Laboratorio 2
Turno C

Clase 5

Ondas estacionarias transversales

(5/10/2021)

Ondas estacionarias

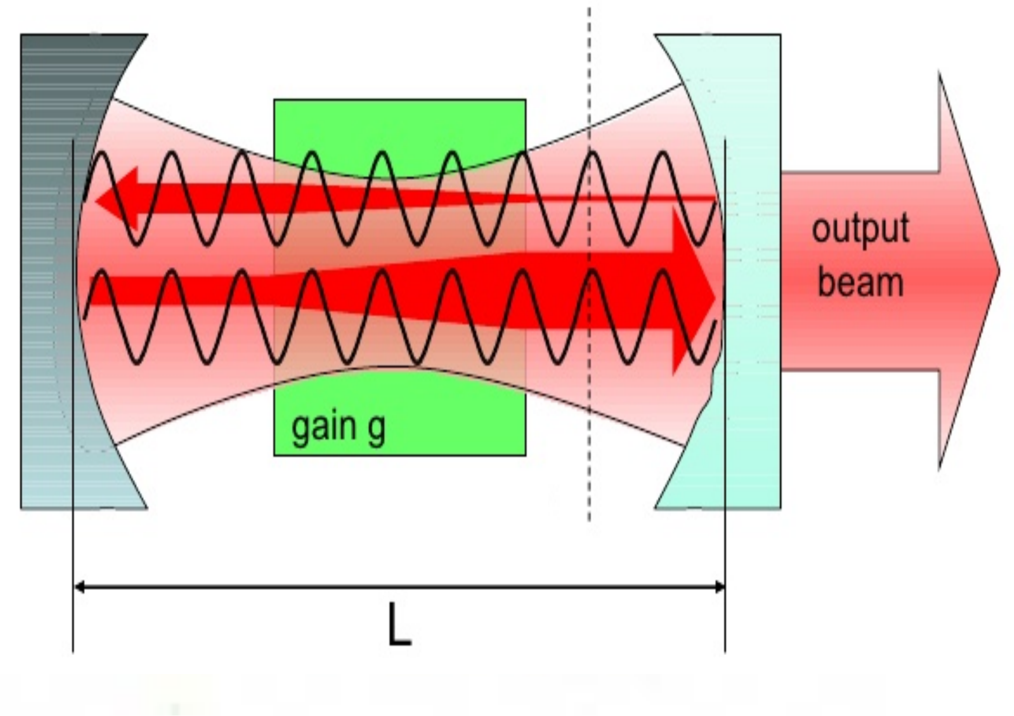
Si las ondas están confinadas espacialmente, por ej. :

Ondas en las cuerdas de un piano, guitarra, etc

Ondas sonoras en un tubo de un órgano

Ondas luminosas en una cavidad laser

Se producen reflexiones en ambos extremos ya que las ondas viajen en ambas direcciones



Esas ondas **se superponen e interfieren**.
Hay ciertas frecuencias para las cuales esta superposición lleva a una configuración de vibración estacionaria (***Ondas estacionarias***).

