

## Capítulo 2

# Ondas de ultrasonido

Las ondas de ultrasonido son ondas acústicas cuyas frecuencias son mayores que el umbral del oído humano ( $\sim 20\text{kHz}$ ). En la figura 2.1 se pueden observar las frecuencias típicas junto con algunas fuentes que las generan o aplicaciones. Como toda onda acústica, es longitudinal y se propaga por colisiones entre partículas. Por lo tanto, la velocidad de propagación depende de la densidad de partículas y de la temperatura (no pueden propagarse en vacío).

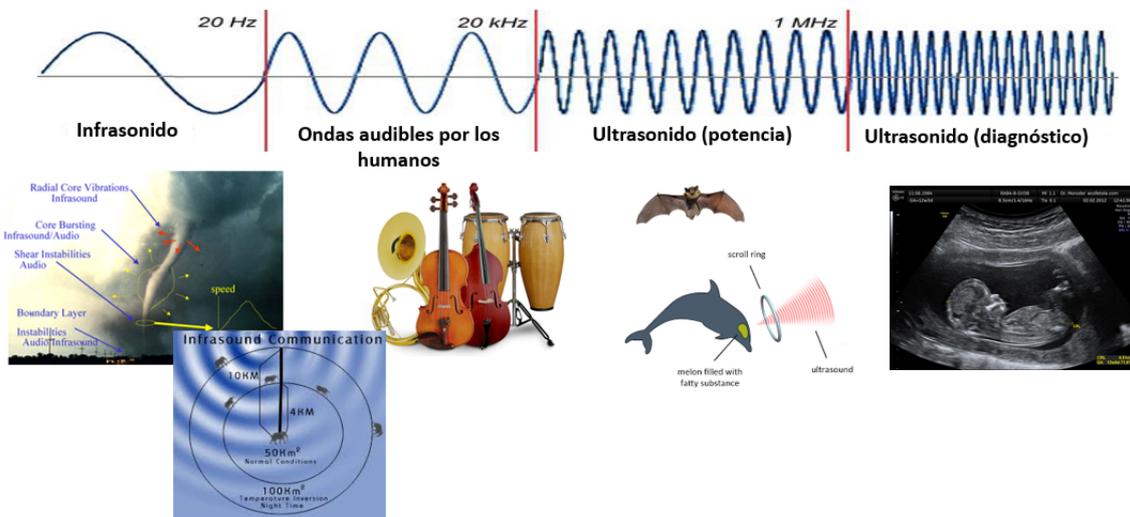


Figura 2.1: Espectro de las ondas acústicas y posibles fuentes y/o usos de estas ondas.

Empecemos estimando órdenes de magnitud de los distintos tipos de ondas acústicas. Esto es importante sobre todo cuando queremos hacer experimentos; conocer el orden de magnitud de las variables que uno espera medir permite definir cuáles son los instrumentos adecuados para realizar la medición, en cuanto a precisión, exactitud, rango, etc. En este sentido, les sugerimos los siguientes ejercicios:

**Tarea:**

a) Las ondas de ultrasonido, ¿se propagan en todos los medios? Buscar velocidades típicas en diferentes medios. Viajan más rápido por sustancias calientes que por sustancias frías, ¿por qué? Buscar bibliografía para obtener datos medidos.

b) Completar la tabla 2.1 y pensar si las cantidades definidas pueden ser medidas con los instrumentos conocidos. Calcular, para algunas frecuencias ( $\nu$ ) en el rango del sonido y del ultrasonido, la frecuencia angular ( $\omega$ ), el período ( $T$ ), el número de onda ( $k$ ), la longitud de onda ( $\lambda$ ) en las unidades indicadas. Suponer que las ondas se propagan en un medio lineal cuya relación de dispersión es  $\omega = c_s k$ , con  $c_s$  la velocidad de propagación de la onda en el medio. Tomar valores para  $c_s$  de bases de datos.

Cantidad\rango	sonido	Ultrasonido de potencia	Ultrasonido diagnóstico
$\nu$ [Hz]			
$\omega = 2\pi\nu$ [1/s]			
$T = 2\pi/\nu$ [s]			
$k$ [1/m]			
$\lambda$ [cm]			

Tabla 2.1: Completar eligiendo distintas frecuencias en los rangos indicados y distintos materiales en donde se propagan las ondas.

En la primera etapa de la materia trabajaremos con piezoeléctricos (PE), que son materiales cristalinos o amorfos capaces de emitir y detectar ondas de ultrasonido ¡Veamos cómo!

## 2.1. Los piezoeléctricos como transductores de ultrasonido

La piezoelectricidad es un fenómeno que ocurre en determinados cristales que, al ser sometidos a tensiones mecánicas, adquieren una polarización eléctrica, es decir, una distribución de carga eléctrica interna. Esto lleva a que entre sus superficies aparezca una diferencia de potencial. Esto nos dice, por ejemplo, que es posible encender un LED conectándolo a un piezoeléctrico (PE) sobre el que se ejercen distintos tipos de fuerzas mecánicas (presión, extensión, torsión). En la figura 2.2(a)- línea superior- se observa esquemáticamente como al ejercer deformaciones en un cristal PE se genera una diferencia de tensión entre sus dos superficies. Ejemplos de PE cerámicos o cristalinos (cuarzo) se pueden observar en la figura 2.2(b). Los primeros pueden ser encontrados en los parlantes *speakers* y normalmente su respuesta en frecuencia es ancha. Los cristalinos, en cambio, son utilizados en relojes muy precisos o como señales de referencia con frecuencias muy estables (pronto veremos por qué).

Este fenómeno también ocurre a la inversa: los PE se deforman bajo la acción de fuerzas internas al ser sometidos a un campo eléctrico, como se esquematiza en la figura 2.2(a)- línea inferior-. Las deformaciones de los piezoeléctricos son tan pequeñas (decenas de nanómetros a centenas de micrones) que necesitamos de técnicas ultra-precisas para poder medirlas. ¿Se te ocurre cómo? ¡En la última práctica del curso vamos a aprender estos temas! El efecto PE es normalmente reversible: al dejar de someter a los cristales a un voltaje externo o campo eléctrico recuperan su forma.

Los cristales piezoeléctricos también se conocen como transductores piezoeléctricos. Los transductores son dispositivos capaces de convertir algún tipo de energía en energía eléctrica, y por eso se los utiliza para realizar mediciones. Por ejemplo, pueden convertir energía mecánica, lumínica, etc., en una señal eléctrica y viceversa. Existen muchos tipos de transductores que iremos estudiando en el curso. Los transductores PE pueden convertir presión o *stress* mecánico en una señal eléctrica (sensores de fuerza) o pueden convertir una señal eléctrica en un movimiento físico (actuador de movimiento).

