

Ondas estacionarias

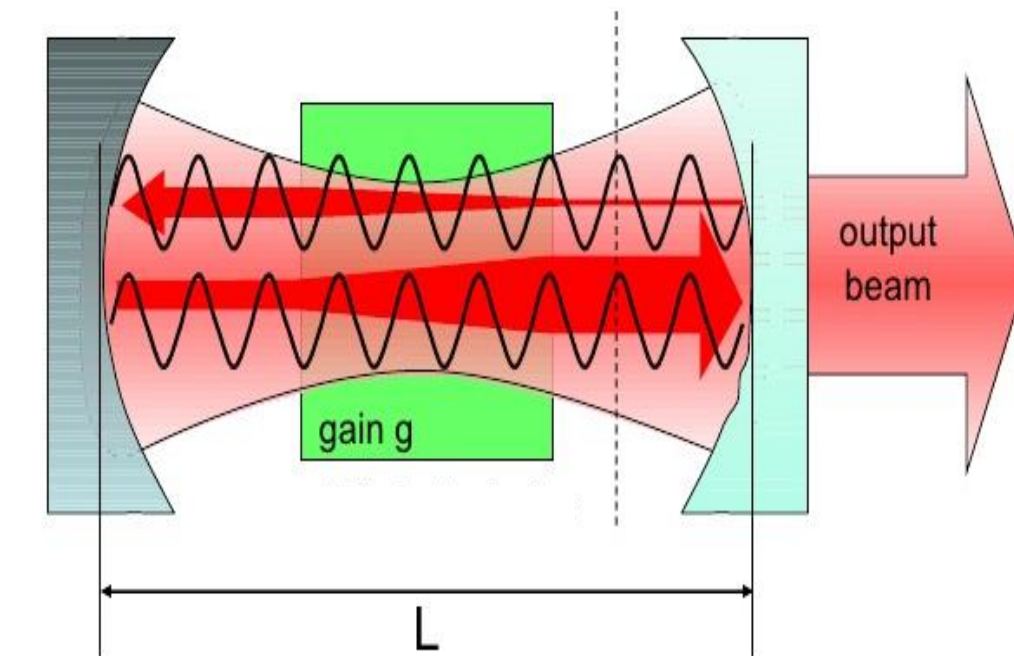
Si las ondas están confinadas espacialmente, por ej. :

Ondas en las cuerdas de un piano, guitarra, etc

Ondas sonoras en un tubo de un órgano

Ondas luminosas en una cavidad laser

Se producen reflexiones en ambos extremos ya que las ondas viajen en ambas direcciones



Esas ondas **se superponen e interfieren**.

Hay ciertas frecuencias para las cuales esta superposición lleva a una configuración de vibración estacionaria (*Ondas estacionarias*).