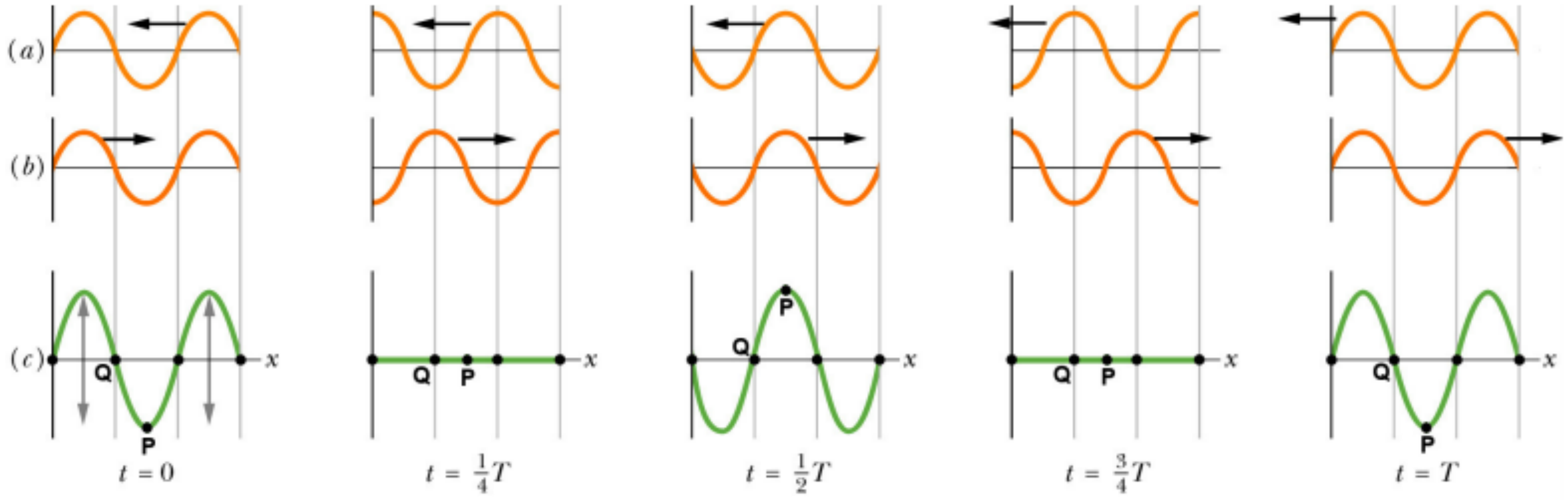


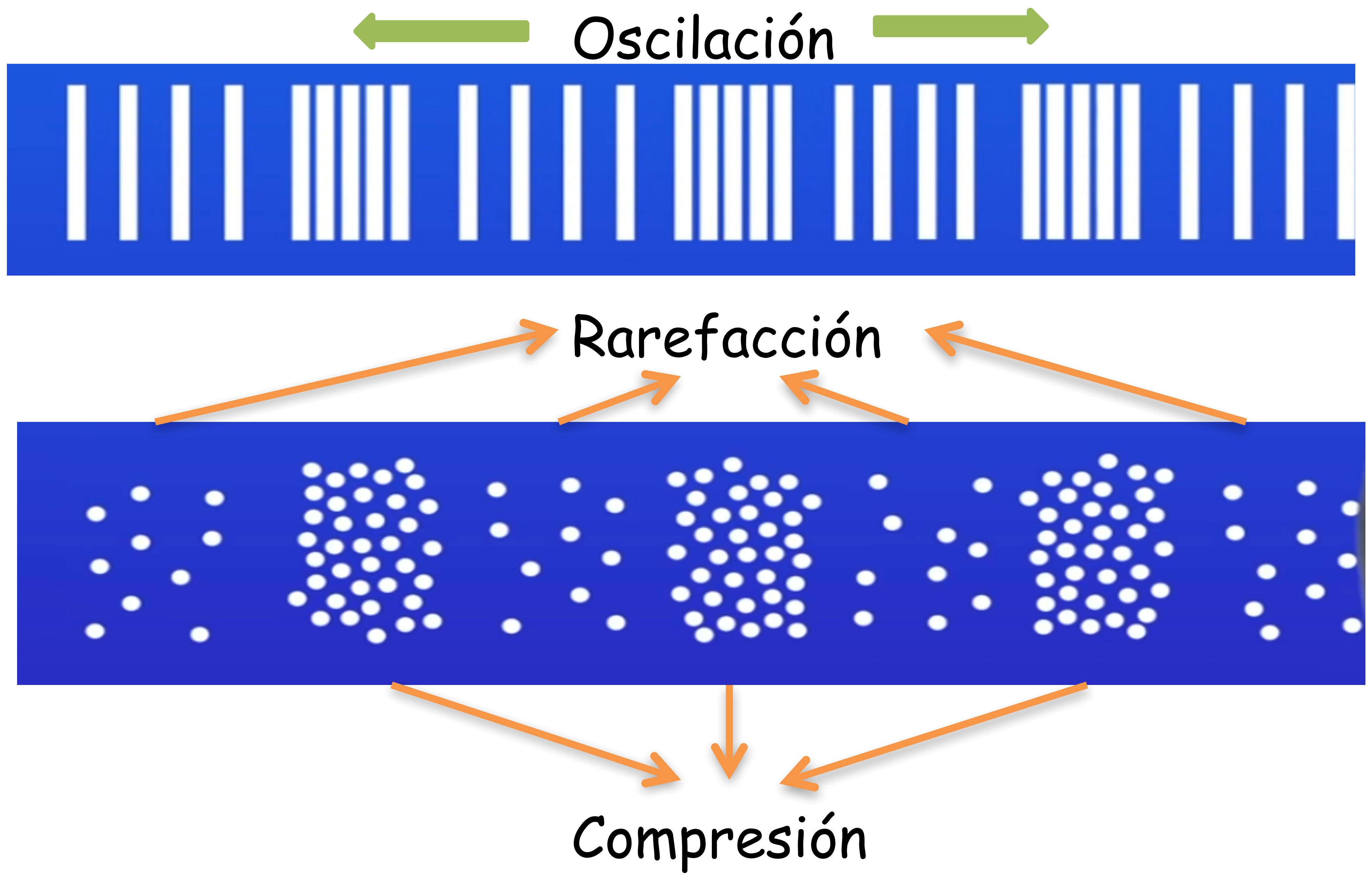
Figure 3: Two traveling waves (a) and (b) going in opposite directions generate a standing wave (c).

Ondas transversales

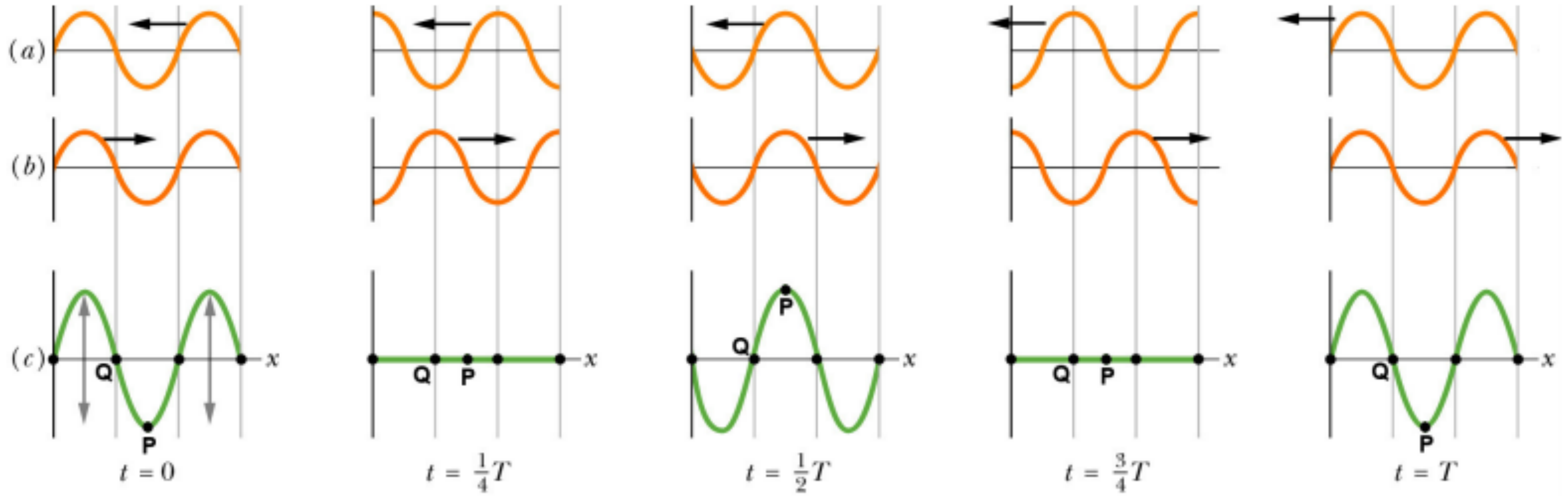
La onda se mueve hacia arriba y abajo : oscilación