Debido a que típicamente el fenómeno de piezoelectricidad es **lineal** (a mayor tensión, mayor desplazamiento), cuando se alimenta al PE con una señal armónica, las deformaciones mecánicas en él también serán armónicas, con una amplitud que dependerá de la frecuencia. Dado que esta oscilación armónica está confinada en el espacio (el PE tiene un tamaño finito), habrá ciertas frecuencias para las cuales la transferencia de energía

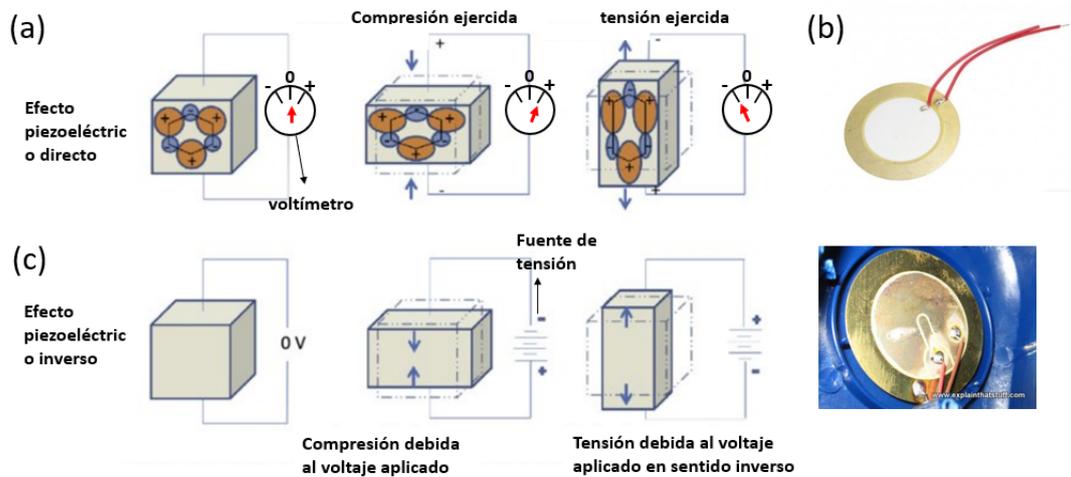


Figura 2.2: (a) Efecto piezoeléctrico directo: se mide una tensión en el voltímetro al comprimir, expandir, tensionar al material. (b) Un piezoeléctrico típico que se encuentra en los parlantes (arriba), y uno típico que se usa para generar señales precisas en frecuencia (abajo). (c) Efecto piezoeléctrico inverso: al aplicar una diferencia de tensión con una fuente el material se deforma. Figura adaptada de ref. [?].

eléctrica-mecánica sea máxima, y otras para las cuales ésta sea nula (¿Cómo podremos estimar estas frecuencias?). Entonces, el PE es un sistema resonante y, como para cualquier otro sistema resonante, se espera que la respuesta en frecuencias sea una “campana”, ¿será cierto?

Cuando el PE oscila, produce movimiento del aire en su entorno. La perturbación del aire se propaga como una onda acústica, con la misma frecuencia que la oscilación mecánica. ¿Cómo es la amplitud de la onda generada en relación a la amplitud de la alimentación? ¿Y en relación a la amplitud de oscilación mecánica? ¿Cómo harías un experimento que te permita responder a estas preguntas?

Debido al efecto PE estos pueden actuar tanto como emisores o como receptores. Siendo que usamos PE tanto para generar como para detectar a las ondas de ultrasonido, nos referimos a los dos PE como par emisor-receptor. La medición que realicemos va a estar influenciada tanto por la respuesta del emisor como por la respuesta del receptor.

En cuanto a las aplicaciones, su capacidad de generar movimientos pequeños y controlables por la tensión de alimentación permite que estos sean utilizados, por ejemplo, en posicionadores de gran precisión que se utilizan en microscopía o para estabilizar vi-

braciones en sistemas ópticos. Su capacidad de generar y detectar ondas de ultrasonido permite utilizarlos para detectar objetos y medir distancias (¡como los murciélagos!).

**Para pensar:** Buscar en una hoja de datos (pedir en el pañol el modelo del PE disponible en el laboratorio) los tamaños típicos de los PE que producen ondas de ultrasonido y buscar la velocidad de propagación de las ondas de ultrasonido en el cuarzo. Típicamente el PE tendrá forma de disco de diámetro  $d$  y altura  $h$ . Suponer entonces que el PE oscila en el modo más bajo, cuya frecuencia es igual a la del modo fundamental de una cuerda con dos extremos fijos (¿por qué?). ¿A que frecuencias se espera que el PE resuene? ¿Su oscilación es en el diámetro o en el alto?

**Experimental 1:** De lo explicado se desprenden dos posibles caracterizaciones a realizar sobre el par emisor-receptor:

- a. Caracterización de la amplitud de la onda de ultrasonido (medida en el receptor) en función del voltaje de alimentación (provisto por el generador de funciones). A partir de ella se puede determinar el rango en donde la respuesta es lineal. ¿Por qué es importante conocer el rango lineal?
- b. La respuesta en frecuencias, conocida como *campana de resonancia* (amplitud de la señal medida en el receptor en función de la frecuencia de la señal de alimentación).

El montaje experimental sugerido (para la mayoría de los experimentos de ultrasonido) es el que se observa en la figura 2.3, en donde se encuentra al emisor y al receptor enfrentados, montados sobre un riel y a una distancia  $D$  entre sí. El emisor se conecta a un generador de funciones mediante un cable BNC. La señal en el receptor se mide empleando un osciloscopio. De ser necesario utilizar una señal de referencia para el *trigger*, se puede emplear la señal de alimentación.

Pensar cuál es la mejor forma de implementar esta experiencia, en particular para el ítem a.: ¿Cuál es la distancia óptima entre el emisor y el receptor? ¿En qué frecuencia es conveniente realizar este estudio? ¿Debo usar *trigger* en el osciloscopio? ¿Por qué? ¿Qué pruebas experimentales podría hacer para responder estas preguntas?

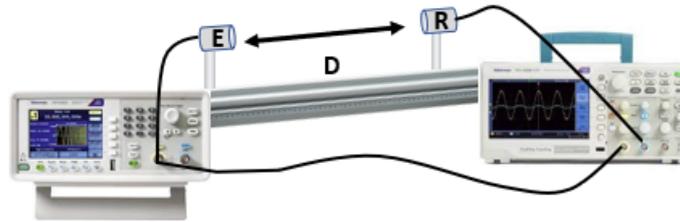


Figura 2.3: Esquema del dispositivo experimental propuesto. El par emisor-receptor se encuentran situados en un riel. El emisor se alimenta con un generador de funciones, a su vez esta señal se usa como trigger del osciloscopio. La señal en el receptor se mide empleando el osciloscopio.

## 2.2. Calibración y regresión lineal

Las caracterización de la amplitud en el PE receptor en función del voltaje de alimentación del emisor, nos permite obtener una curva a partir de la cual conociendo la alimentación podemos predecir cual es la amplitud en el receptor. A esta curva la llamaremos **calibración**. En particular, observamos que el comportamiento de las mediciones es lineal al menos en un rango de voltajes de alimentación, que es la calibración más simple y conveniente que podemos obtener. Una calibración lineal tiene una **sensibilidad** dada por la pendiente. A mayor pendiente, mayor sensibilidad; es decir, pequeñas variaciones en voltaje ofrecen grandes variaciones en amplitud de la señal medida. Podría existir un valor de saturación que haría que solo un rango de voltajes de alimentación sea útil (porque donde satura no hay variación de respuesta y por lo tanto a los efectos de calibrar no sirve).

Una vez determinado el rango donde el comportamiento es lineal, uno se puede proponer obtener un ajuste lineal para usarlo como función de calibración. Ajustar es encontrar los valores de los parámetros de la función que minimizan la distancia entre los datos y lo esperado por el modelo propuesto. Además, estas distancias se pesan por el error asignado a cada una, para darle más importancia a los datos que están mejor definidos. Es decir, se busca minimizar el siguiente valor:

$$\chi^2 = \sum \left( \frac{y_{\text{medido}} - y_{\text{modelo}}}{y_{\text{error}}} \right)^2 .$$

A estas funciones que dependen de los datos y dan información de los parámetros del modelo se los conoce como “estadísticos”. Por ejemplo, en el caso del  $\chi^2$ : si el modelo propuesto se corresponde a los datos medidos, al calcularlo se obtienen resultados que andan cerca de  $\nu$ , que es la cantidad de grados de libertad del ajuste ( $\#\text{datos} - \#\text{parámetros\_ajuste} - 1$ ). Si  $\chi^2 > \nu$ , suele ser indicativo de un ajuste que no responde a los datos

o de que los errores fueron subestimados. Si, en cambio,  $\chi^2 < \nu$ , es factible que el modelo esté sobreajustado y que se esté ajustando el ruido, o que los errores hayan sido sobreestimados. A veces se utiliza el estadístico  $\frac{\chi^2}{\nu}$ , llamado “ $\chi^2$  reducido” y se analiza su valor respecto de 1.

