Laboratorio 2

Turnos A/B/C

Clase 8

Resonadores de Helmholtz

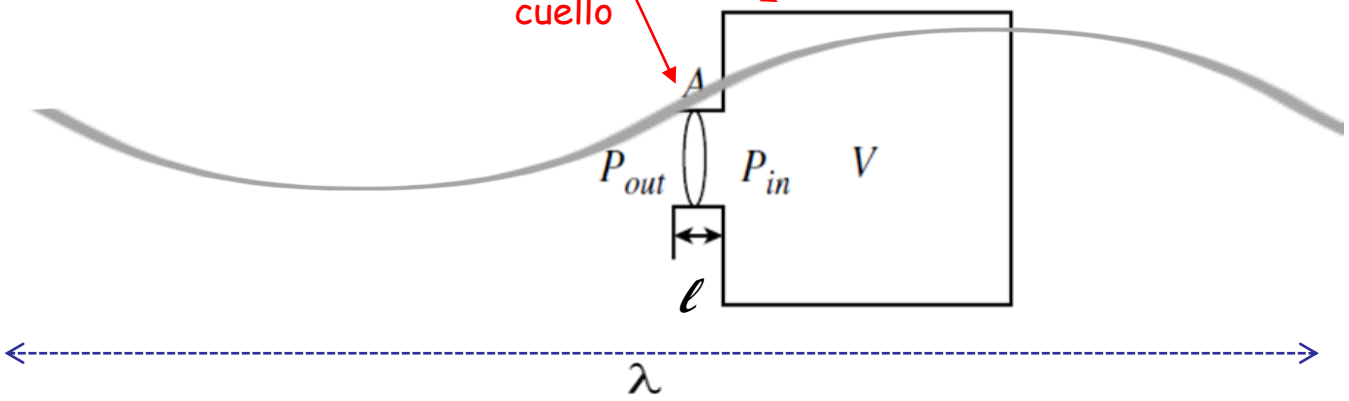
2°C 2021

Características de ondas sonoras en espacios pequeños

- ✓ Un espacio acústicamente pequeño es aquel cuya longitud o tamaño representativo es pequeño en relación con la longitud de onda que propagamos en el mismo.
- ✓ Las ondas sonoras en este espacio tienen características únicas; las características dinámicas de un medio que se mueve en el espacio (por ejemplo, presión y velocidad de partículas) pueden considerarse relativamente constantes.
- ✓ En otras palabras, todo el medio no está dominado por las propiedades de propagación de las ondas sonoras, sino que se mueve en la misma fase.
- ✓ Por tanto, un espacio acústicamente pequeño se puede considerar generalmente como un sistema vibratorio.
- ✓ Un buen ejemplo de esto es el Resonador de Helmholtz.

Resonador simple

$V << \lambda^3 \longrightarrow \lambda >> V^{1/3}$



- ✓ Si λ es mayor que las dimensiones del cuello y cuerpo , los movimientos del fluido interior estarán en fases casi idénticas.

El cambio de presión (P_{in}) por unidad de tiempo inducirá un cambio de volumen en la cavidad V del resonador.

Si los cambios de presión y el volumen son lo suficientemente pequeños como para linealizarse.

$$\frac{dp}{dt} \propto -\frac{dV}{dt}$$

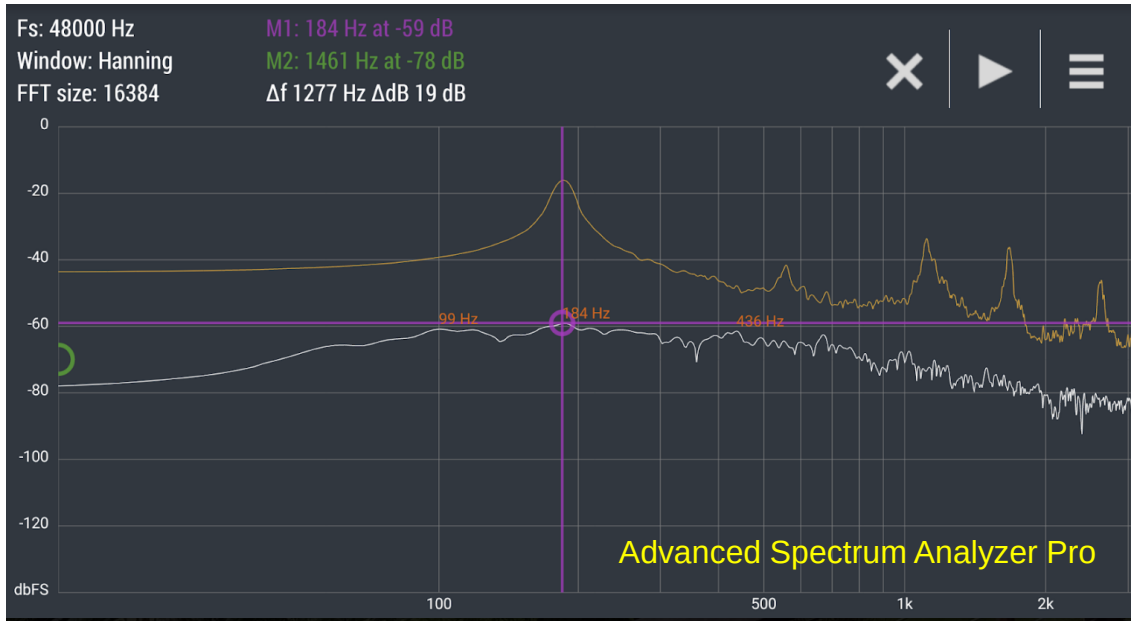
Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821 - 1894)