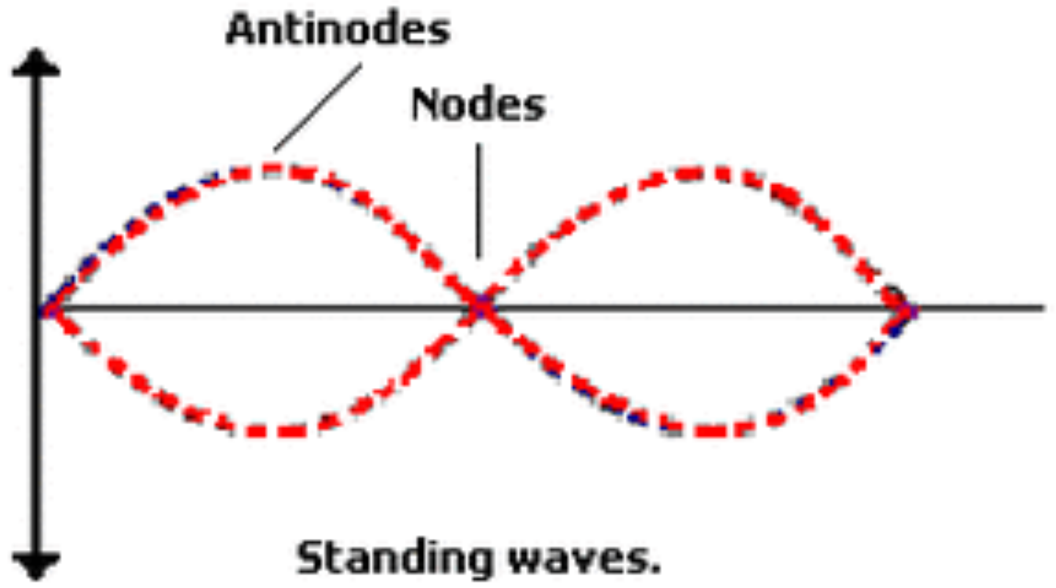
La onda oscila perpendicular a la dirección de transferencia de energía

Ondas longitudinales



La onda oscila paralela a la dirección de transferencia de energía





Si se fijan ambos extremos de una cuerda y se mueve una parte de la cuerda hacia arriba y abajo con un movimiento armónico simple de pequeña amplitud se encuentran configuraciones de onda estacionaria a ciertas frecuencias (frecuencias de resonancia).

A cada frecuencia le corresponde una función de onda y es un modo de vibración.

Existen ciertos puntos de la onda estacionaria donde no hay movimiento que son llamados **nodos**.

En el punto medio entre dos nodos se da el sitio de máximo movimiento : **antinodos**.

En los extremos fijos de la cuerda hay nodos.
Si un extremo está fijo y el otro sometido a un oscilador será considerado un nodo porque su amplitud de vibración es mucho más pequeña que la del antinodo.

La frecuencia más baja es la frecuencia fundamental $\mathbf{f_1}$, que produce el modo fundamental (o primer armónico).

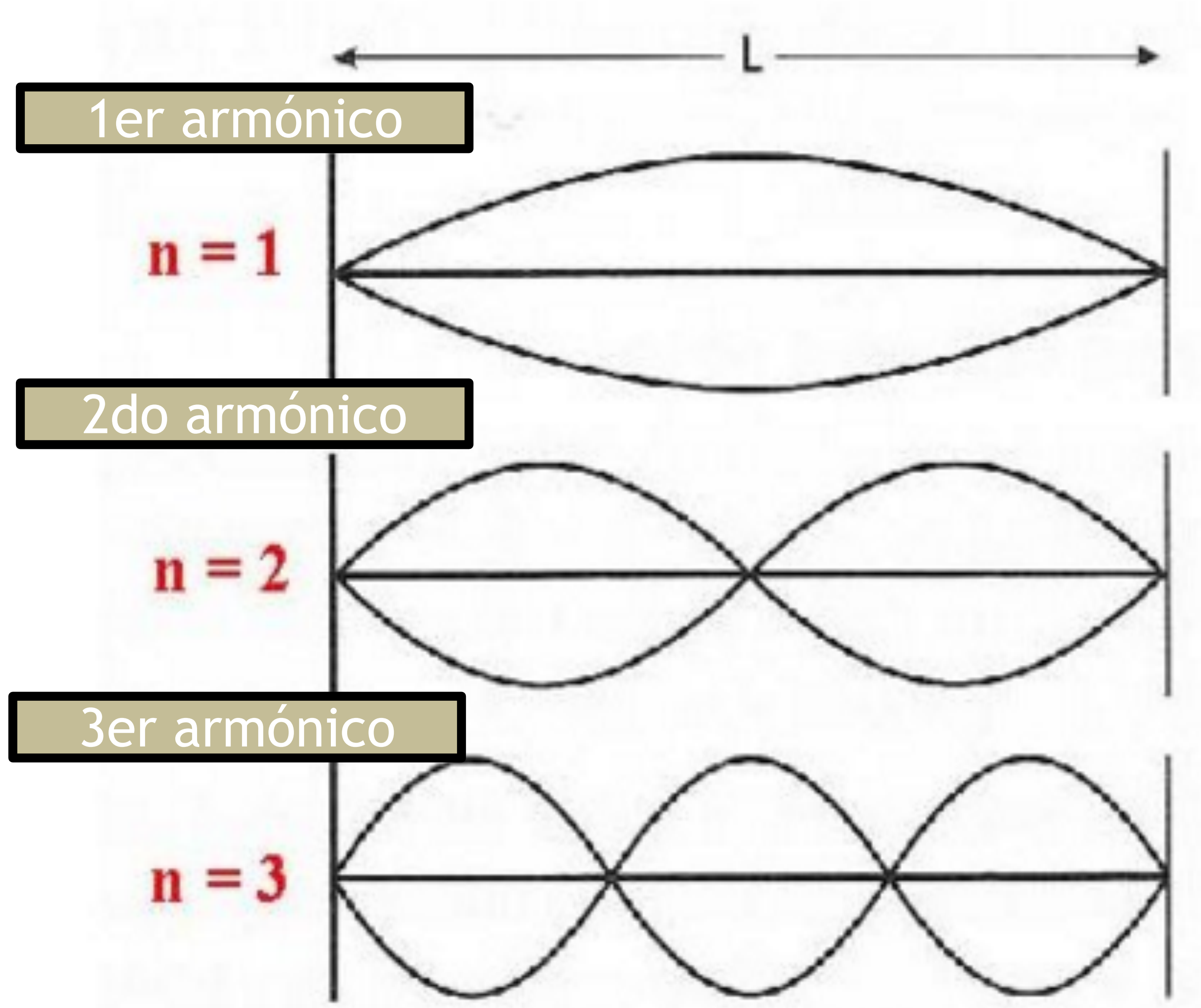
El segundo modo (segundo armónico) se produce al doble de frecuencia que el fundamental $\mathbf{f_2}$.