Ahora supongamos que se miden de nuevo los datos: es esperable que vayan a ser levemente distintos, aunque seguramente dentro de las incertezas experimentales. Entonces también es esperable que al calcular  $\chi^2$  vaya a dar levemente distinto. Bueno, resulta que si el modelo elegido es el correcto, los  $\chi^2$  que se van obteniendo en mediciones sucesivas no valen cualquier cosa, sino que siguen una distribución de probabilidades llamada  $\chi^2_\nu$  (link):

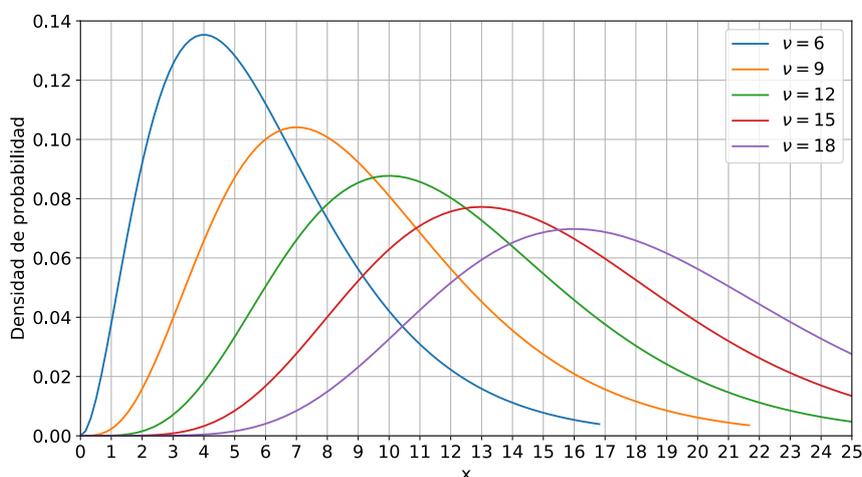


Figura 2.4: Distribuciones de probabilidad  $\chi^2_\nu$ .

Entonces, por ejemplo, si se realiza un ajuste cuadrático (3 parámetros) sobre 19 datos, la curva a mirar es la de  $\nu = 15$ : la curva roja. Esta nos dice que, si es cierta la hipótesis de que el modelo elegido es el correcto, lo más habitual es obtener  $\chi^2 = 13...$  ¡pero también es muy probable obtener valores entre 8 y 20!

Sin embargo, sí podemos decir que a medida que uno se aleja del máximo de la campana, se empieza a volver menos probable haber obtenido un determinado  $\chi^2$ . Entonces, el valor de  $\chi^2$  obtenido no habla necesariamente de que el ajuste sea bueno o malo, sino de qué tan probable es haber obtenido ese valor de  $\chi^2$  en el caso de que el modelo elegido para ajustar los datos es el que describe correctamente el fenómeno observado. Entonces, podemos decir que:

- Un  $\chi^2$  muy bajo o muy alto indica que sería muy extraño obtener esos datos si el modelo es el correcto. Es decir: o el modelo no es el correcto, o el modelo sí es el correcto pero se tuvo mucha mala suerte y justo lo medido no parece responder al modelo. En estadística se dice que se rechaza la hipótesis de que el modelo sea el correcto, a riesgo de que quizás se está en el caso de haber tenido mala suerte y que en realidad la hipótesis no pueda ser completamente descartada.

- Un  $\chi^2$  cercano a  $\nu$  indica que los datos obtenidos son esperables si el modelo es el correcto. Es decir: o el modelo es el correcto, o las mediciones se parecen al modelo propuesto por una cuestión de azar. Por lo tanto, un  $\chi^2$  “bueno” no garantiza que el modelo sea el correcto, sino simplemente que el modelo propuesto ajusta lo suficientemente bien a los datos. En estadística se dice que no se puede rechazar la hipótesis de que el modelo sea el correcto.

Lo habitual es tomar algún criterio para determinar qué tan poco probable tiene que ser el  $\chi^2$  obtenido para rechazar la hipótesis de que el modelo ajusta a los datos. Cada disciplina suele usar criterios distintos, pero es habitual tomar un umbral de tolerancia del 5% de probabilidad de equivocación. Y algo clave: ¡ni un “buen”  $\chi^2$  ni ningún estadístico **asegura** que el modelo sea el correcto!

En particular, el  $\chi^2$  no distingue si el ajuste pasa por arriba o por abajo de los datos, o cuántas veces los cruza, o si falta algún parámetro en el ajuste, o si algún parámetro está de más, o una infinidad de otros posibles criterios para determinar si el ajuste es bueno o malo. Entonces lo podemos complementar con algo que ya sabemos de Laboratorio 1: los residuos ( $y_{\text{medido}} - y_{\text{modelo}}$ ) deben ser aleatorios y no estar correlacionados con ninguna otra variable, ni correlacionados entre sí. Si presentan una distribución no aleatoria, es indicativo de que el modelo no está ajustando bien a los datos.

## 2.3. Modelando la respuesta en frecuencias del par emisor-receptor

Al ajustar mediciones es crucial que los modelos seleccionados estén respaldados por fundamentos físicos sólidos. Esto garantiza que nuestras interpretaciones y predicciones estén en línea con las leyes de la física y que los resultados sean confiables y significativos para la comprensión de los fenómenos estudiados.

Propusimos que, debido al comportamiento lineal del PE con el voltaje de alimentación, si se alimenta a este con una señal armónica, sus oscilaciones mecánicas también serán armónicas. El modelo más sencillo que podemos pensar para el PE es entonces el del oscilador armónico amortiguado sometido a una fuerza externa armónica (el campo eléctrico generado por la alimentación), cuya ecuación de movimiento está dada por

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma_1 \frac{dx}{dt} + \omega_{o1}^2 x = \frac{F_o}{m} \cos(\omega t), \quad (2.1)$$

en donde  $\gamma_1$  es la constante de amortiguamiento para el emisor, que en este caso representa pérdidas mecánicas por fricción, la fuerza externa representa la fuente de alimentación y el término lineal una fuerza restitutiva caracterizada por  $\omega_{o1} = \sqrt{k/m}$ .

Nos preocupamos ahora por la solución particular porque, como sabemos, la homogénea decae con un tiempo característico  $1/\gamma_1$ . En notación compleja, dicha solución está dada por

$$x_E(\omega, t) = \frac{F_o}{m} \frac{e^{i\omega t}}{(\omega_{o1}^2 - \omega^2) + i\omega\gamma_1}. \quad (2.2)$$

Recordemos que para que la solución tenga sentido físico, debemos tomar la parte real, de modo que la solución toma la forma  $x_E^R(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ , con  $\tan(\phi) = \frac{-\gamma_1\omega}{(\omega_{o1}^2 - \omega^2)}$  y  $A = \frac{F_o/m}{\sqrt{(\omega_{o1}^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_1\omega)^2}}$ .

Ahora bien, la ecuación 2.2 predice el desplazamiento del PE emisor cuando es alimentado por una fuente de tensión alterna, bajo un modelo muy simple que considera una única resonancia en  $\omega_{o1}$ . Si el PE tuviera más resonancias, podríamos plantear una combinación lineal de soluciones similares a la de la ecuación 2.2 pero con distintas frecuencias  $\omega_{oi}$ . Por otro lado, hasta ahora consideramos únicamente al PE emisor. Como mencionamos anteriormente las oscilaciones mecánicas del PE producen ondas de ultrasonido que se propagan con una amplitud proporcional a  $x_E$  hasta llegar al receptor. El receptor transforma a la onda de ultrasonido en vibraciones mecánicas y luego en una tensión. Idealmente el PE receptor tiene la misma frecuencia de resonancia que el emisor; sin embargo, esto no siempre es cierto.

