Laboratorio de Física 1 Turno D
1er Cuatrimestre 2024

Problema 1

Utilizando la configuración experimental de la Figura 1, se lanza un carrito (m = 100 g, determinada con error despreciable a todos los fines prácticos) sobre un plano horizontal contra un resorte que en su otro extremo cuenta con un sensor de fuerzas. A cierta distancia del resorte se mide la velocidad **v** del carrito usando un photogate. La velocidad del carrito puede considerarse constante hasta que golpea el resorte, lo comprime hasta detenerse y vuelve a salir en sentido contrario con la misma velocidad (en módulo).

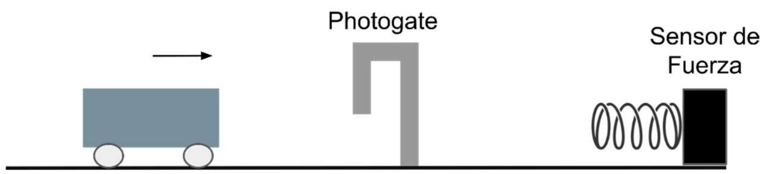


Figura 1: Configuración experimental utilizada, donde un carrito viaja a velocidad constante sobre una plataforma horizontal hasta chocar contra un resorte.

Se lanzó el carrito diez veces con velocidades diferentes. Las velocidades **v** con que fue lanzado el carrito y la máxima fuerza **F** registrada en el sensor de fuerza cada vez fueron

v (cm/s)	F máxima (N)
$10,5 \pm 0,5$	$3,30 \pm 0,08$
$12,4 \pm 0,5$	$4,10 \pm 0,10$
$14,7 \pm 0,5$	$5,13 \pm 0,12$
$20,1 \pm 1,0$	$6,92 \pm 0,22$
$23,1 \pm 1,0$	$7,55 \pm 0,29$
$25,6 \pm 1,0$	$8,43 \pm 0,35$
$30,0 \pm 1,5$	$9,76 \pm 0,49$
$31,3 \pm 1,5$	$10,32 \pm 0,53$
$33,5 \pm 1,5$	$11,4 \pm 0,61$
$39,9 \pm 2,0$	$13,28 \pm 0,86$

a) Determine la constante elástica del resorte con su error, utilizado a partir de un ajuste lineal por cuadrados mínimos de las variables que corresponda.
b) Informe el χ^2 del ajuste. Asumiendo correcto el modelo (ver ayuda), discuta si los errores fueron subestimados, sobreestimados o bien calculados.

Ayuda: En el punto de máxima compresión la fuerza es máxima y la energía cinética es igual a la potencial elástica en el resorte, entonces se cumple que:

Laboratorio de Física 1 Turno D
1er Cuatrimestre 2024

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k\Delta x^2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{F^2}{k}$$

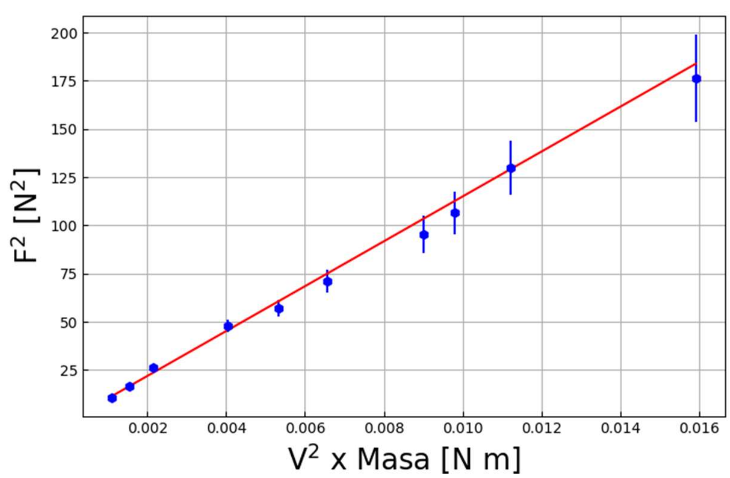
Resolución

Para realizar un ajuste lineal por cuadrados mínimos, primero debemos identificar cual es el par de variables que podemos relacionar linealmente y cómo, del ajuste, podemos extraer información de la constante elástica del resorte. Existe más de una forma de hacer esto, a continuación mostramos dos de ellas.