El tercer modo de vibración se produce al triple de frecuencia de la fundamental $\mathbf{f_3}$.

El conjunto de todas las frecuencias resonantes se llama **espectro de frecuencias de resonancia de la cuerda**.

$\lambda_n = \frac{2}{n}L$ $\quad f_n = \frac{v}{\lambda_n}$

v es la misma velocidad para todo n



½ onda

$\lambda_1 = \frac{2}{1}L \quad f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2L}$

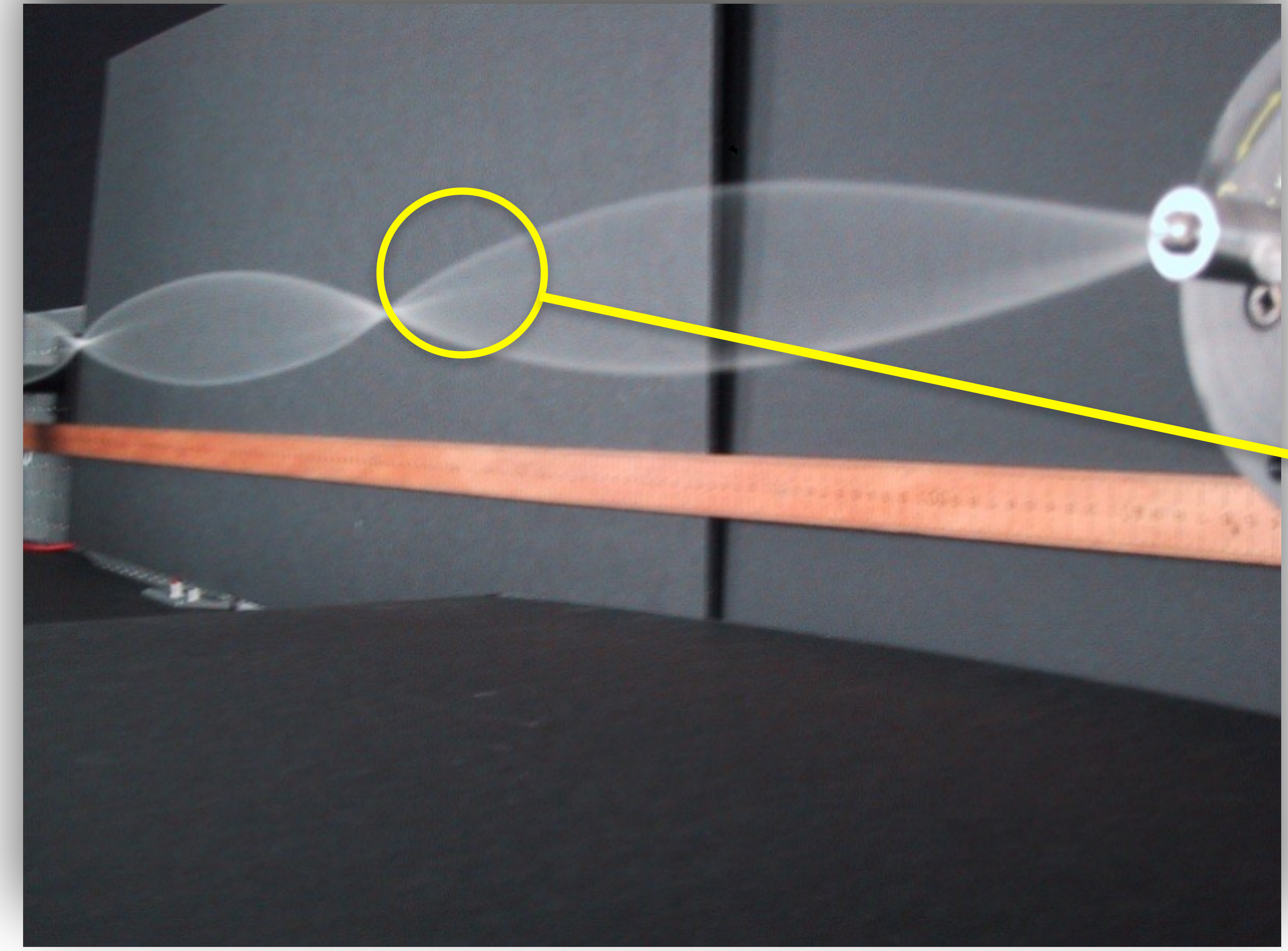
Dos ½ ondas

$\lambda_2 = \frac{2}{2}L \quad f_2 = \frac{v}{\lambda_2} = \frac{v}{L} = 2f_1$

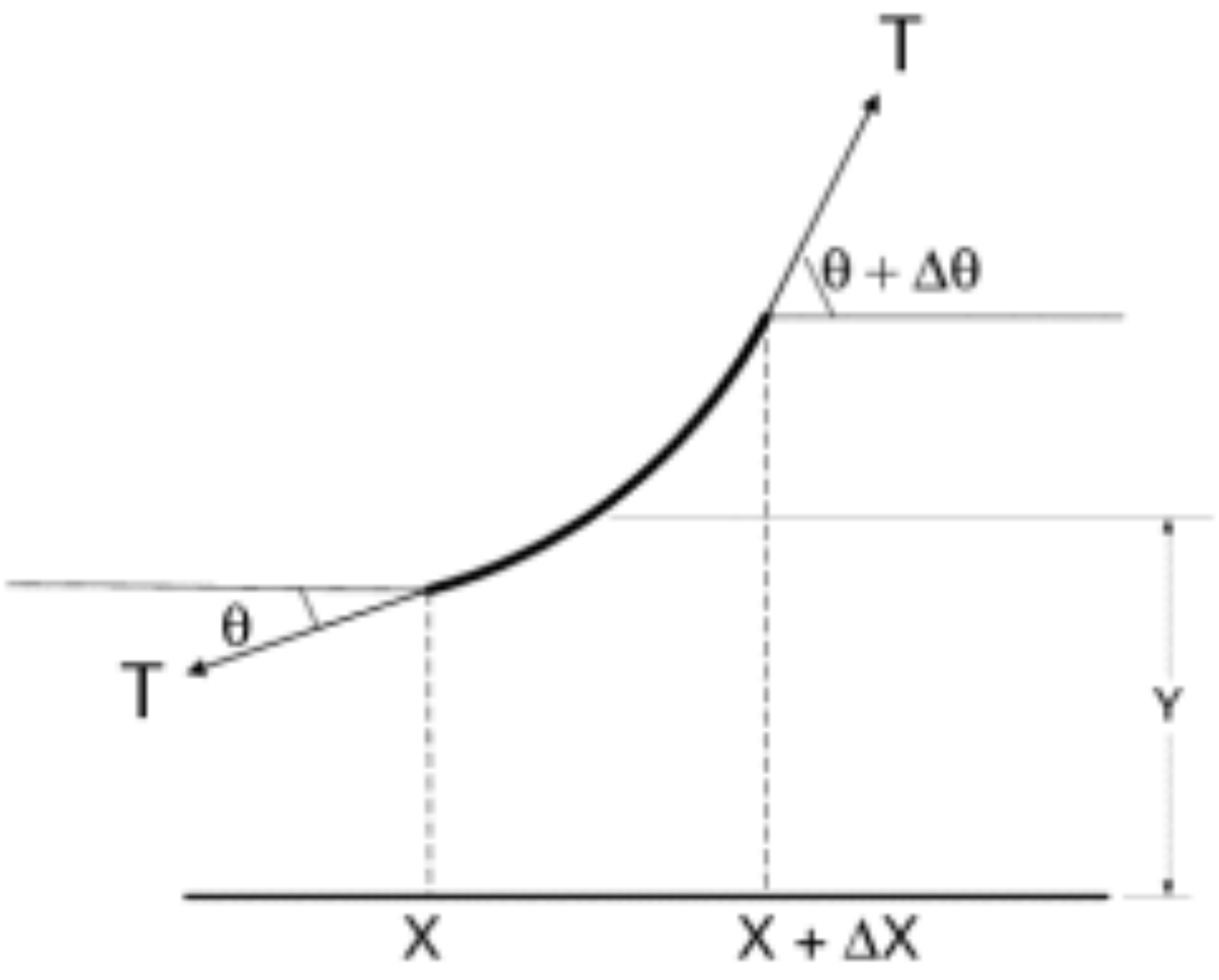