Entonces, podemos plantear ahora una ecuación similar a la ecuación 2.1, considerando que la onda de ultrasonido que produce las oscilaciones mecánicas del PE receptor tiene una amplitud proporcional al desplazamiento del PE emisor  $x_E$ , es decir

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma_2 \frac{dx}{dt} + \omega_{o2}^2 x = \alpha x_E(\omega, t), \quad (2.3)$$

en donde ahora consideramos que la constante de amortiguamiento  $\gamma_2$  y la frecuencia característica  $\omega_{o2}$  son distintas a las del PE emisor.

La solución particular de la ecuación 2.3 es

$$x_{ER}(\omega, t) = \frac{Be^{i\omega t}}{((\omega_{o1}^2 - \omega^2) + i\omega\gamma_1)((\omega_{o2}^2 - \omega^2) + i\omega\gamma_2)}, \quad (2.4)$$

donde  $B$  es una constante.

Como dijimos anteriormente, la solución que tiene sentido físico es la parte real de la ecuación 2.4, de modo que la solución toma la forma  $x_{ER}^R(t) = C_{ER} \cos(\omega t + \phi_{ER})$ , en donde

$$C_{ER} = B \sqrt{\frac{[(\omega_{o1}^2 - \omega^2)(\omega_{o2}^2 - \omega^2) - \omega^2\gamma_1\gamma_2]^2 + [(\omega_{o2}^2 - \omega^2)\omega\gamma_1 + (\omega_{o1}^2 - \omega^2)\omega\gamma_2]^2}{[(\omega_{o1}^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_1\omega)^2]^2 [(\omega_{o2}^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_2\omega)^2]^2}}. \quad (2.5)$$

Si ahora suponemos que  $\omega_{o1} = \omega_{o2} = \omega_o$  y  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ ,

$$C_{ER} = \frac{B}{[(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2]}. \quad (2.6)$$

**Para pensar:** Las ecuaciones 2.5 y 2.6 consideran que los PE pueden ser modelados por osciladores armónicos simples con una única frecuencia característica, y pueden ser utilizadas para intentar ajustar a las mediciones. ¿Cómo se extiende este modelo si los PE están caracterizados por más de una frecuencia característica?

## 2.4. Características de las ondas emitidas por los piezoeléctricos

Como se mencionó con anterioridad, al alimentar al emisor con una onda armónica se producen ondas de ultrasonido que se propagan en el aire. Las ondas emitidas son tridimensionales, y para caracterizarlas mediremos la forma del frente de ondas (es decir, si es plano, esférico o cilíndrico), la longitud de onda, el período, la frecuencia, el ángulo de divergencia, la distribución de amplitud, etc.

La ecuación de ondas tridimensional para un medio lineal, isótropo y homogéneo, está dada por

$$\frac{\partial^2 \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 \Psi(\vec{r}, t), \quad (2.7)$$

donde  $\Psi(\vec{r}, t)$  representa a la perturbación en el espacio (desplazamiento o presión para el caso de ondas acústicas en aire),  $\vec{r}$  es el vector de coordenadas espaciales,  $t$  el tiempo y  $v$  la velocidad de propagación, que depende de las características del medio y de la frecuencia. Esta última cumple la relación de dispersión lineal de las ondas

$$\omega = vk, \quad (2.8)$$

donde  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  es el número de onda y  $\lambda$  la longitud de onda. La solución de esta ecuación puede escribirse como

$$\Psi(\vec{r}, t) = A(\vec{r}) \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \Phi_0), \quad (2.9)$$

en donde  $A(\vec{r})$  es una amplitud dependiente de la posición,  $\Phi_0$  una fase inicial y  $\vec{k}$  el vector de ondas cuyo módulo es  $k$ . Podemos definir también a la fase de la onda como

$$\Phi(\vec{r}, t) = \vec{k}\vec{r} - \omega t + \Phi_0. \quad (2.10)$$

**Nota:** Se puede usar la notación compleja para escribir a la función de onda

$$\Psi(\vec{r}, t) = A_{\vec{r}} e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \Phi_0)}, \quad (2.11)$$

lo que hace más fácil realizar ciertas operaciones, pero el verdadero significado físico lo tiene la parte real.

Además, por el principio de superposición, la solución más general es combinación lineal de todas las posibles soluciones de la ecuación (una suma de ondas con distintas frecuencias, amplitudes, vector de ondas).

Examinemos las soluciones de la ecuación de ondas. Éstas dependerán de la geometría del problema y de las características del medio, que por ahora supondremos lineal, isótropo y homogéneo. En esas condiciones las soluciones típicas son las ondas planas, las ondas esféricas y las ondas cilíndricas, pero existen otros tipos, por ejemplo los vórtices.

Para el problema en coordenadas cartesianas la solución más sencilla es una **onda plana**. Supongamos que la onda se propaga en la dirección  $\hat{z}$ , por lo que  $\vec{k} = k\hat{z}$  y está

polarizada en  $\hat{x}$ . Por simplicidad también supondremos que la amplitud es constante,  $A(\vec{r}) = A_0$  y que la fase inicial es cero,  $\Phi_0 = 0$ , aunque estas dos consideraciones no son necesarias. De este modo, la solución de la ecuación de ondas es

$$\Psi(\vec{r}, t) = A_0 \cos(kz - \omega t)\hat{x}, \quad (2.12)$$

siendo la fase  $\Phi(z, t) = kz - \omega t$ .

Ahora busquemos cuál es el conjunto de puntos en el espacio que oscilan con la misma fase. Para eso suponemos una fase constante ( $\Phi(z, t) = cte$ ) y despejamos la variable  $z$ , obteniendo

$$z = \frac{\omega}{k}t + cte = vt + cte.$$

Es decir, la fase es constante en planos perpendiculares a la dirección de propagación  $\hat{z}$ . Decimos entonces que el **frente de ondas** es plano. Estos planos se propagan con la velocidad de propagación  $v$  (o velocidad de fase) hacia los  $z$  positivos. Además, por cómo definimos inicialmente a la onda, la amplitud también es constante en esos planos. En la figura 2.5 se puede observar un esquema de estos planos de fase y amplitud constante.

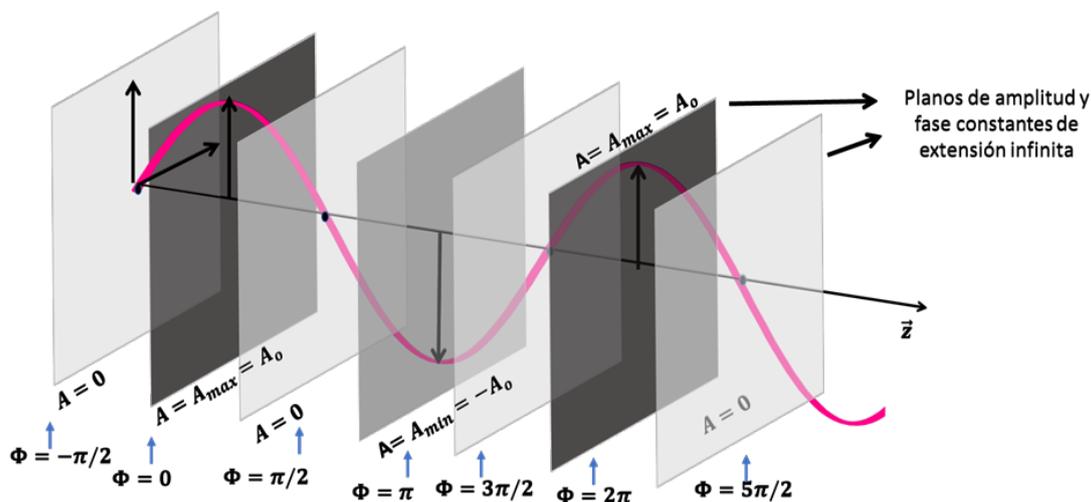


Figura 2.5: Esquema de planos de fase y amplitud constante de una onda ideal.