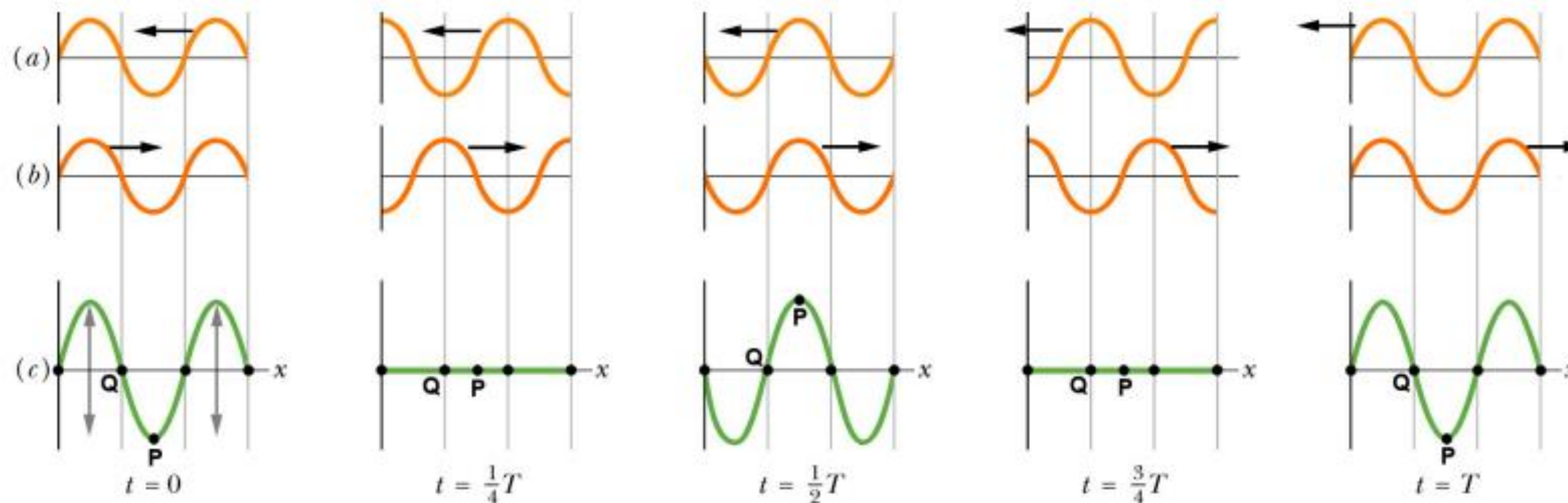


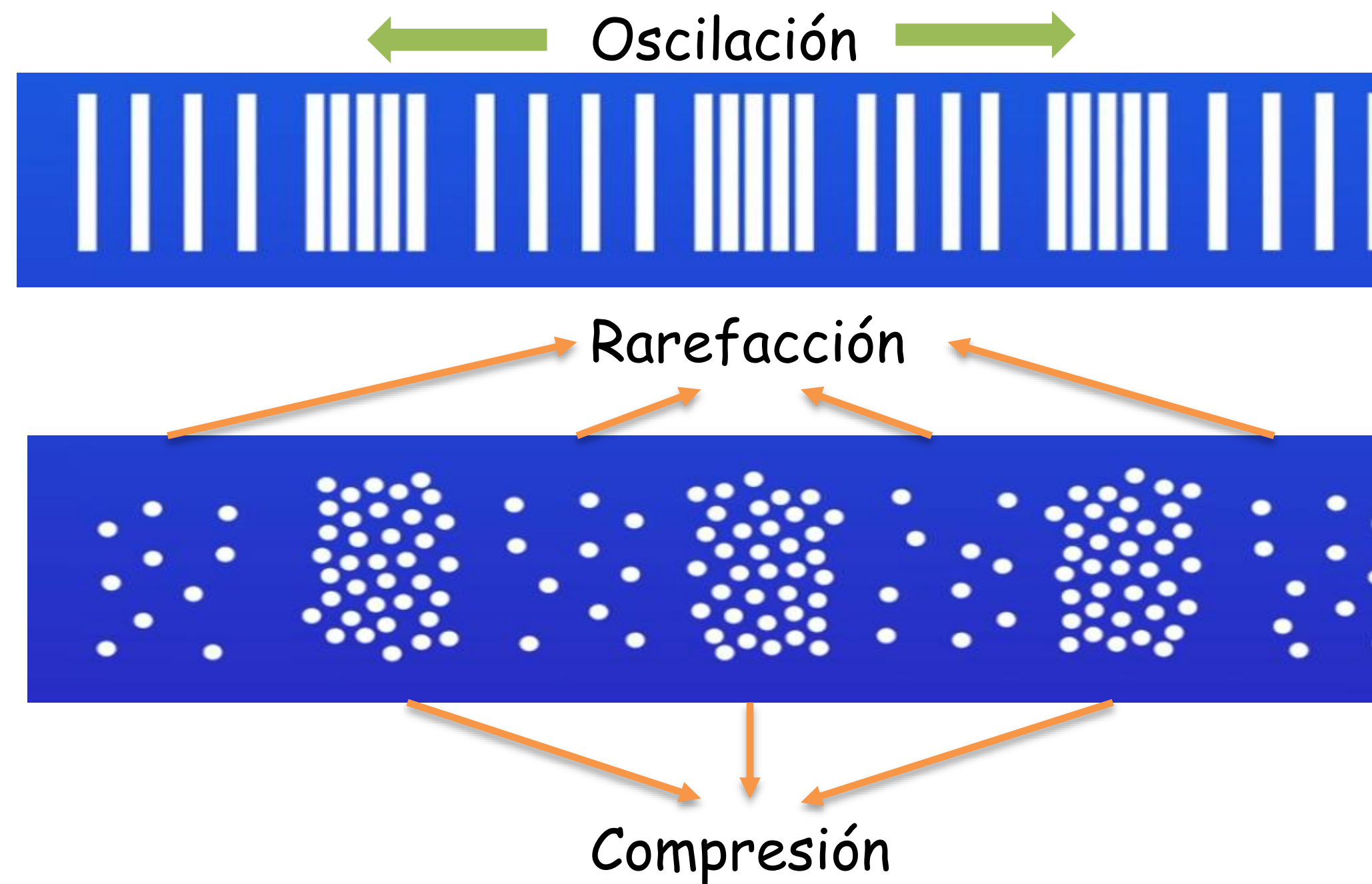
Figure 3: Two traveling waves (a) and (b) going in opposite directions generate a standing wave (c).

Ondas transversales

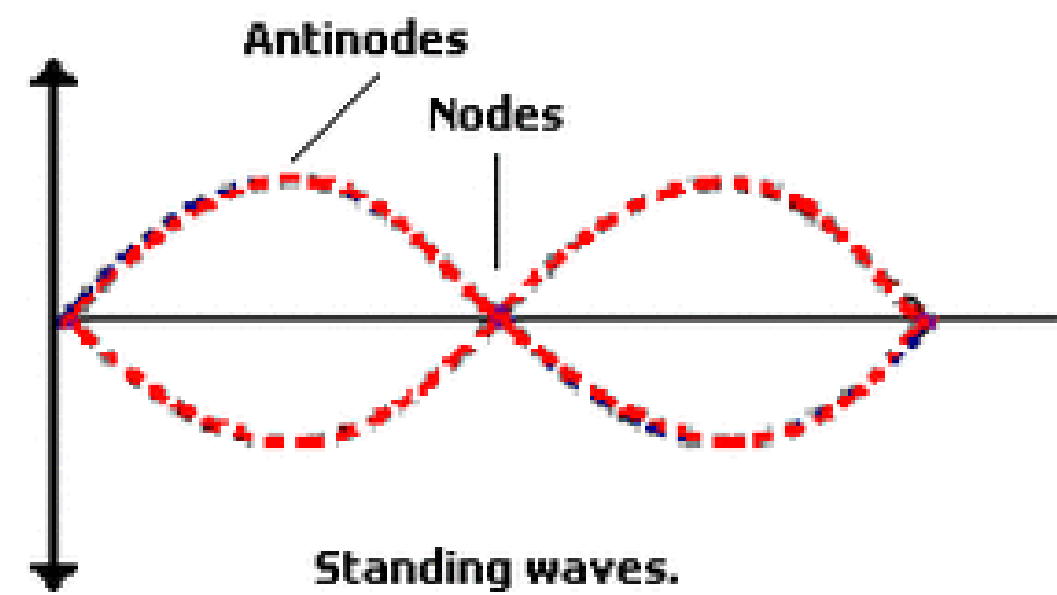
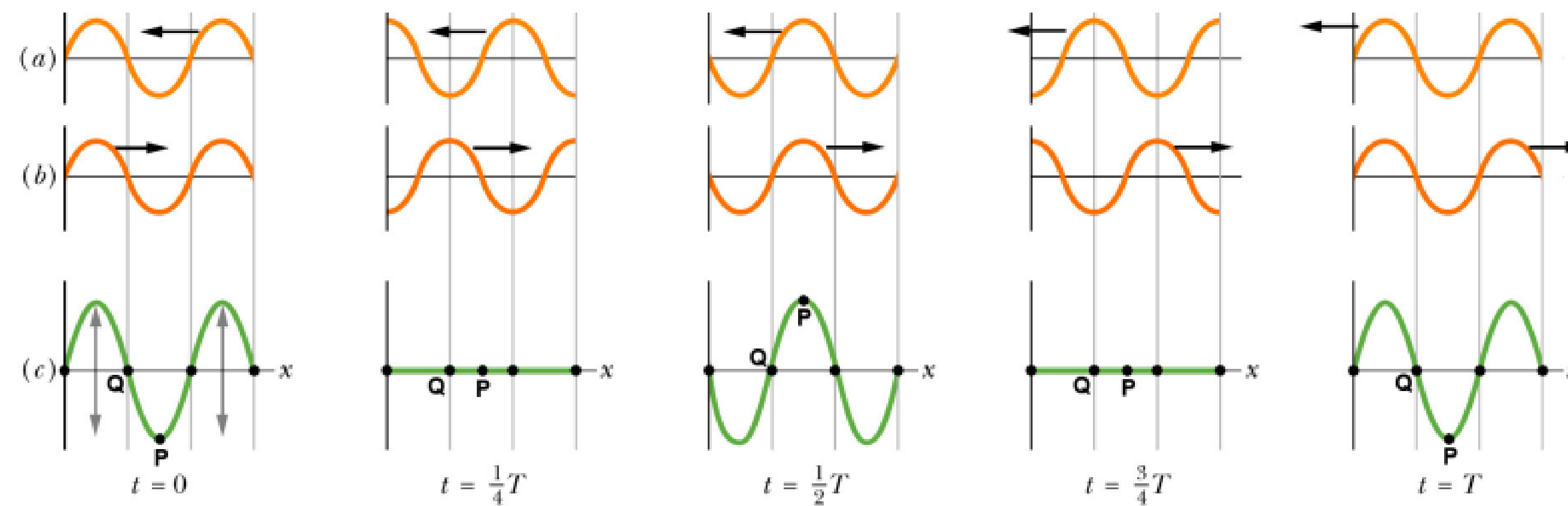


La onda se mueve hacia arriba y abajo : **oscilación**
La onda oscila perpendicular a la dirección de transferencia de energía

Ondas longitudinales



La onda oscila paralela a la dirección de transferencia de energía



Si se fijan ambos extremos de una cuerda y se mueve una parte de la cuerda hacia arriba y abajo con un movimiento armónico simple de pequeña amplitud se encuentran configuraciones de onda estacionaria a ciertas frecuencias (frecuencias de resonancia).