Vamos a ver una experiencia que podemos hacer en casa

- ✓ Los resonadores de Helmholtz se basan en el artefacto acústico conocido como cavidad de Helmholtz.
- ✓ Es una cavidad con un orificio en el extremo de un cuello (como una botella) en cuyo interior el aire se comporta como una masa resonante.
- ✓ Un resonador ideal consiste en una cavidad de volumen V con un cuello de área A y de longitud ℓ.
- ✓ Si la longitud de onda λ es mucho más grande que sus dimensiones ℓ, $A^{1/2}$ y $V^{1/3}$, el aire del cuello se mueve como un bloque de masa m.

¿Qué sucede cuando soplamos dentro de un botella por su borde?

El sonido introducido (soplido) contiene un amplio rango de frecuencias, pero la botella produce resonancia a una cierta frecuencia, menor (más grave) cuanto más vacía se encuentre (pues el volumen en su interior es mayor).



Por ejemplo, la botella vacía que estoy usando tiene una frecuencia de resonancia de 184 Hz

Relación de dispersión

$$\omega = v_p k$$

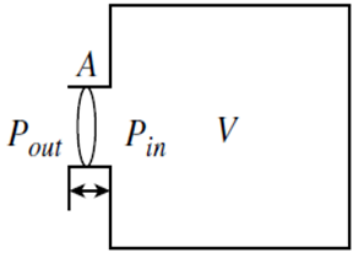
$$v_p = f\lambda \longrightarrow \lambda = \frac{343{,}2\ m/s}{184\ 1/s} = 1{,}86\ m$$

λ es bastante mayor que la dimensión de la botella

Modelicemos esta experiencia

$$\frac{dp}{dt} \propto -\frac{dV}{dt}$$

Destaca la correlación entre la presión y el volumen.



Debe reescribirse utilizando variables que expresen el movimiento del fluido (es decir, fuerza, desplazamiento y velocidad, etc.) para observar cómo se comporta el fluido en el cuello y la cavidad

La variación de volumen con respecto al tiempo en la cavidad se puede escribir

$$\frac{dV}{dt} = -Au(t)$$

área

velocidad del fluido en el cuello

Cuando se aplica una presión desde el cuello de la botella el volumen del fluido interno se comprime

$$\frac{dp}{dt} \propto -\frac{dV}{dt}$$

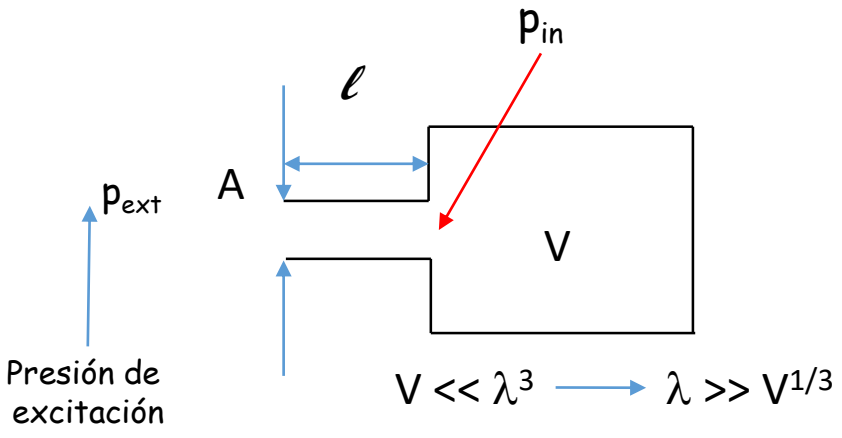
Queremos transformar esta proporcionalidad a una igualdad. Encontrar una constante.

$$C_A \frac{dp}{dt} = -\frac{dV}{dt}$$

$$C_A \frac{dp}{dt} = Au(t)$$

Miremos las unidades C_A → Cambio de Vol/u. presión

Complianza



Consideremos el movimiento fluido en el cuello inducido por la presión de la onda sonora.