Tres ½ ondas

$\lambda_3 = \frac{2}{3}L \quad f_3 = \frac{v}{\lambda_3} = \frac{v}{2/3L} = 3f_1$

Ondas transversales en una cuerda tensa



Tensión a la que está sometida la cuerda



$$F_y = T\ sen(\theta + \Delta\theta) - T\ sen\ \theta$$

$$F_x = T\ \cos(\theta + \Delta\theta) - T\ \cos\ \theta$$

Admitiendo *y* pequeño
y ángulos pequeños

$$F_y = T(\theta + \Delta\theta) - T\theta$$

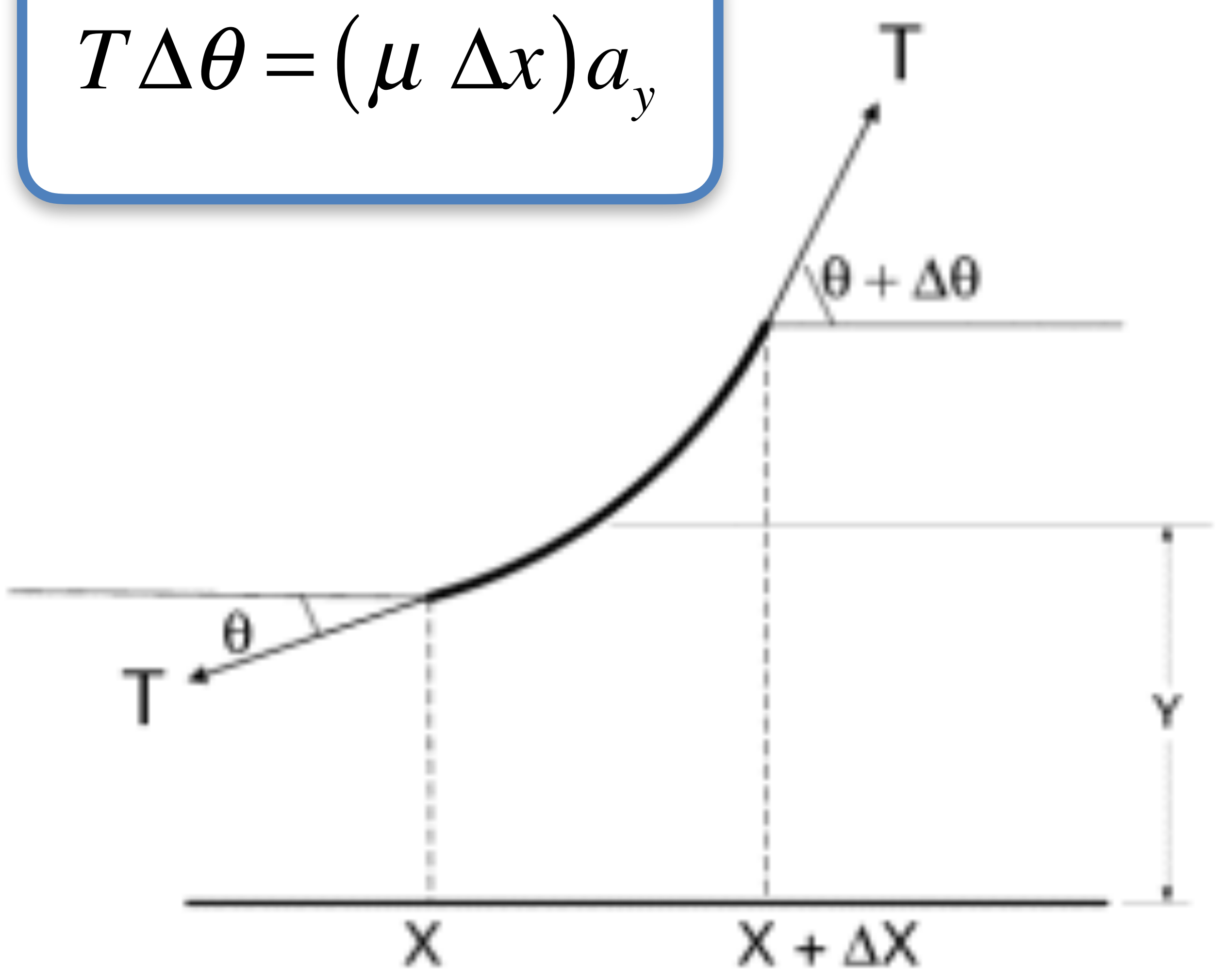
$$F_x = 0$$

$$F_y = T\Delta\theta \quad \begin{cases} T\Delta\theta = m a_y \\ T\Delta\theta = (\mu\ \Delta x) a_y \end{cases}$$