A cada frecuencia le corresponde una función de onda y es un modo de vibración.

Existen ciertos puntos de la onda estacionaria donde no hay movimiento que son llamados **nodos**.

En el punto medio entre dos nodos se da el sitio de máximo movimiento : **antinodos**.

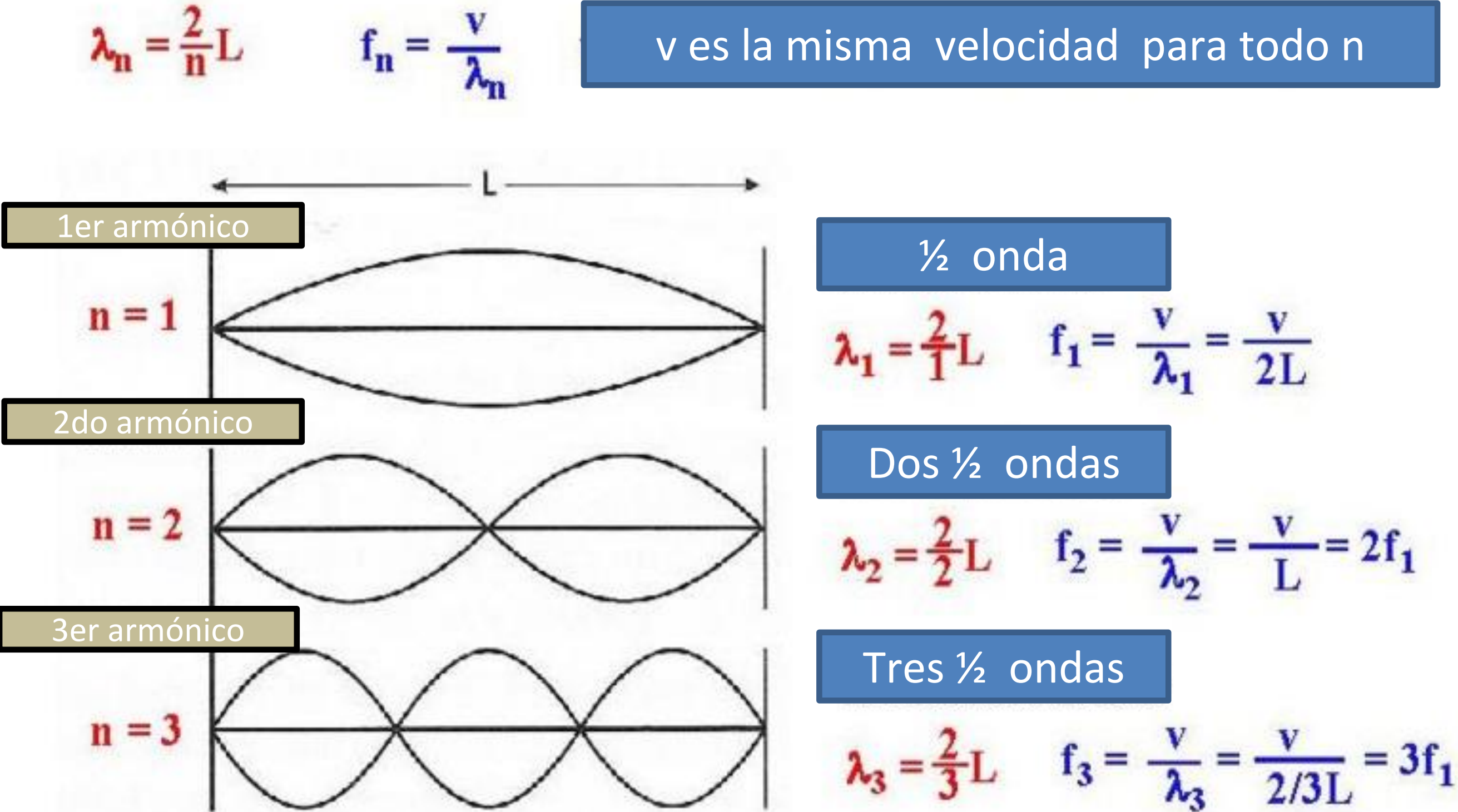
En los extremos fijos de la cuerda hay nodos.
 Si un extremo está fijo y el otro sometido a un oscilador será considerado un nodo porque su amplitud de vibración es mucho más pequeña que la del antinodo.

La frecuencia más baja es la frecuencia fundamental f_1 , que produce el modo fundamental (o primer armónico).