El balance entre la presión sonora que actúa sobre el fluido en el cuello y el impulso del fluido se puede formular :

Planteando Newton

$$\underbrace{(p_{ext} - p_{in})\cancel{A}}_{\text{fuerza}} = \underbrace{\rho_o \ell \cancel{A}}_{\text{masa}} \frac{du}{dt}$$

densidad

aceleración

Obviamente $p = p_{in}$

Recordemos

$$C_A \frac{dp}{dt} = Au(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} C_A \frac{d^2p}{dt^2} = A\frac{du}{dt} \longrightarrow p_{ext} = p + \rho_o \ell \frac{C_A}{A}\frac{d^2p}{dt^2}$$

La ecuación muestra como la presión del sonido justo dentro del cuello (p_{in}) reacciona a la presión del sonido de excitación (p_{ext}) fuera del cuello.

Un cambio de presión en el sistema inducirá un cambio en la densidad, así como otras variables termodinámicas, como la entropía.

Esto nos lleva a postular que la presión acústica es función de la densidad y la entropía

$$p = p(\rho, s)$$

entropía

$$dp = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_s d\rho + \cancel{\left.\frac{\partial p}{\partial s}\right|_\rho ds}.$$

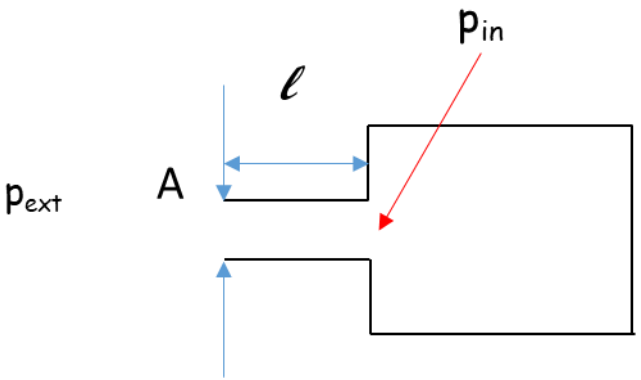
El fluido obedece a la ley de los procesos isentrópicos cuando oscila dentro del rango de la frecuencia audible: 20 Hz-20 kHz.

Un cambio de presión provoca un cambio de densidad y de entropía

La relación entre la velocidad del sonido, la presión y la densidad de un gas

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \xrightarrow{\text{derivando}} \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right]_{ise} = \frac{c^2}{\gamma}$$

γ : Coeficiente adiabático (1,4 en aire)



Presión de excitación

$$p + \rho_o \ell \frac{C_A}{A} \frac{d^2p}{dt^2} = p_{ext}$$

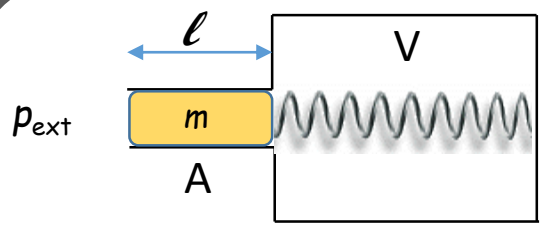
(*) Ecuación diferencial de 2° orden

Es parecido al sistema de una masa *m* con un resorte de constante *k* con un forzante (p_{ext})

$$m\ddot{x} + kx = F(t)$$

Podemos calcular las frecuencia natural de este sistema

Podemos plantear la solución $x(t) = X_o e^{-j\omega t}$ $\quad (-m\omega_n^2 + k) = 0 \quad \omega_n^2 = \frac{k}{m}$



Es parecido al sistema de una masa *m* (en el cuello del sistema) y un volumen V que hace las veces del resorte.