**Nota:** Análogamente podemos definir una onda que se propaga hacia  $z$  negativos con un solo cambio de signo en el vector de ondas  $\vec{k}$ :  $\Psi(\vec{r}, t) = A_0 \cos(-kz - \omega t)\hat{x}$ .

En la figura se puede observar que para  $\Phi = 0$  y para  $\Phi = 2\pi$  la onda tiene igual amplitud y la misma pendiente. Lo mismo pasa para  $\Phi = -\pi/2$  y  $\Phi = 3\pi/2$  o para

$\Phi = \pi/2$  y  $\Phi = 5\pi/2$ . La diferencia de fase entre estos planos es  $2\pi$ . Es decir, existen dos planos separados en una distancia  $\Delta z$ , cuya distancia en fase es  $2\pi$ . Veamos cual es esa distancia, resolviendo la siguiente ecuación:

$$\Phi(z + \Delta z, t) - \Phi(z, t) = 2\pi, \quad (2.13)$$

o lo que es lo mismo

$$k_z(z + \Delta z) - k_z z = 2\pi. \quad (2.14)$$

Despejando se obtiene que  $\Delta z = \lambda$ . Es decir que la distancia mínima entre planos de igual fase (solo difieren en  $2\pi$ ), o la distancia entre planos consecutivos de igual fase, es la longitud de onda  $\lambda$ . Esta situación se encuentra esquematizada en la figura 2.6, en donde se muestran dos planos de igual fase (frente de ondas) consecutivos separados por una distancia  $\lambda$ . Entonces, medir la longitud de onda, es medir la distancia entre planos de igual fase.

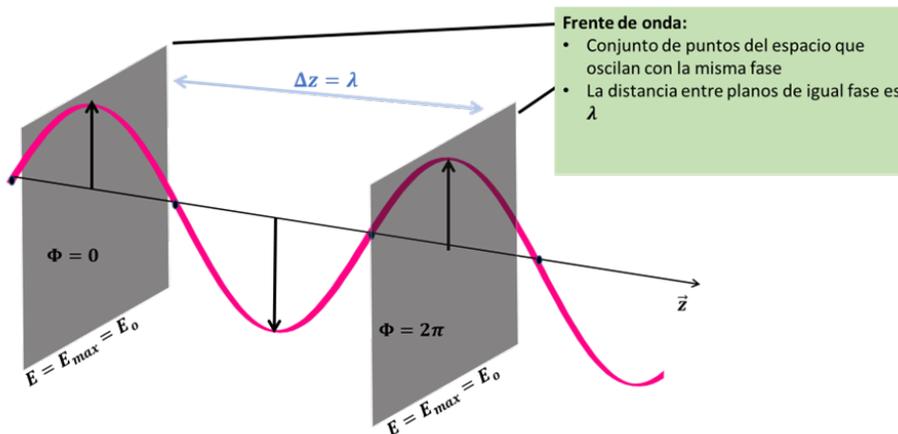


Figura 2.6: Se muestran dos planos de igual fase consecutivos separados por una distancia  $\lambda$ .

En general podemos obtener cómo se mueve el frente de ondas derivando la expresión de la fase y suponiendo que la fase es constante. Es decir:

$$\Phi(x, t) = k_z z - \omega t = \Phi_0,$$

y luego derivando

$$\frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t} = k_z \frac{dz}{dt} - \omega = 0,$$

a partir de la cual podemos definir la velocidad de fase  $v_f$  como

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k_z} = v_f = v. \quad (2.15)$$

Vimos que, en el caso de tener una onda plana, la fase es constante en planos de extensión infinita. Análogamente se puede ver que para problemas con simetría esférica (fuentes puntuales) o simetría cilíndrica (ranuras o lentes cilíndricas), la fase se mantiene constante en esferas o cilindros, respectivamente. De este modo encontramos frentes de ondas esféricos o cilíndricos. El primer caso se encuentra esquematizado en la figura 2.7.

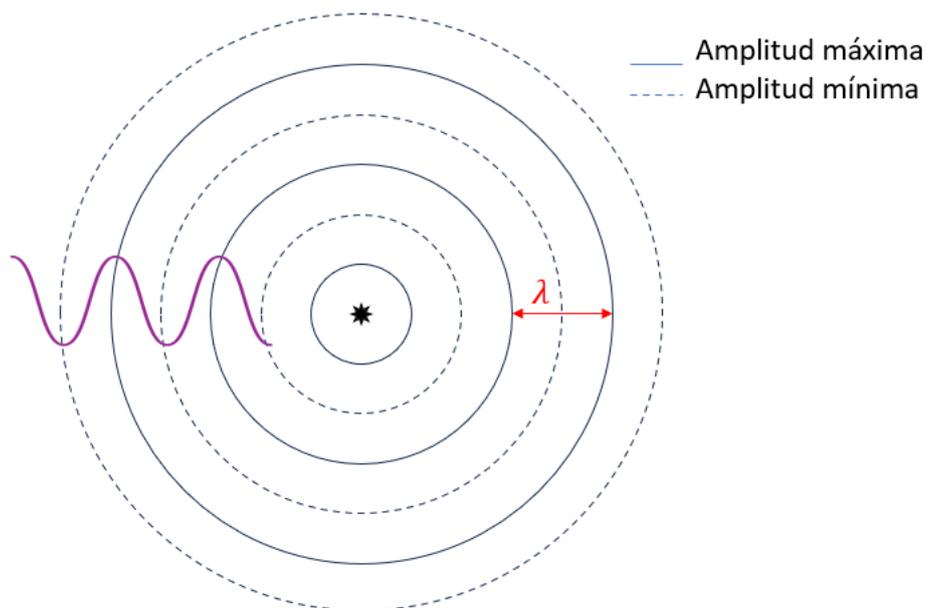


Figura 2.7: Esquema de un frente de ondas esférico. Las líneas continuas corresponden a la amplitud máxima de la onda ( $A/r$ ), las líneas cortadas corresponden a la amplitud mínima de la onda ( $-A/r$ ). La longitud de onda es la distancia entre esferas de igual fase.

Si resolvemos la ecuación de ondas para problemas con distintas simetrías, podemos obtener la dependencia de la fase y de la amplitud con la posición para las ondas cilíndricas y esféricas. En la figura 2.8 se muestran las características para distintos frentes de onda, en donde se usa que la intensidad de la onda es  $I \propto |\Psi(\vec{r}, t)|^2$ . Para cada tipo de fuente se muestra un diagrama del frente de ondas, y la dependencia de la amplitud y de la intensidad con la distancia. Por ejemplo, se puede observar que la amplitud no depende de la distancia en el caso de la onda plana, es inversamente proporcional a la raíz de la distancia en el caso de la onda cilíndrica, y es inversamente proporcional a la distancia en el caso de la onda esférica.

La dependencia de la intensidad con la distancia también se puede obtener empleando argumentos sobre la geometría del problema. Por ejemplo, calculemos la intensidad para una fuente puntual de potencia  $W$  que emite un frente de onda esférico como se esque-

matiza en la figura 2.9. En primer lugar tomemos una superficie esférica de radio  $r$  en el entorno de la fuente. La intensidad sobre la superficie es la potencia por unidad de área  $S = 4\pi r^2$ , es decir que

$$I = \frac{W}{S} = \frac{W}{4\pi r^2} \rightarrow A \sim \frac{\sqrt{W}}{r}.$$

Entonces, vemos que la amplitud es inversamente proporcional al radio. Además, se observa como a medida que aumenta el radio, la intensidad (potencia por unidad de área) disminuye.