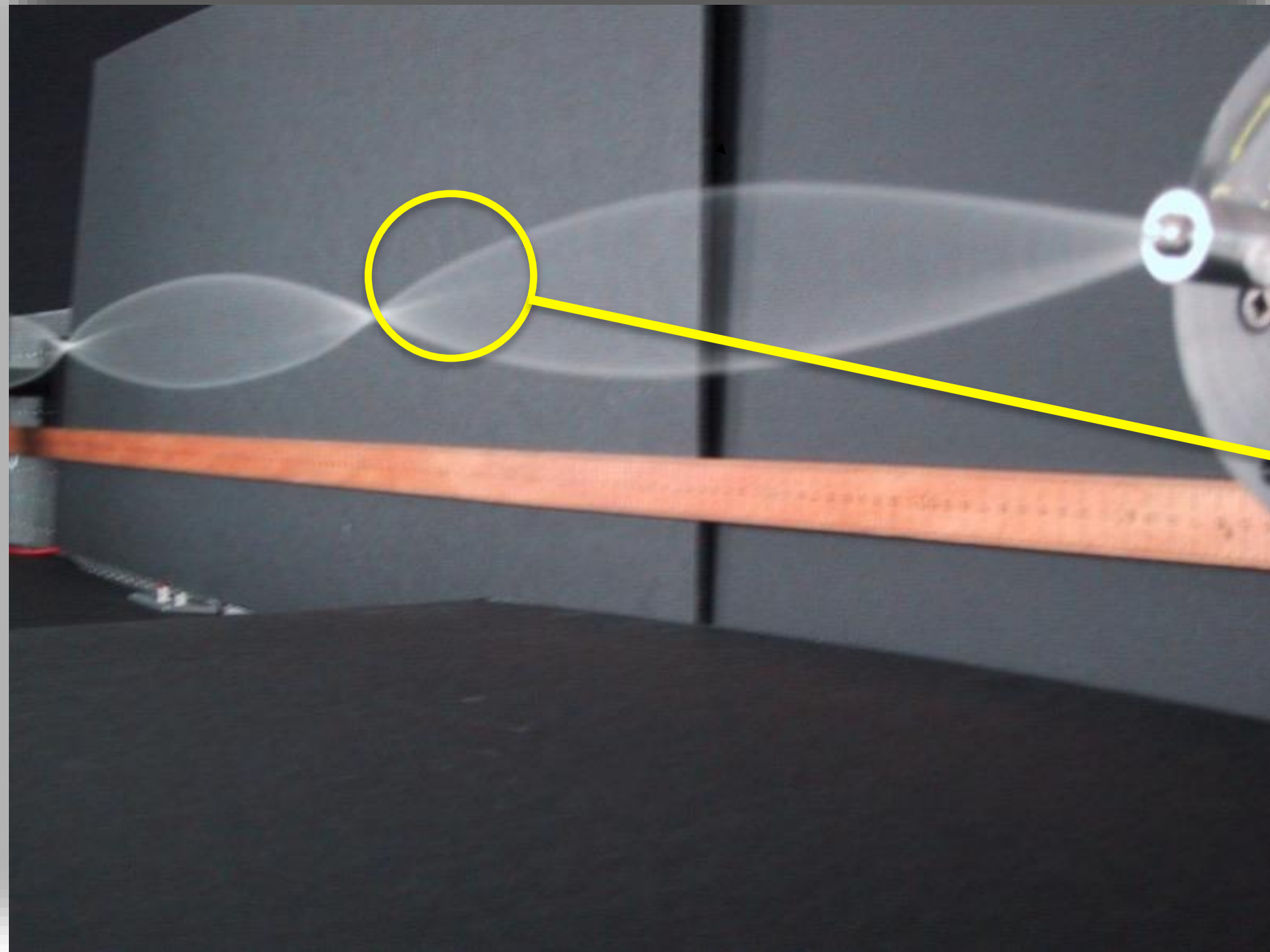
El segundo modo (segundo armónico) se produce al doble de frecuencia que el fundamental f_2 .

El tercer modo de vibración se produce al triple de frecuencia de la fundamental f_3 .

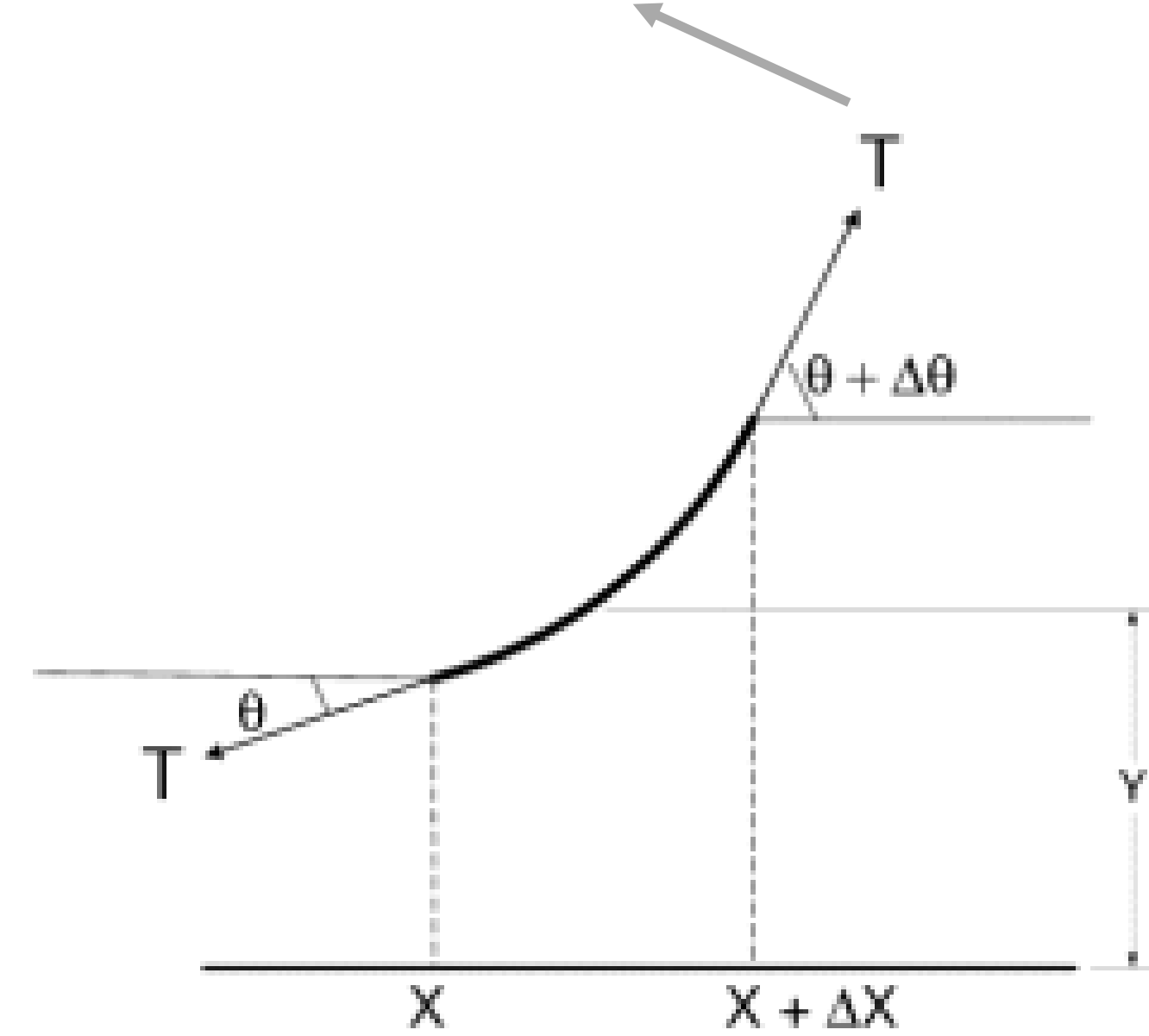
El conjunto de todas las frecuencias resonantes se llama **espectro de frecuencias de resonancia de la cuerda**.