$$m = \mu\ \Delta x$$

Densidad lineal

$$T\Delta\theta = (\mu\ \Delta x)a_y$$



$$\frac{\partial y}{\partial x} = \tan\theta \qquad \frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial \theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x} \approx \left(\frac{\Delta \theta}{\Delta x}\right)\frac{\partial}{\partial \theta}$$

derivando de nuevo

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \left(\frac{\Delta \theta}{\Delta x}\right)\frac{\partial}{\partial \theta}\cdot(\tan\theta) \longrightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x = \sec^2\theta\ \Delta\theta \xrightarrow{(\theta \text{ pequeño})} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x \approx \boxed{\Delta\theta}$$

$$T\,\boxed{\Delta\theta} = (\mu\ \Delta x)a_y$$

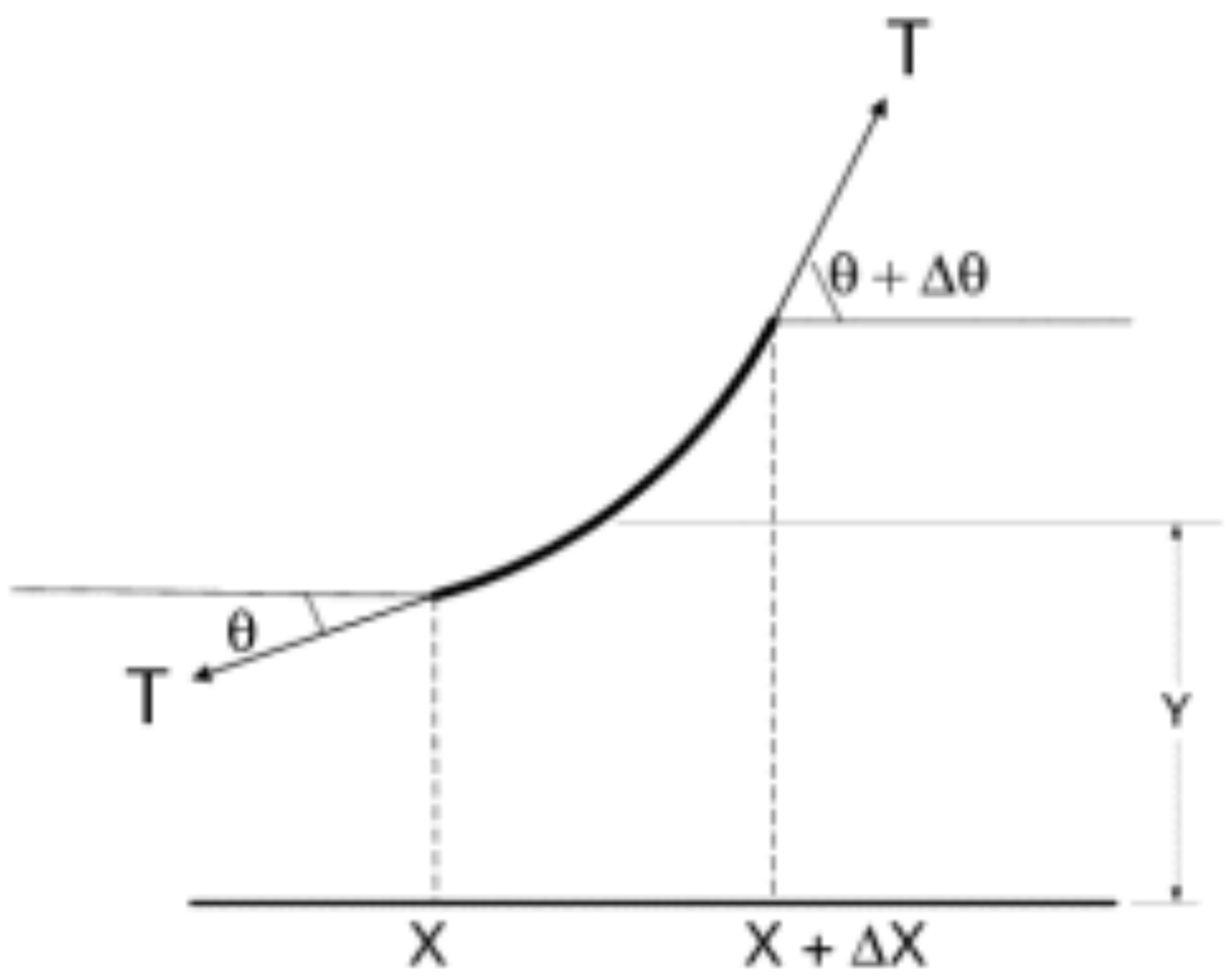
$$T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x = (\mu\ \Delta x)a_y \xrightarrow[a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}]{} T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x = (\mu\ \Delta x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \longrightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \boxed{\frac{\mu}{T}}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$v = \left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/2}$$

Velocidad con que las ondas progresivas recorren una cuerda de densidad lineal μ al aplicarle una tensión T

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Ec. de onda



$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad v = \left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/2}$$

Ec. diferencial de orden 2 en derivadas parciales

$$y(x,t) = g(x)\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\varphi = 0$$

$$\underbrace{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 g(x)\cos(\omega t) \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d^2 g(x)}{dx^2}\cos(\omega t)}$$

$$\frac{d^2 g(x)}{dx^2}\cancel{\cos(\omega t)} = -\frac{\omega^2}{v^2} g(x)\cancel{\cos(\omega t)} \qquad (*)$$