Entonces por la similitud con la ec.(*)

$$\omega_n^2 = \frac{1}{C_A \frac{\rho_o \ell}{A}} = \frac{A}{C_A \rho_o \ell}$$

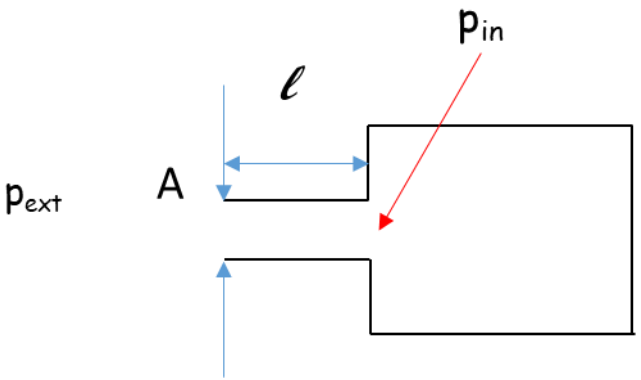
Conservación de masa

$$\rho_o V = (\rho_o + \Delta\rho)(V + \Delta V) \qquad \cancel{\rho_o V} = \cancel{\rho_o V} + \boxed{\rho_o \Delta V + V\Delta\rho} + \cancel{\Delta\rho \Delta V}$$

Orden superior

$$\rho_o \Delta V = -V\Delta\rho \longrightarrow \rho_o \frac{dV}{dt} = -V\frac{d\rho}{dt}$$

Para un período corto de tiempo *dt*



$$\rho_o \frac{dV}{dt} = -V \frac{d\rho}{dt}$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right]_{ise} = \frac{c^2}{\gamma}$$

$$\rho_o \frac{dV}{dt} = -V \frac{\gamma}{c^2} \frac{dp}{dt}$$

Recordando $\quad C_A \frac{dp}{dt} = -\frac{dV}{dt} \longrightarrow \boxed{C_A = \frac{\gamma V}{\rho_o c^2}}$

Anteriormente encontramos

$$\omega_n^2 = \frac{1}{C_A \frac{\rho_o \ell}{A}} = \frac{A}{C_A \rho_o \ell} \Longrightarrow \omega_n^2 = \frac{A}{\frac{\gamma V}{\cancel{\rho_o} c^2} \cancel{\rho_o} \ell} = \frac{A c^2}{\gamma V \ell}$$

$$\omega = c\sqrt{\frac{A}{\gamma V \ell}} \Longrightarrow f = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{A}{\gamma V \ell}}$$

$$c = 2\pi f \sqrt{\frac{\gamma V \ell}{A}}$$

- Si el volumen es grande, la frecuencia cae.
- Si el cuello el largo, la frecuencia cae.
- Si el área del cuello es grande la frecuencia crece

$$\omega_n^2 = \frac{1}{C_A \frac{\rho_o \ell}{A}} = \frac{A}{C_A \rho_o \ell}$$

$\sim k$

Inercia acústica = masa/A^2

$$C_A = \frac{\gamma V}{\rho_o c^2}$$

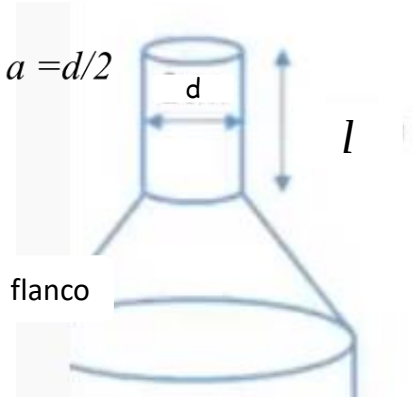
Esta ecuación muestra que la frecuencia de resonancia de un resonador está gobernada por la masa del sistema y la constante del resorte (inversamente proporcional a la compliancia acústica C_A) como en el caso de un oscilador mecánico.

Además, la masa (inercia acústica) y la constante elástica (elasticidad acústica) están completamente determinadas por el tamaño del cuello del resonador y el tamaño de la cavidad.

Esto se debe a ($\lambda \gg V^{1/3}$).

Esto hace que todo el fluido en el cuello se mueva en la misma fase y que el volumen en la cavidad sostenga todo el fluido en el cuello como una especie de elemento de resorte.

Si el diámetro del cuello es considerablemente más pequeño que la longitud de onda, la longitud efectiva (incluida la corrección del extremo) del cuello se puede expresar dependiendo de si tiene un reborde o no:



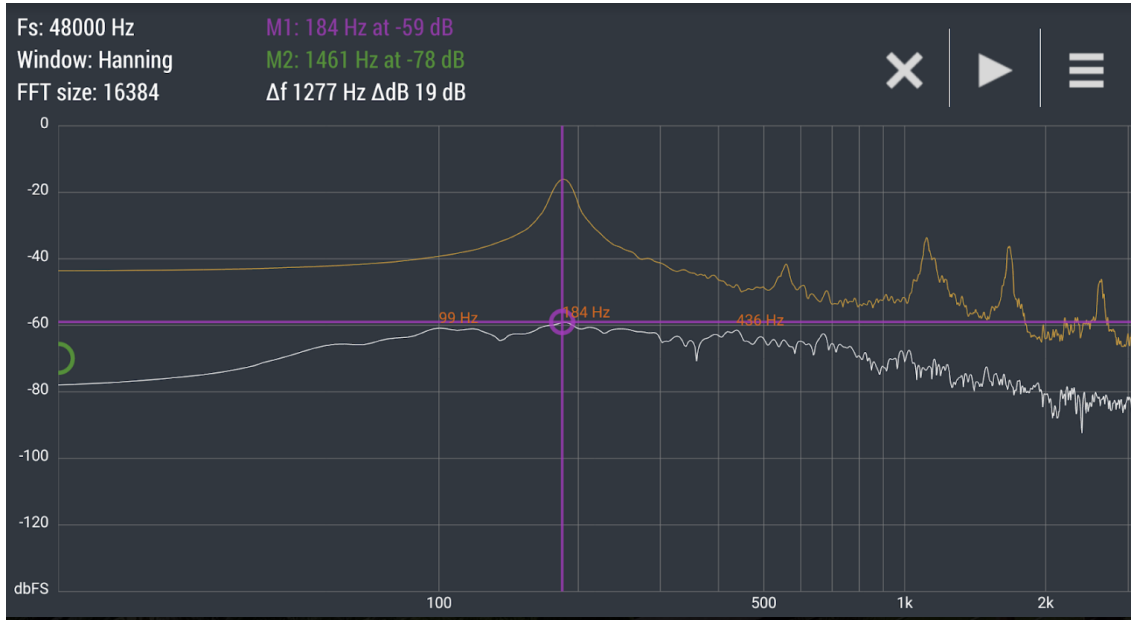
$$l' = l + 0.85a \qquad \text{Con flanco}$$

$$l' = l + 0.6a \qquad \text{sin flanco}$$

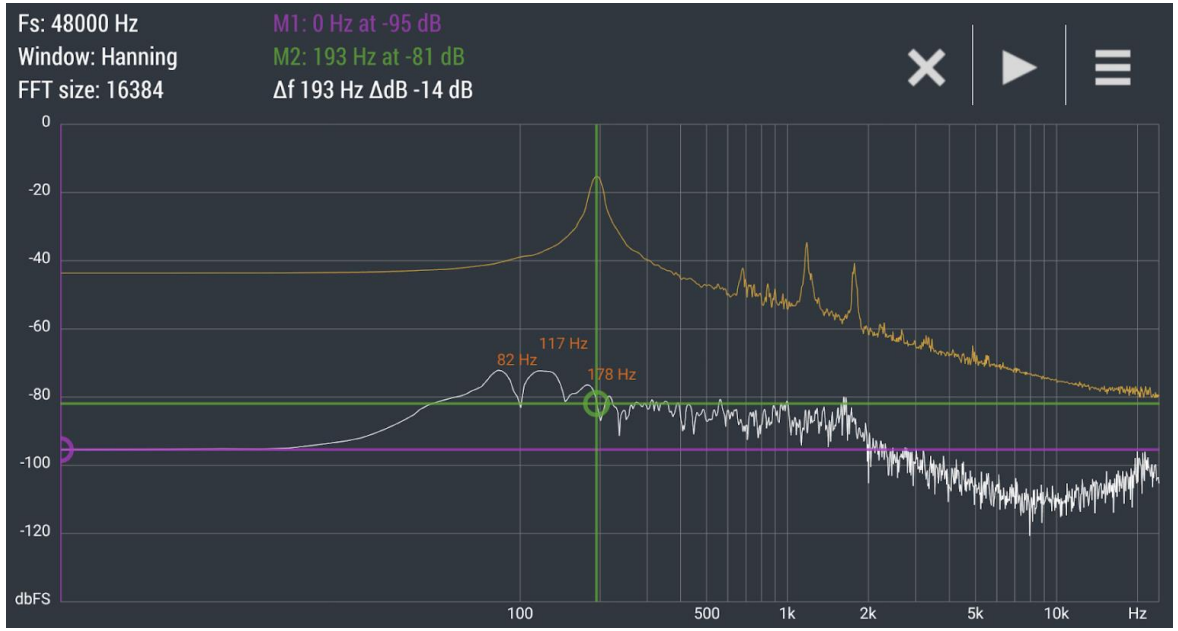
$$l' = l + 0{,}85\ a + 0{,}6\ a$$

$$l' = l + 1{,}45\ a$$

Caso con el cuello sin flanco de un lado y con flanco del otro.