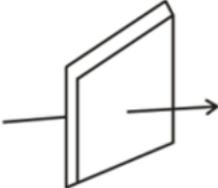
Frente de ondas	Fuente	Diagrama del Frente de ondas	Variación de la amplitud con la distancia	Variación de la Intensidad con la distancia
Esféricas	puntual		$A \propto \frac{1}{r}$	$I \propto \frac{1}{r^2}$
Cilíndricas	Lineal, rendija		$A \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$	$I \propto \frac{1}{r}$
planas	Extensa y grande situada en distancias grandes		$A = cte$	$I = cte$

Figura 2.8: Tabla con la descripción esquemática de fuentes con un frente de ondas esférico, cilíndrico y plano. Se muestra además la dependencia de la amplitud y de la intensidad con la distancia.

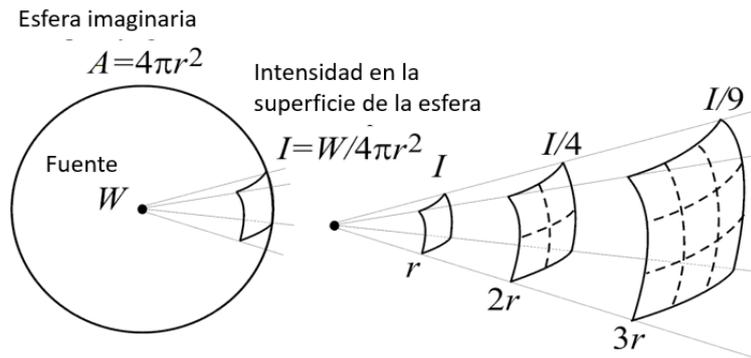


Figura 2.9: Esquema de la dependencia de la intensidad en función de la distancia radial para una fuente con frente de ondas esférico.

Ahora bien, hasta ahora hablamos de situaciones idealizadas en donde no tenemos restricción en la distribución de amplitud (la onda plana tiene amplitud constante en planos de extensión infinita, la onda esférica tiene amplitud constante en esferas). Sin embargo, digamos que la hipótesis sobre la amplitud constante no era estrictamente necesaria. De hecho, en los montajes puede haber aperturas que recorten al frente de ondas o que produzcan difracción. En particular, los propios montajes de las fuentes hacen que estas no puedan ser consideradas ideales (ver en la figura 2.10 un ejemplo de montaje para PE). Además, si el haz se difracta en la apertura (comparar el tamaño del PE con la longitud de onda de la onda de ultrasonido) es probable que este sea divergente; es decir, que la región en donde la amplitud es distinta de cero crece con la distancia de propagación.

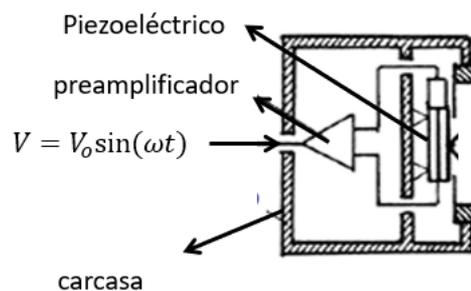


Figura 2.10: Un montaje posible para un PE. Se observa al PE montado dentro de una carcasa metálica. La línea punteada es una malla para proteger al PE. Se alimenta al PE con una señal armónica que se amplifica con un pre-amplificador.

Según lo discutido, para caracterizar a la onda deberíamos medir la longitud de onda, la dependencia de la amplitud con la distancia, determinar cuál es el frente de ondas, la divergencia, la distribución de amplitud en el plano transversal a la dirección de propagación. Vamos a dividir los experimentos según hagamos mediciones a lo largo de la dirección de propagación o en la dirección transversal.

**Experimental 2:** Mediciones a lo largo de la dirección de propagación:

- a. Medir amplitud en función de la distancia  $A(\vec{r})$ .
- b. Medir la longitud de onda (distancia entre planos de igual fase)

**Experimental 3:** Mediciones en la dirección perpendicular a dirección de propagación:

- a. Determinar cuál es el frente de ondas. Es decir, encontrar los planos, esferas o cilindros (o cualquier otra superficie) en donde la fase constante.
- b. Determinar cuál es la distribución de amplitud en el plano perpendicular a la dirección de propagación.
- c. Medir la divergencia del haz.

## 2.5. Repaso de ondas en gases y condiciones de borde

Recordemos que, dado que estamos tratando ondas acústicas que se propagan en un gas (aire), normalmente nos interesan las ondas de desplazamiento  $\Psi(x, t)$  (cómo se desplazan las partículas en el gas), las ondas de presión  $P(x, t)$  (cuáles son las fluctuaciones de presión ejercidas por las partículas en movimiento), y las ondas de densidad  $\rho(x, t)$  (cuáles son las fluctuaciones de densidad inducidas por el movimiento de las partículas del gas). Recordemos que tanto la presión como la densidad se pueden obtener a partir de la onda de desplazamiento. En el caso de la presión, esta se puede estimar como el módulo de compresibilidad  $\kappa$  (en unidades de presión, por ejemplo Pa) por la variación de volumen  $\Delta V$  respecto al volumen medio  $V_o$ , a partir de lo que se puede deducir que

$$P(x, t) = -\kappa \frac{d\Psi(x, t)}{dx}. \quad (2.16)$$

La presión está relacionada con la compresión o expansión del gas: cuando se comprime en un volumen más chico, aumenta la presión; cuando se expande a un volumen mayor, disminuye la presión.

En el caso de la densidad, se puede calcular como

$$\rho(x) = \rho_o \frac{d\Psi(x, t)}{dx}, \quad (2.17)$$

donde  $\rho_o$  es la densidad media.

Dado que el PE receptor puede medir variaciones de presión, escribamos las condiciones de borde para el desplazamiento y la presión, para una condición de borde cerrada como se esquematiza en la figura 2.11. Si las partículas están en el entorno de una pared, estas van a estar quietas respecto a dicha pared. Recordar que la función de onda de desplazamiento nos dice si las partículas se mueven a la derecha o a la izquierda, y cuánto lo hacen. Como en este experimento la pared es donde se refleja la onda, y las partículas están quietas, entonces la condición de borde es que la función de onda total (todas las ondas que viajan hacia la pared  $\Psi^+(x, t)$  más todas las ondas que se reflejan en la pared  $\Psi^-(x, t)$ ) es nula. Es decir

$$\Psi^+(0, t) + \Psi^-(0, t) = 0. \quad (2.18)$$

Esto implica que al reflejarse la onda de desplazamiento en dicha pared, hay un cambio de fase de  $\pi$  radianes dado que  $\Psi^+(0, t) = -\Psi^-(0, t)$ . En cuanto a las ondas de presión, en la pared es en donde se ejerce la presión máxima. Pensar que si todas las partículas se mueven hacia la pared, la presión es máxima. Esto es, que la derivada de la presión total sea cero en la pared; es decir,

$$\left. \frac{d[P^+(x, t) + P^-(x, t)]}{dx} \right|_{x=0} = 0. \quad (2.19)$$

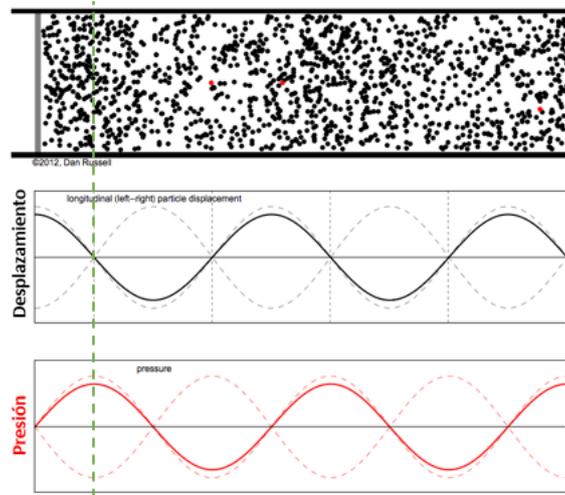


Figura 2.11: Condición de borde extremo cerrado. El desplazamiento total en la pared es nulo, la presión es máxima

Más adelante veremos otras condiciones de borde.