Si despejamos a partir de la ayuda, obtenemos la ecuación (1).

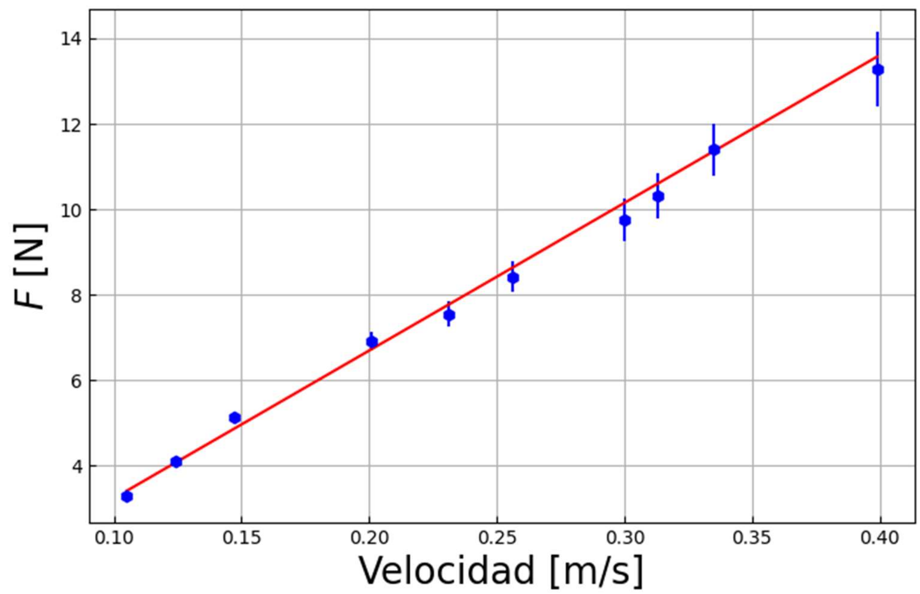
$$F^2 = kmv^2 \qquad (1)$$

se pone en evidencia que el cuadrado de la fuerza se relaciona linealmente con el cuadrado de la velocidad via un factor que es el producto de la constante elastica y la masa. Entonces, si graficamos $y=F^2$ versus $x=mv^2$, de la pendiente del ajuste por cuadrados minimos obtendremos k.



Notar que las velocidades y la masa fueron escritas en unidades del Sistema Internacional, es decir, m/s y kg, de modo que el eje x tiene N.m como unidades. Se puede anticipar que el cociente del y/x tiene unidades de N/m como corresponde a la constante elástica. El resultado para la pendiente es: (11634 ± 452) N/m.

También es posible graficar directamente Fuerza versus velocidad, como se muestra en la siguiente figura:



En este caso, la pendiente corresponde a la raiz cuadrada de el producto de la constante elástica por la masa. Esto puede verse tomando raiz cuadrada a ambos miembros de la ecuación (1). De este ajuste, se obtiene para la pendiente a = (34.6 ± 1.2) kg/s. Para obtener k es necesario elevar al cuadrado y luego dividir por 0.1 kg. Y para obtener su error, es necesario propagar el error en a a traves de la función "elevar al cuadrado".

Dejando libre la ordenada al origen de la recta, se tienen dos parámetros adjustados con 10 puntos, es decir, 8 grados de libertad (dof). En el primer caso, se obtiene que el estadístico $\chi^2 = 8.37$, (lo que con 8 dof corresponde a un p-valor de 0.29). De modo que los errores no fueron subestimados ni sobreestimados y el modelo es compatible con los datos. En el segundo ajuste se obtiene χ^2/dof =9.66 / 8, concluyendo lo mismo (por supuesto!).