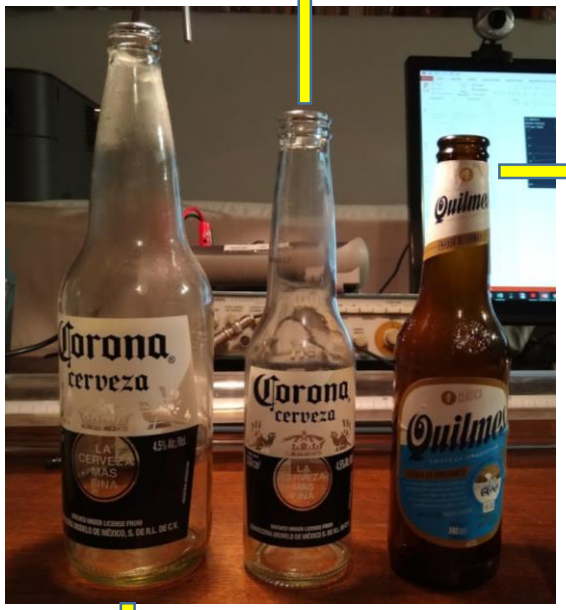


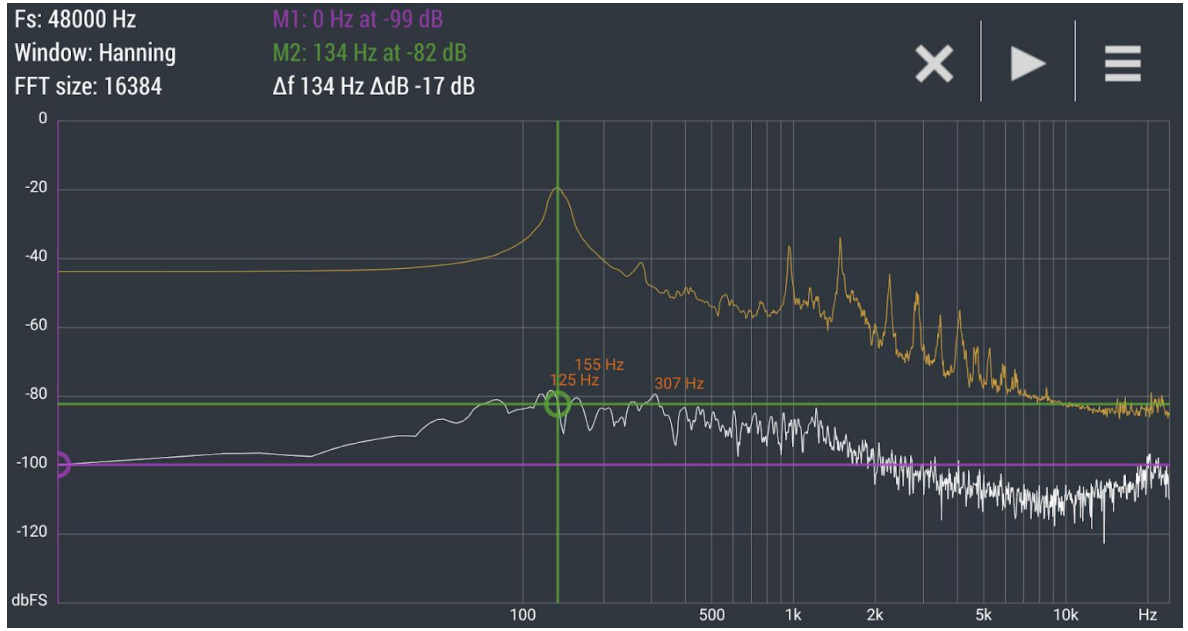
184 Hz



193 Hz

$$f = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{A}{\gamma V \ell'}}$$





134 Hz

Objetivos

- Utilizando una botella de cuello largo estimar la velocidad de propagación del sonido usando concepto de resonador de Helmholtz.

- Medir la frecuencia del resonador variando el volumen del mismo agregando agua a la botella.

- Utilizando $f = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{A}{\gamma V \ell}}$ calcular la velocidad de propagación del sonido.