## 2.6. Interferencia de ondas de ultrasonido

Habrán notado que, al medir la amplitud en función de la distancia, se observa una serie de ondulaciones periódicas montada sobre “la señal esperada”. Discutimos en clase sobre posibles explicaciones en base a la interferencia de ondas que se reflejan sucesivamente entre el emisor y el receptor.

Supongamos que tenemos dos fuentes de ondas esféricas como las que se muestran en la figura 2.7, situadas a una distancia  $d$ , tal como se esquematiza en la figura 2.12. Recordemos que las líneas continuas representan a la amplitud es máxima y las punteadas a la mínima. Podemos analizar cómo es la superposición de las ondas sobre los frentes de ondas y estimar cuál es la onda resultante. Supongamos por el momento que las amplitudes no dependen de la distancia radial, y veamos qué sucede al superponer dos líneas continuas o dos líneas punteadas. Las líneas continuas significan que la amplitud es máxima ( $A$ ), de modo que la amplitud total en la superposición de dos líneas es  $2A$ . En las líneas punteadas la amplitud es  $-A$ , por lo que la suma en donde se superponen dos líneas punteadas es  $-2A$ . Dado que en la práctica detectamos la amplitud pico a pico, en ambos casos la medición será  $2 \times 2A$  (recordar que la amplitud pico a pico es el doble del módulo de la amplitud en una señal periódica). Marcamos con puntos rojos a estos puntos en el esquema de la figura 2.12. En cambio, si se superpone una línea punteada y una continua, la

amplitud total es  $A + (-A) = 0$ ; es decir, un mínimo de amplitud. Observar que, dado que la amplitud decae con la distancia, es probable que los mínimos no sean nodos (¿por qué?).

La figura que resulta de unir mínimos y máximos forma hiperboloides. Si observamos entonces la línea que une a las dos fuentes, vemos que para la situación particular que graficamos, observamos máximos de intensidad separados por  $\lambda/2$ . Veamos en detalle qué sucede con la superposición de las ondas cuando medimos sobre una línea paralela a la línea que une a las fuentes, o sobre la línea que une a las fuentes.

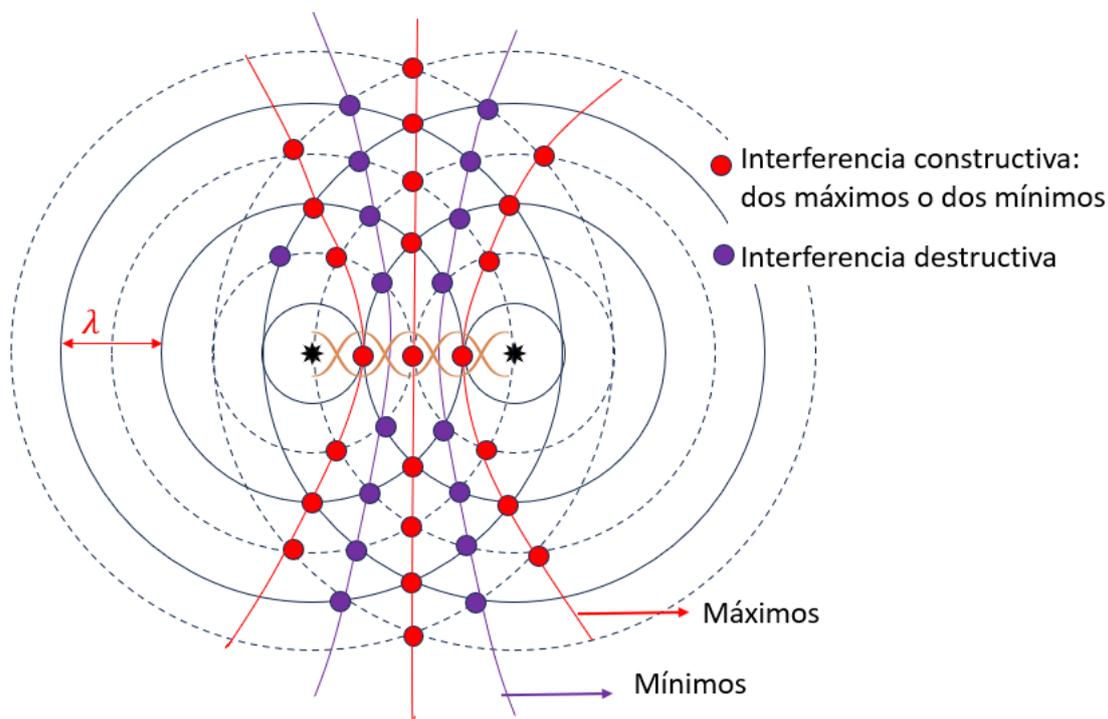


Figura 2.12: Superposición de dos ondas esféricas. En línea continua se esquematizan las crestas de cada onda de cada fuente, y en línea punteada los valles. Los puntos de encuentro de dos máximos o dos mínimos (en rojo) forman interferencia constructiva. Los puntos de encuentro de un máximo y un mínimo (cada uno de distinta fuente) forman interferencia destructiva. Esto genera una onda estacionaria que cada  $\frac{\lambda}{2}$  tiene un nodo (o antinodo).

### 2.6.1. Interferómetro de Fabry-Pérot acústico

En óptica, el interferómetro de Fabry-Pérot, también conocido como resonador (o cavidad) óptico, consiste en dos espejos de alta reflectividad. Cuando la onda de entrada tiene una frecuencia cercana a una de las frecuencias de resonancia de la cavidad se producirá una realimentación positiva dentro de la misma. La contribución de la onda de entrada

se suma constructivamente a la onda circulante.

En el caso de las ondas de ultrasonido, la onda emitida se puede reflejar sucesivas veces en el emisor y el receptor, de manera de formar una onda estacionaria. Para encontrar la función de onda en este sistema se debe calcular la superposición de ondas que se refleja múltiples veces entre las dos superficies reflectantes e imponer condiciones de contorno. Podemos hacerlo tanto con las ondas de presión o con las de desplazamiento.

Podemos pensar al par emisor-receptor de ultrasonido como una cavidad resonante, análoga a un interferómetro de Fabry-Pérot, donde se produce una onda estacionaria, producto de la reflexión de la misma en el par. Describimos la onda emitida como:

$$P_+(x, t) = \frac{1}{x - x_e} \cos(\omega t - k(x - x_e)) \quad (2.20)$$

siendo  $x_e$  la posición del emisor. La onda reflejada por el receptor se describe a partir del coeficiente de reflexión  $R$  y la posición  $x_r$  del receptor:

$$P_-(x, t) = \frac{-1}{x - (2x_r - x_e)} R \cos(\omega t + k(x - (2x_r - x_e))). \quad (2.21)$$

Con el mismo razonamiento podemos definir la presión de las ondas reflejadas dos ( $\Psi_{++}(x, t)$ ) y tres ( $\Psi_{--}(x, t)$ ) veces:

$$P_{++}(x, t) = \frac{1}{x - (-2x_r + 3x_e)} R^2 \cos(\omega t + k(x - (-2x_r + 3x_e))), \quad (2.22)$$

$$P_{--}(x, t) = \frac{-1}{x - (4x_r - 3x_e)} R^3 \cos(\omega t + k(x - (4x_r - 3x_e))). \quad (2.23)$$

Podríamos estudiar las contribuciones de orden mayor, pero se vuelven despreciables frente a la onda emitida inicialmente. Como resultado de estas reflexiones, el receptor medirá la suma de estas ondas, observando un efecto de interferencia entre las mismas. Para entender mejor lo que sucede, pueden ver la simulación en Colab “Cavidad\_L2F.ipynb” (ver Campus).