Laboratorio de Física 1 Turno D
1er Cuatrimestre 2024

Problema 2

Es domingo y una canilla gotea. Aprovechando para aplicar lo aprendido en Laboratorio 1, Guillermina mide 200 veces con un cronómetro, de precisión 0,01 segundos, el tiempo entre que cae una gota y cae la siguiente. Los resultados obtenidos se pueden descargar de la Parciales de la página de la materia.

a) Realice un histograma de los resultados obtenidos por Guillermina.
b) A partir de analizar la muestra de datos experimentales, ¿qué valor reportaría para la medición del período T con que gotea la canilla? Use una cifra significativa para el error.
c) ¿Cuál sería la cantidad de mediciones N necesarias para que el error estadístico iguale al error de apreciación?
d) Si Guillermina hiciese esto los 52 domingos del año, y se guarda el promedio de la medición de cada día, para luego hacer un histograma con esos 52 promedios, ¿cuánto esperarías que sea desviación estándar de los promedios?

Resolución

a) Con los datos de la página se construye el histograma de la figura 1.

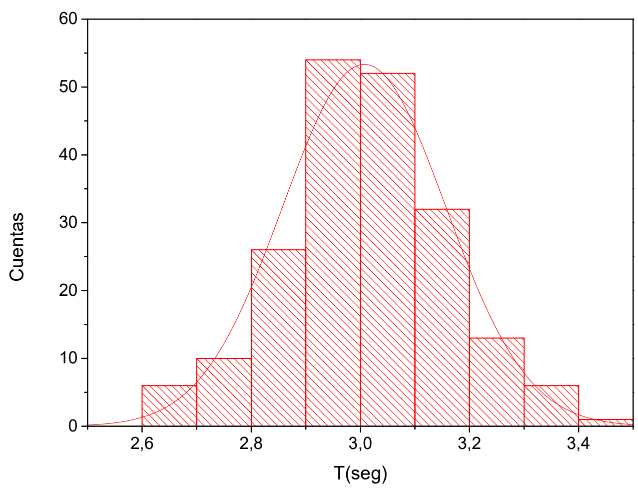


Figura 1

Se observa un histograma centrado en un único valor más probable, que decae de forma simétrica al alejarse de él, parece decaer asintóticamente a cero. Lo mencionado sugiere que la variable aleatoria es compatible con la distribución gaussiana.

Una forma de verlo, aunque no obligatoria, es superponer el gráfico de una gaussiana, como se ve en el gráfico. Eso sustenta la afirmación precedente.

b) Aca se abren un par de posibilidades.

En cuanto al valor que mejor representa a la serie en una distribución gaussiana, es el promedio, ya que este es el valor más probable o moda. La mediana, no sería el valor más adecuado dado que tenemos mucha información estadística, sin embargo, como algunos comentaron, si la distribución es gaussiana, Moda, Mediana y Media deberían tender al mismo valor. Es importante que, si uno hace esa afirmación, lo demuestre calculando y mostrando esos resultados.

En cuanto al error, si elegimos el promedio, lo más adecuado es utilizar la desviación de los promedios que se obtiene calculando la desviación estándar y dividiendo por la raíz de N, siendo N el número de mediciones (200). La justificación de esta elección es que de tomar muchas de estas series, la desviación de los promedios nos da el ancho en el cual se van a encontrar aproximadamente el 68% de ellos ($\bar{x} \pm {}^{\sigma}/_{\sqrt{N}}$).

Otra elección posible es directamente usar la desviación estándar. En este caso, estaríamos definiendo un ancho en el cuál se encuentran el 68% DE LAS MEDICIONES ($\bar{x} \pm \sigma$).