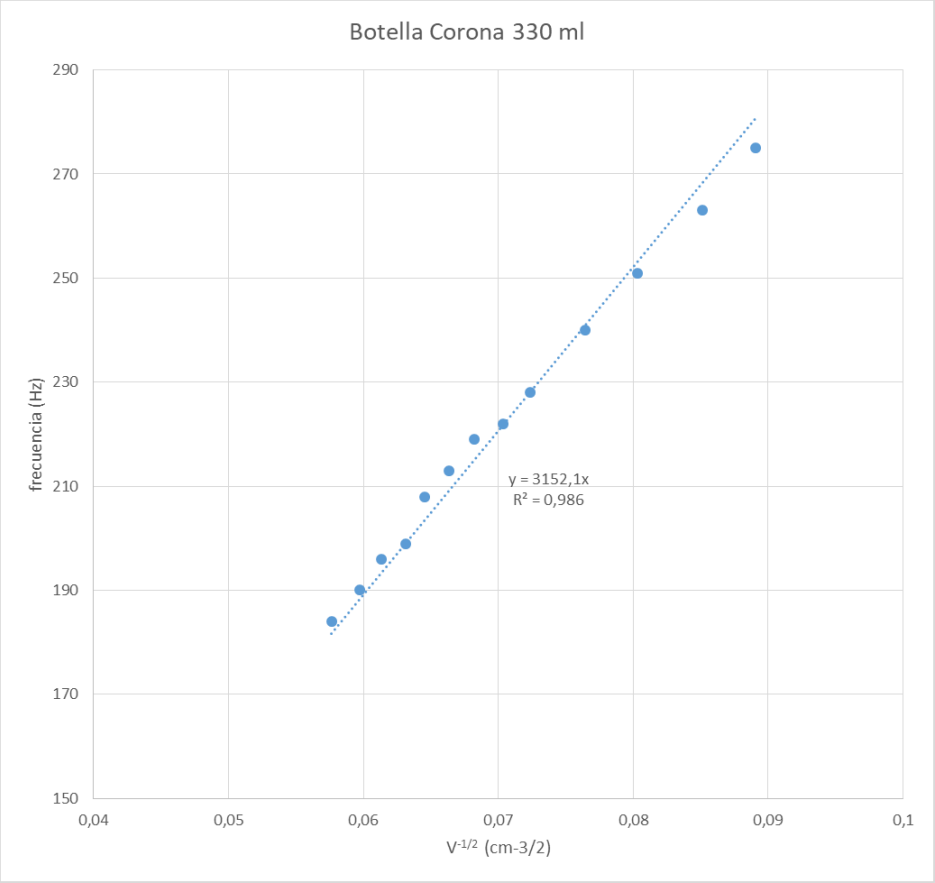
ℓ

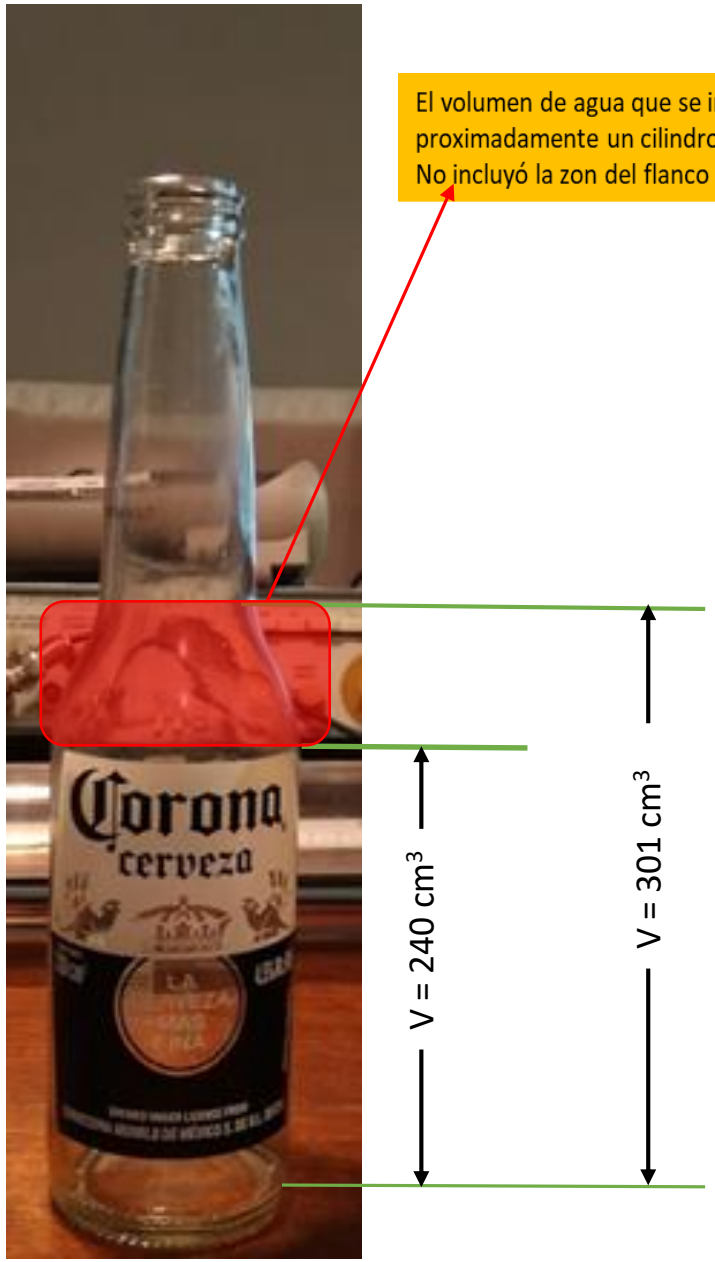
zona de volumen V

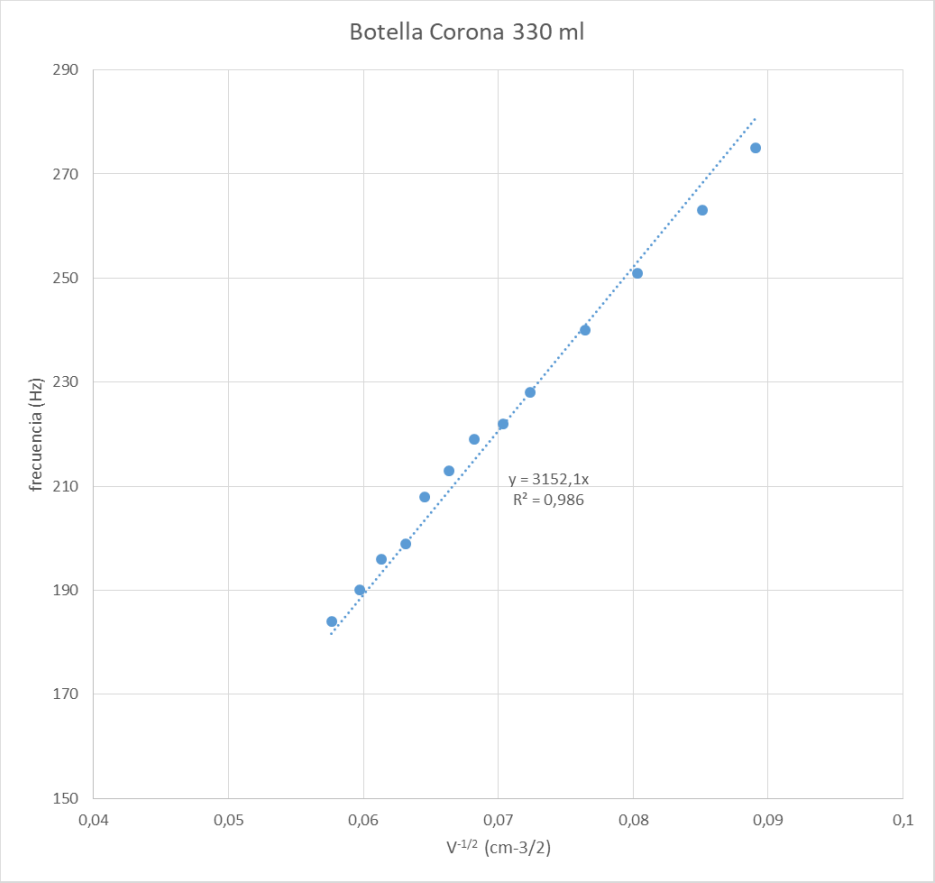
V agua (ccm3)	Vaire (cm3)	1/raiz(V)	f (Hz)
0	301	0,0576	184
21	280	0,0598	190
35	266	0,0613	196
50	251	0,0631	199
61	240	0,0645	208
74	227	0,0664	213
86	215	0,0682	219
99	202	0,0704	222
110	191	0,0724	228
130	171	0,0765	240
146	155	0,0803	251
163	138	0,0851	263
175	126	0,0891	275
197	104	0,0981	295
223	78	0,1132	328
233	68	0,1213	331

L	9,5	cm
L_{efec}	11,39	cm
r prom	1,3	cm
A	5,309	cm2

pend. ($Hz/cm^{-3/2}$)	v (m/s)
3152	343,15





El volumen de agua que se introdujo en la cubrió la zona donde el volumen era proximadamente un cilindro.
No incluyó la zon del flanco

V agua (ccm3)	Vaire (cm3)	1/raiz(V)	f (Hz)
0	301	0,0576	184
21	280	0,0598	190
35	266	0,0613	196
50	251	0,0631	199
61	240	0,0645	208
74	227	0,0664	213
86	215	0,0682	219
99	202	0,0704	222
110	191	0,0724	228
130	171	0,0765	240
146	155	0,0803	251
163	138	0,0851	263
175	126	0,0891	275
197	104	0,0981	295
223	78	0,1132	328
233	68	0,1213	331