Ondas transversales en una cuerda tensa



Tensión a la que está sometida la cuerda



$$F_y = T \operatorname{sen}(\theta + \Delta\theta) - T \operatorname{sen} \theta$$

$$F_x = T \cos(\theta + \Delta\theta) - T \cos \theta$$

Admitiendo θ y $\Delta\theta$ pequeños

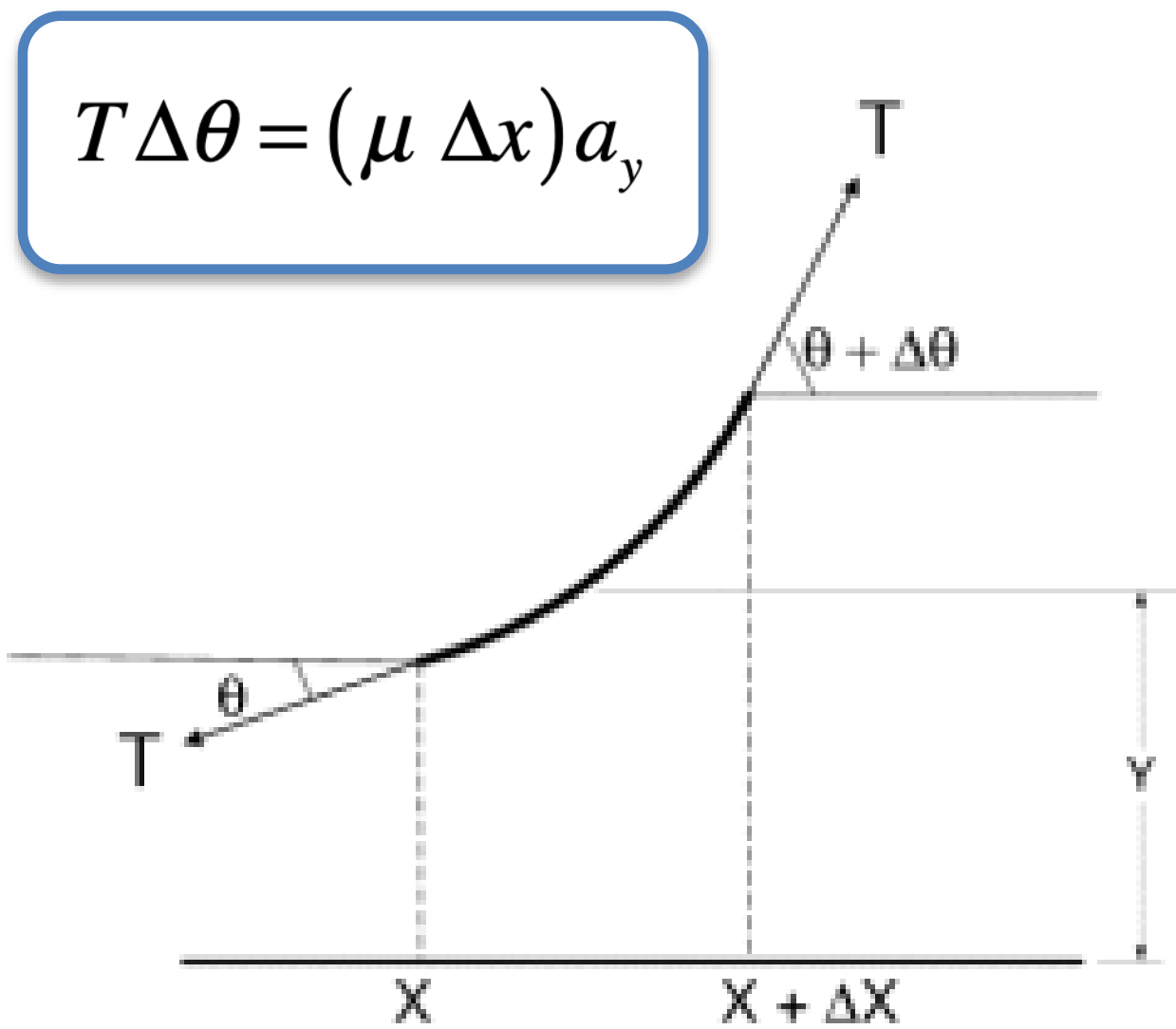
$$F_y = T(\theta + \Delta\theta) - T\theta$$

$$F_x = 0$$

$$F_y = T\Delta\theta \quad \left\{ \begin{array}{l} T\Delta\theta = ma_y \\ T\Delta\theta = (\mu \Delta x)a_y \end{array} \right.$$

$$m = \mu \Delta x$$

Densidad lineal



$$\frac{\partial y}{\partial x} = \tan \theta$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \approx \left(\frac{\Delta \theta}{\Delta x} \right) \frac{\partial}{\partial \theta}$$

derivando de nuevo

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) = \left(\frac{\Delta \theta}{\Delta x} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} (\tan \theta)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Delta x = \sec^2 \theta \Delta \theta \quad (\theta \text{ pequeño})$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Delta x \approx \Delta \theta$$

$$T \Delta \theta = (\mu \Delta x) a_y$$

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Delta x = (\mu \Delta x) a_y$$

$$a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Delta x = (\mu \Delta x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

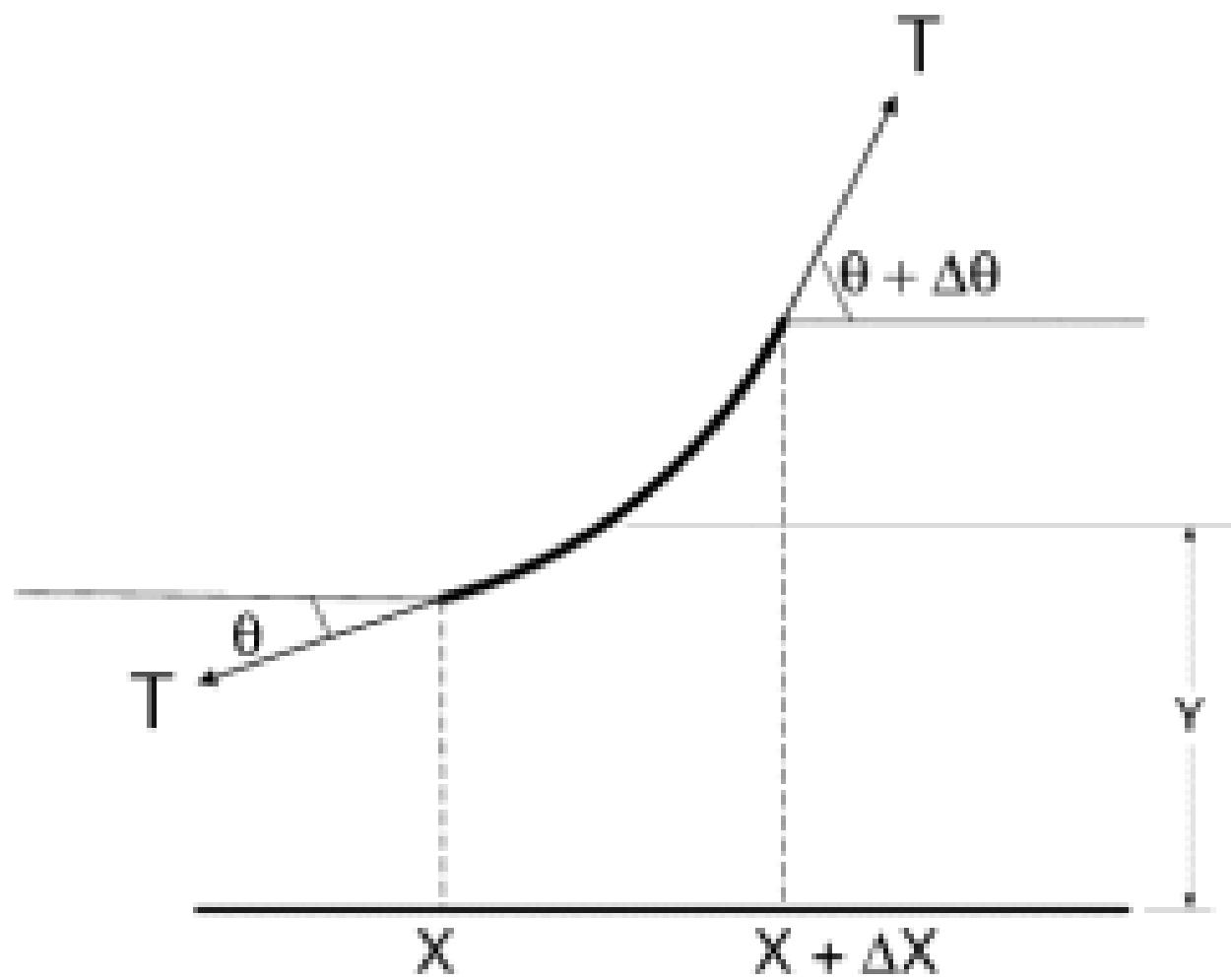
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$v = \left(\frac{T}{\mu} \right)^{1/2}$$