Se propone una solución armónica $g(x) = A \cdot sen(bx)$ $\longleftarrow$ $\frac{d^2 g(x)}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} g(x)$

Ec.diferencial de un oscilador armónico (la variable es la posición y no el tiempo)

reemplazando en (*)

$$\frac{d^2 g(x)}{dx^2} = -Ab^2 sen(bx) \longrightarrow -\cancel{A}b^2 \cancel{sen(bx)} = -\cancel{A}\frac{\omega^2}{v^2}\cancel{sen(bx)} \longrightarrow b = \frac{\omega}{v}$$

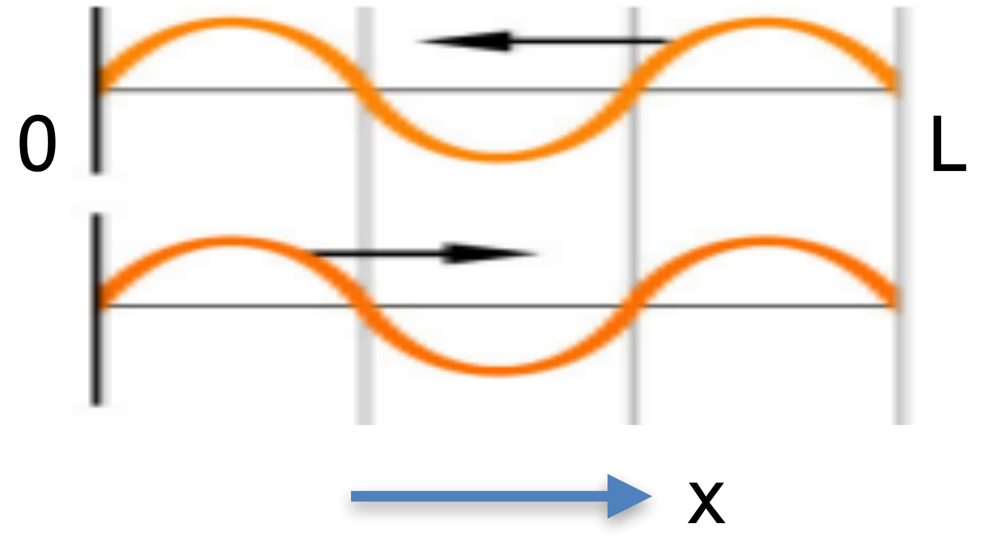
$$g(x) = A\ sen(\frac{\omega}{v}x)$$

Condiciones de contorrno

deplazamiento nulo en los extremos de la cuerda (en x = 0 y x=L)

$$\longrightarrow 0 = A\ sen(\frac{\omega}{v}L) \qquad \frac{\omega}{v}L = n\pi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega = 2\pi \cdot f \\ f_n = \dfrac{nv}{2L} \end{array} \right.$$



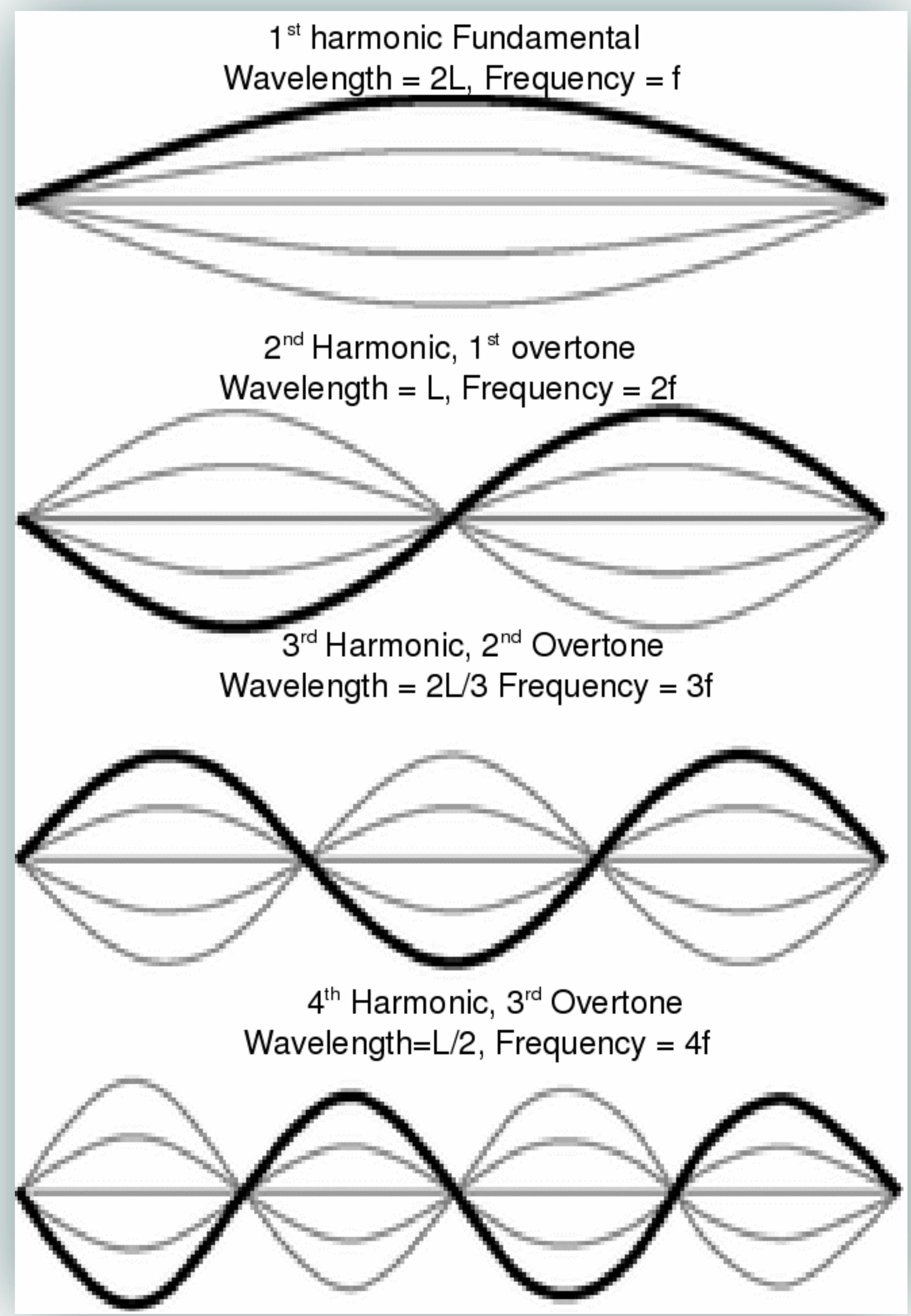
$$\xrightarrow{v = \left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/2}} \quad \boxed{f_n = \frac{n}{2L}\left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/2}}$$

$$f_n = \frac{nv}{2L}$$

Relación de dispersión $\quad f_n = \frac{v}{\lambda_n}$ $\quad \Bigg\} \quad \lambda_n = \frac{2L}{n}$