Finalmente se pide hacerlo con una cifra significativa. Con todo esto, y si elegimos la primera opción, el valor sería:

3,01 ± 0,01 seg

c) El error de apreciación es de 0,01 seg. Entonces lo único que hay que hacer es resolver:

$\frac{\sigma}{\sqrt{N}} = 0{,}01$ seg

Con σ = 0,15 seg, N da un valor de alrededor de 225.

d) Si Guillermina hiciera esto varias n veces (el 52 es arbitrario), obtendría n promedios, uno por cada serie de 200 mediciones.

La distribución de los promedios de una VA gaussiana, también es gaussiana, con una desviación estándar de

$\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ = 0,01058 seg

Con N = 200.

Laboratorio de Física 1 Turno D
1er Cuatrimestre 2024

Problema 3:

Debemos tener en cuenta dos cosas: la fórmula del volumen de un cono y qué magnitudes conocemos con sus incertezas. Con esto en mente, podemos escribir:

$$V(d,h) = \frac{\pi\, d^2 h}{12}$$

Siendo *d: diámetro* y *h: altura*.

Vamos a necesitar las derivadas parciales:

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi d^2}{12}$$

$$\frac{\partial V}{\partial d} = \frac{\pi\, h\, d}{6}$$

Además, sabemos que:

$$\Delta V^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)^2 \ (\Delta h)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial d}\right)^2 \ (\Delta d)^2$$

Dónde *todo es dato*, pues conocemos los errores con los que fueron medidos el diámetro y la altura $(\Delta d \ y \ \Delta h)$; y además, debemos evaluar las derivadas parciales en los valores más representativos. Si hacemos eso, obtenemos:

$$V = (1.180 \pm 0.020) cm^3$$

Reportando el valor con dos cifras significativas, como pide este inciso.

No era el único camino, hubo quienes trataron al radio como la mitad del diámetro y propagaron el error, esto es correcto. Lo que no es correcto es usar la expresión del volumen del cono (con el radio) y poner la precisión con la que fue medido el diámetro por ejemplo (*nunca hay que perder de vista qué magnitud se midió de forma directa y cuál calculamos indirectamente*).

Luego, para hallar la masa, sabemos que:

$$m(\rho, V) = \rho\, V$$

Dónde ρ es la densidad.

Las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial m}{\partial \rho} = V \qquad y \qquad \frac{\partial m}{\partial V} = \rho$$

Por lo que:

$$\Delta m^2 = \left(\frac{\partial m}{\partial \rho}\right)^2 \Delta\rho^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial V}\right)^2 \Delta V^2$$

Y, nuevamente, *todo es dato*. Solo resta reemplazar para obtener:

$$m = (10.57 \pm 0.17)\ g$$

Expresado con dos cifras significativas.

En este paso hubo quienes hicieron “toda la cuenta de un tirón”, expresando el volumen en términos de la altura y el diámetro, sin calcularlo previamente en una primera etapa. Esto no cambia en nada el resultado final y es igualmente válido, solo queda una expresión con tres términos para el error en la masa (pues la misma depende de la altura, el diámetro y la densidad).

A la hora de calcular el error relativo, sencillamente se debe hacer $\frac{\Delta m}{m}$, con los valores obtenidos más arriba. Esto da como resultado un error relativo de 0.016.

En el último ítem era posible, aunque no estrictamente necesario, escribir:

$$V(r,h) = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Calcular las derivadas parciales para el radio y la altura, reemplazar los valores (que eran todos dato) y comparar los ΔV obtenidos por ambos caminos. Siendo más prolijos, lo que debe compararse es el $\frac{\Delta V}{V}$ de cada uno, pues nos pregunta cuál es más preciso. ¿Cuál es?

Independientemente de la resolución aquí expresada, siempre es muy importante que *todos los pasos y las cuentas estén justificados*. Cualquier resultado que expresen, por más correcto que sea, si carece de sustento (o sea no están las cuentas o el desarrollo) no puede considerarse válido.