Velocidad con que las ondas progresivas recorren una cuerda de densidad lineal μ al aplicarle una tensión T

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Ec. de onda



$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$v = \left(\frac{T}{\mu} \right)^{1/2}$$

Ec. diferencial de orden 2 en derivadas parciales

$$y(x,t) = g(x) \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\varphi = 0$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 g(x) \cos(\omega t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d^2 g(x)}{dx^2} \cos(\omega t)$$

$$\frac{d^2 g(x)}{dx^2} \cancel{\cos(\omega t)} = -\frac{\omega^2}{v^2} g(x) \cancel{\cos(\omega t)} \quad (*)$$

Se propone una solución armónica

$$g(x) = A \cdot \text{sen}(bx)$$

$$\frac{d^2 g(x)}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} g(x)$$

Ec. diferencial de un oscilador armónico (la variable es la posición y no el tiempo)

reemplazando en (*)

$$\frac{d^2 g(x)}{dx^2} = -Ab^2 \text{sen}(bx)$$

$$-\cancel{A}b^2 \cancel{\text{sen}(bx)} = -\cancel{A} \frac{\omega^2}{v^2} \cancel{\text{sen}(bx)}$$

$$b = \frac{\omega}{v}$$

$$g(x) = A \text{sen}\left(\frac{\omega}{v} x\right)$$

Condiciones de contorno

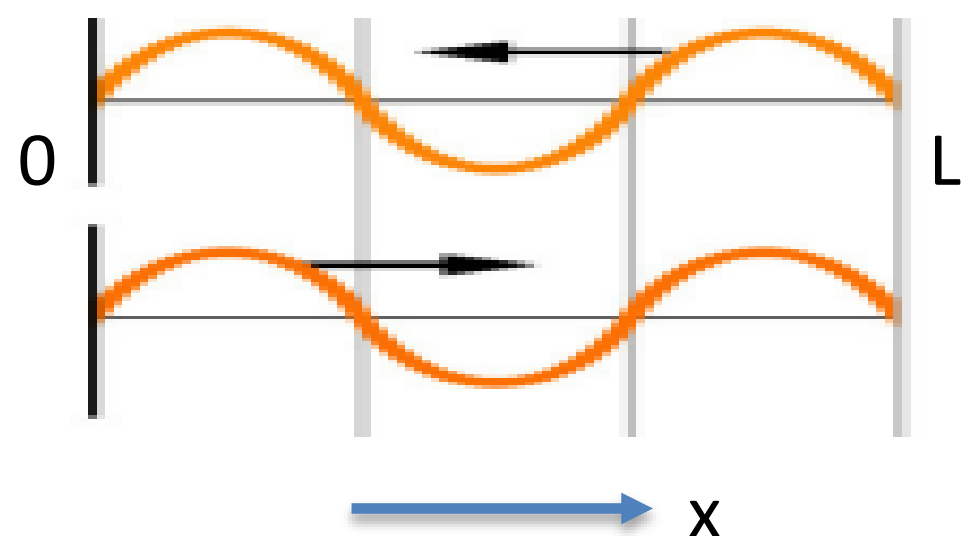
desplazamiento nulo en los extremos de la cuerda (en $x = 0$ y $x = L$)

$$0 = A \text{sen}\left(\frac{\omega}{v} L\right)$$

$$\frac{\omega}{v} L = n\pi$$

$$\omega = 2\pi \cdot f$$

$$f_n = \frac{nv}{2L}$$



$$v = \left(\frac{T}{\mu} \right)^{1/2}$$

$$f_n = \frac{n}{2L} \left(\frac{T}{\mu} \right)^{1/2}$$

Relación de dispersión

$$f_n = \frac{nv}{2L}$$

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n}$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

La descripción completa del movimiento de la cuerda :

$$y(x,t) = A_n \text{sen} \left(2\pi \frac{x}{\lambda_n} \right) \cos(\omega t)$$

Otra condición de contorno

$x = L$ *cuerda fija*
 $x = 0$ *vibración transversal con frecuencia arbitraria y amplitud B*