La descripción completa del movimiento de la cuerda :

$$y(x,t) = A_n sen\left(2\pi \frac{x}{\lambda_n}\right)\cos(\omega t)$$



<u>Otra condición de contorno</u>

$x = L$ *cuerda fija*

$x = 0$ *vibración transversal con frecuencia arbitraria y amplitud B*

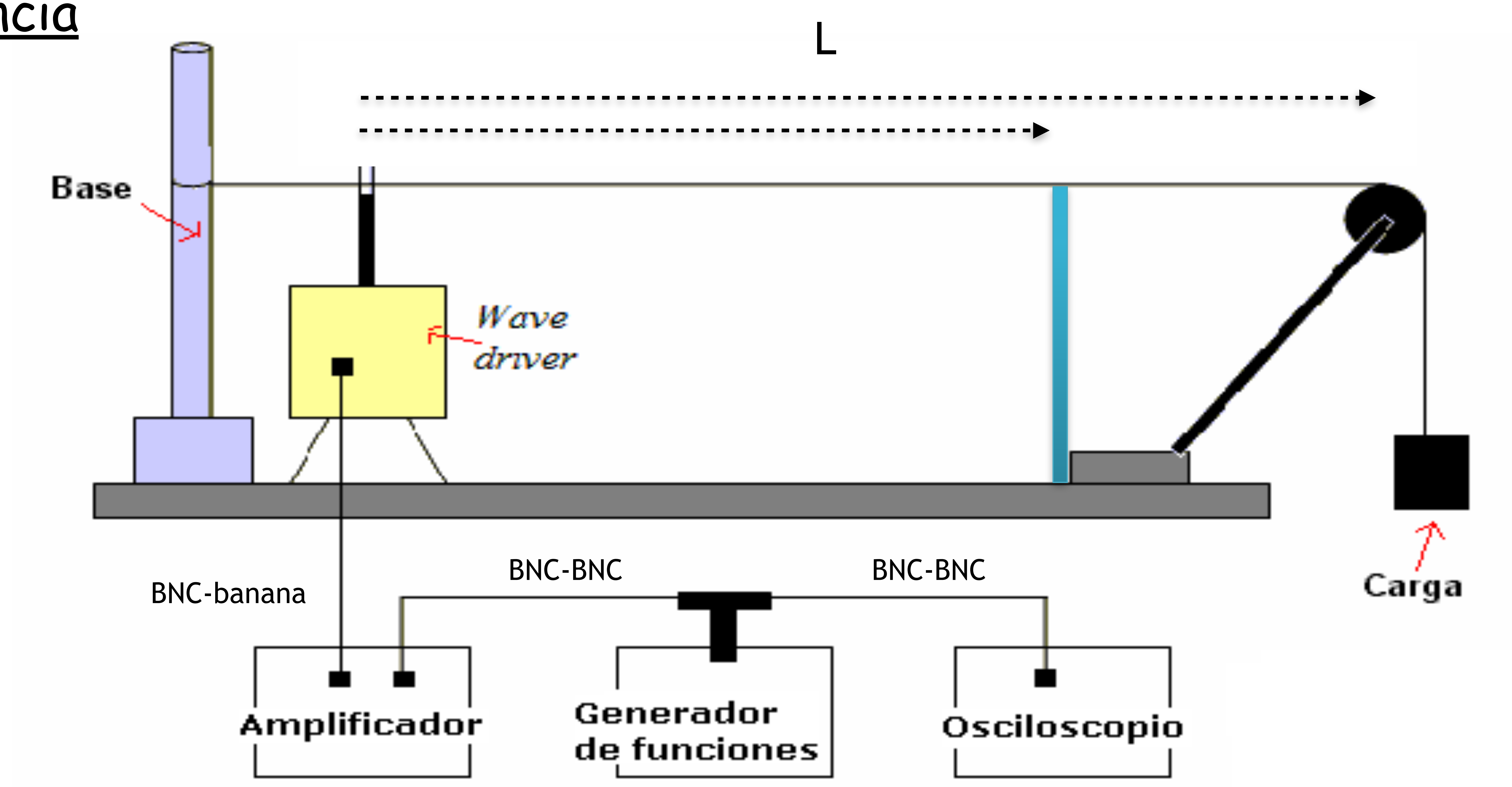
$$\left.\right\} \quad \begin{aligned} y(0,t) &= B\cos(\omega t) \\ y(L,t) &= 0 \end{aligned}$$

Si se resuelve la ec. de onda con estas condicones se obtiene

$$A = \frac{B}{sen\left(p\pi - \frac{\omega L}{v}\right)} \qquad p = entero$$

lo que implica que la respuesta será máxima cerca de las frecuencias naturales del sistema

Experiencia



BNC-banana

1. Estimar la densidad lineal de la cuerda.
   - Medir la longitud lo de una cuerda de nylon.
   - Medir el diámetro de la cuerda con micrómetro.
   - Pesar la cuerda con una precisión de 0,1 mg.
   - Calcular la densidad lineal $\mu = m/l_o$
   - Calcular la densidad
2. Para una dada carga, obtener la frecuencia de 5 modos normales de la cuerda
3. Calcular la velocidad de propagación usando la relación de dispersión. $v_{rd} = \lambda_n f_n$
4. Comparar con la velocidad de propagación del modelo. $v = \left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/2}$
5. Repetir para 5 cargas diferentes
6. Repetir para otra cuerda con distinta densidad lineal.

¿ PREGUNTAS ?