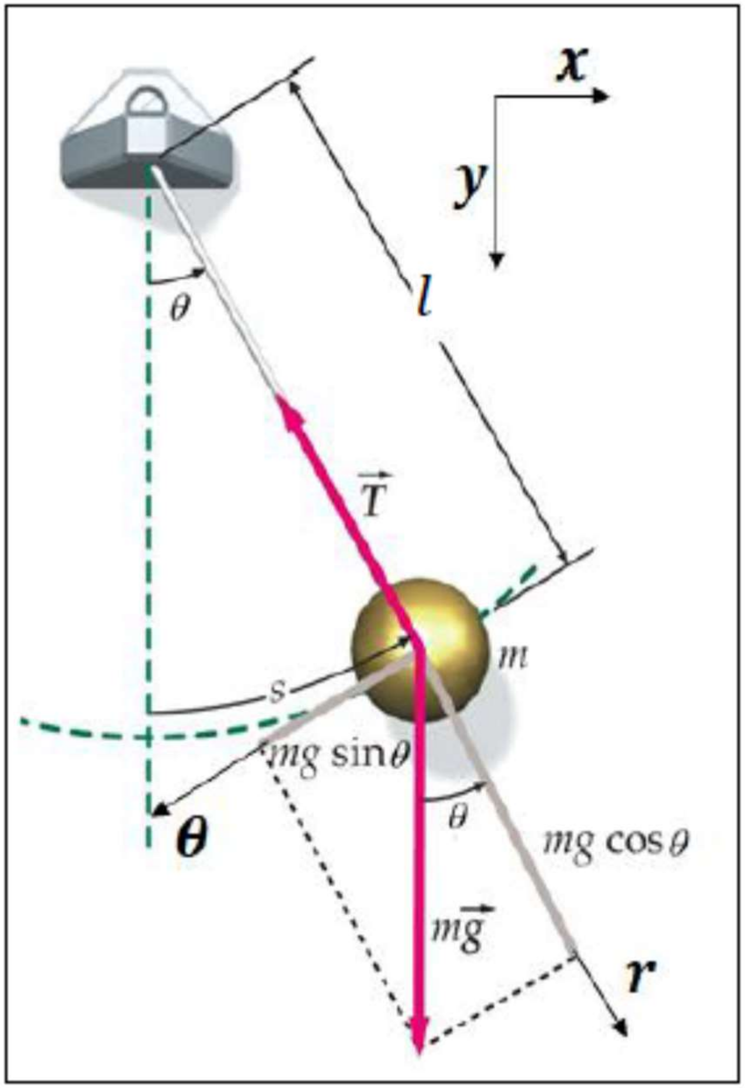
$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}sen\theta = 0}$$

Ecuación diferencias de 2do orden

universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

Período de un Péndulo Simple

Diagrama de cuerpo libre



Resolviendo la Ecuación de 2do orden

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} sen\theta = 0}$$

$\theta \ll 1 \Rightarrow sen\theta \approx \theta$ $\qquad \dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{g}{l}\theta = 0$

Solución: $\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos(wt + \varphi)}$ $\qquad \theta_0 \ll 1$

donde $w = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ $\qquad \mathrm{f} = \dfrac{w}{2\pi}$ $\qquad \mathrm{T} = \dfrac{2\pi}{w}$

Período de un péndulo de longitud *l*

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$