$$y(0,t) = B \cos(\omega t)$$

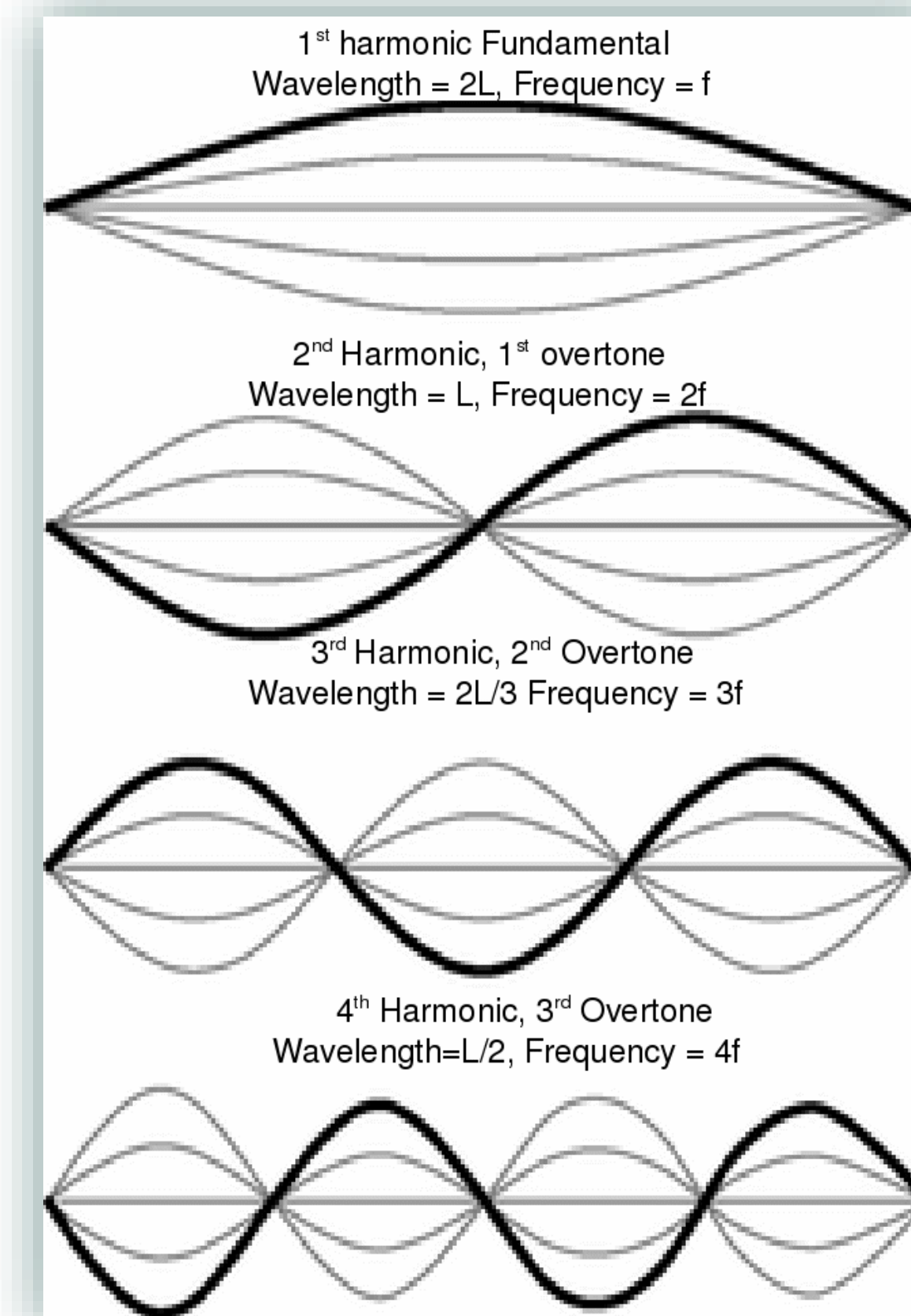
$$y(L,t) = 0$$

Si se resuelve la ec. de onda con estas condiciones se obtiene

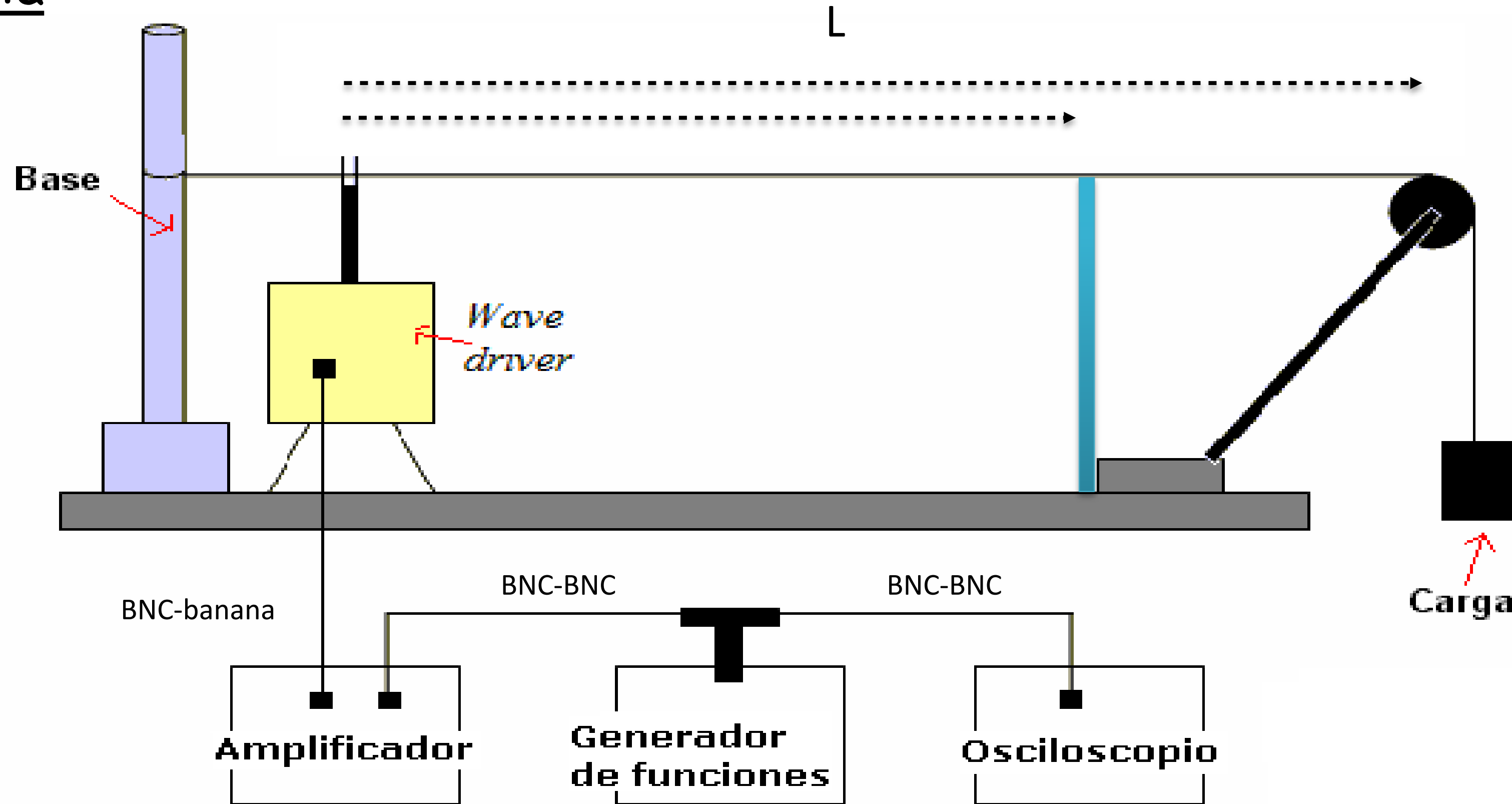
$$A = \frac{B}{\text{sen} \left(p\pi - \frac{\omega L}{v} \right)}$$

$p = \text{entero}$

lo que implica que la respuesta será máxima cerca de las frecuencias naturales del sistema



Experiencia

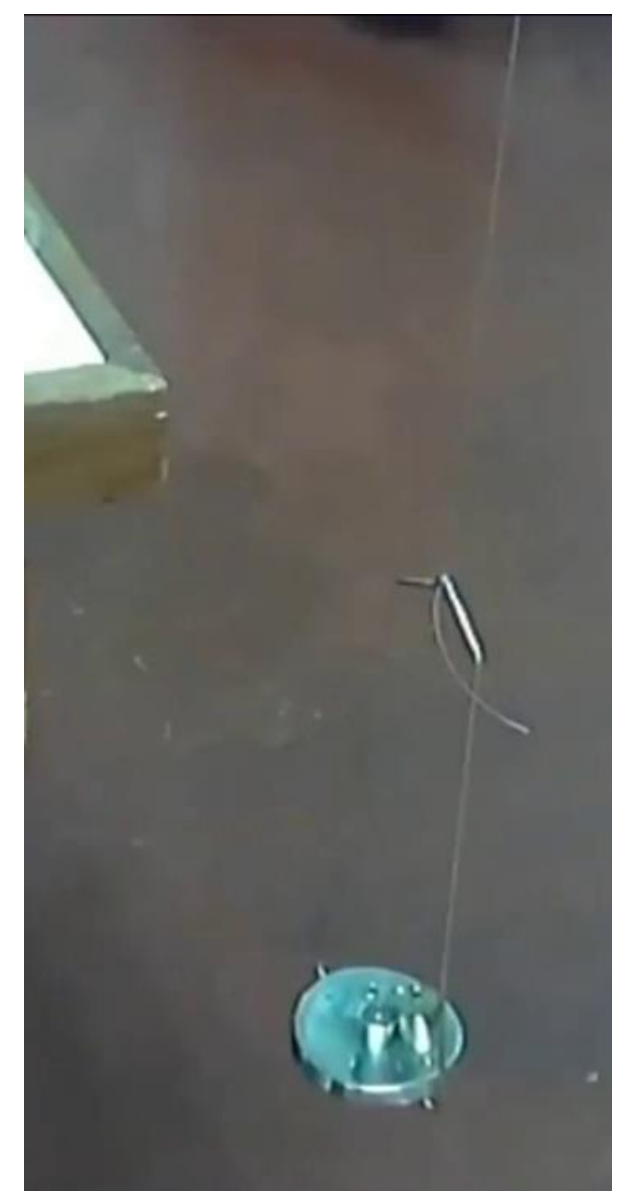
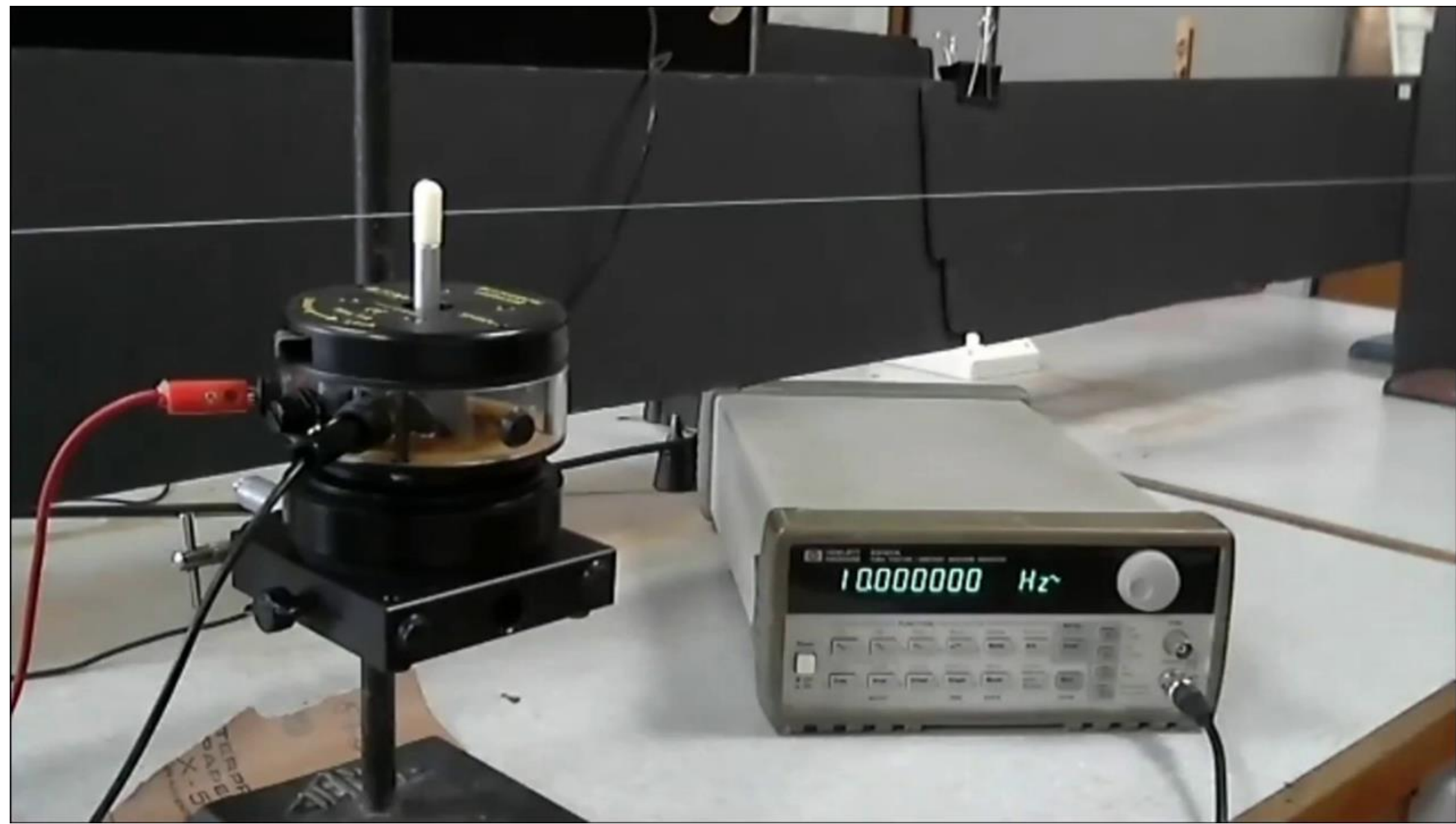


BNC-banana

1. Estimar la densidad lineal de la cuerda.
2. Para una dada carga, obtener la frecuencia de 5 modos normales de la cuerda
3. Calcular la velocidad de propagación usando la relación de dispersión.
4. Comparar con la velocidad de propagación del modelo.
5. Repetir para 5 cargas diferentes
6. Repetir para otra cuerda con distinta densidad lineal.

$$v = \left(\frac{T}{\mu} \right)^{1/2} \quad \longrightarrow \quad v_{rd} = \frac{\lambda_n}{f_n}$$

- Medir la longitud l_0 de una cuerda de nylon.
- Medir el diámetro de la cuerda con micrómetro.
- Pesar la cuerda con una precisión de 0,1 mg.
- Calcular la densidad lineal $\mu = m/l_0$
- Calcular la densidad





¿ PREGUNTAS ?