**Responder usando las simulaciones:**

- ¿Están de acuerdo con que las ondas tengan esa pinta? Corroboen que estén bien calculadas.
- ¿Qué observan si ahora miden en distintos  $x_r$  (que valores de  $x_r$  es razonable tomar)?
- ¿Y para distintos  $R$ ?

- d. ¿Puede el comportamiento de la amplitud en la cercanía del emisor ser explicado por interferencia de ondas reflejadas en el par emisor-receptor?

### Comparando con el experimento

- a. ¿Qué valor creen que podría tener  $R$ ?
- b. ¿Bajo qué argumento se pueden despreciar las reflexiones de orden superior  $P_{+++}$ ,  $P_{----}$ , etc?
- c. ¿El receptor mide solo las ondas que inciden, o también las reflejadas?

## 2.6.2. Interferómetro de Young acústico

Supongamos que se tienen dos emisores separados por una distancia  $h$  y un detector que puede desplazarse en línea recta (eje  $y$ ) sobre un plano situado a una distancia  $L$  perpendicular a la recta de separación de los emisores, como se ilustra en la Fig. 2.13. Llamando  $d_A$  y  $d_B$  a las distancias de las respectivas fuentes al detector, es decir:

$$d_A = |\vec{d}_A| = \sqrt{L^2 + (y + h/2)^2}, \quad (2.24)$$

$$d_B = |\vec{d}_B| = \sqrt{L^2 + (y - h/2)^2}. \quad (2.25)$$

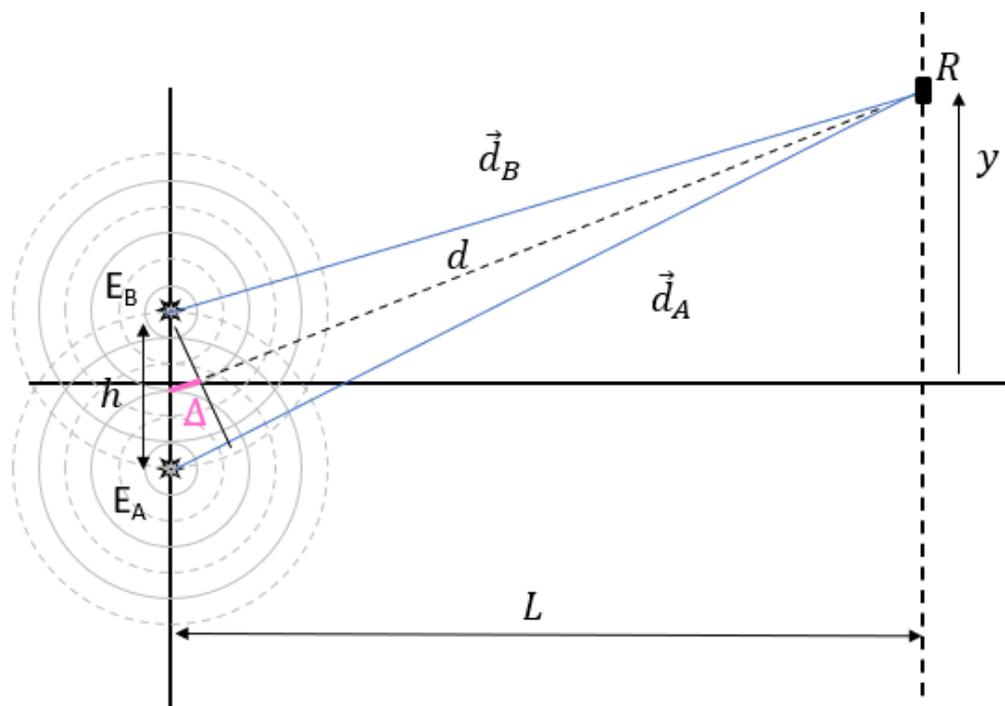


Figura 2.13: Esquema del experimento de Young acústico.

En el problema planteado en la Fig. 2.13, la expresión para la perturbación de la

presión detectada por el receptor  $R$  resulta

$$p = A \cos \left( -\omega_A t + \omega_A \frac{d_A}{c_s} + \Phi_{A_0} \right) + B \cos \left( -\omega_B t + \omega_A \frac{d_B}{c_s} + \Phi_{B_0} \right). \quad (2.26)$$

Consideremos el caso que las amplitudes, las frecuencias y la fases iniciales de las dos ondas sean iguales (y sin pérdida de generalidad se puede poner  $\Phi_{A_0} = \Phi_{B_0} = 0$ , ya que puedo elegir  $t = 0$  cuando esto se cumpla), entonces

$$p = A \left\{ \cos \left( -\omega t + \omega \frac{d_A}{c_s} \right) + \cos \left( -\omega t + \omega \frac{d_B}{c_s} \right) \right\}. \quad (2.27)$$

**Tarea:** Escribiendo  $d_A = d + \Delta$  y  $d_B = d - \Delta$  obtenga la expresión de  $p$  en función de los parámetros  $d$  y  $\Delta$  que se muestra en las ecuaciones 2.28 y 2.29.

La perturbación total se puede escribir como:

$$p = p_0 \cos \left( \omega \left( t - \frac{d}{c_s} \right) \right) \quad (2.28)$$

siendo la amplitud

$$p_0 = 2A \cos \left( \omega \frac{\Delta}{c_s} \right) \quad (2.29)$$

Notar que las variaciones de  $d$  producen una variación de fase en la señal, mientras que las de  $\Delta$  modifican la amplitud de la señal.

**Franjas de interferencia.** Teniendo en cuenta que la longitud de onda vale  $\lambda = 2\pi c_s / \omega$ , la Ec. (2.29) puede reescribirse como

$$p_0 = 2A \cos \left( 2\pi \frac{\Delta}{\lambda} \right) \quad (2.30)$$

lo que indica que la amplitud tendrá máximos y mínimos a medida que se varía  $\Delta$  (ya sea variando  $y$ , o  $h$ , o  $L$ ) y que, además, depende de la longitud de onda. Habrá máximos de amplitud para algunos valores de  $\Delta$ , que llamamos  $\Delta_m$ , cuando

$$\Delta_m = \frac{\lambda}{2} m \quad (2.31)$$

con  $m$  entero.

Si llamamos  $y_m$  la posición del detector en el máximo de orden  $m$ , se tiene que

$$\Delta_m = \frac{d_A - d_B}{2} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{L^2 + (y_m + h/2)^2} - \sqrt{L^2 + (y_m - h/2)^2} \right). \quad (2.32)$$

Como, en general, la distancia  $L$  es bastante mayor que la separación entre los emisores, un desarrollo en serie de  $\Delta_m$  en función de  $h$  queda

$$\Delta_m = \frac{h}{2} \frac{y_m}{\sqrt{L^2 + y_m^2}} + \mathcal{O}(h^3). \quad (2.33)$$

Notar que estas aproximaciones van a ser razonables incluso cuando no se cumpla  $h \ll L$  porque el término cuadrático se ha cancelado. Esto dice, por ejemplo, que si  $h \sim 0,1L$  se tendrá un error del 1%.

Si, además,  $y_m \ll L$  (o sea, si se observan sólo los primeros órdenes de interferencia) se puede escribir

$$\Delta_m = \frac{hy_m}{2L} \quad (2.34)$$

con lo cual la Ec. (2.31) resulta

$$y_m = \frac{\lambda L}{h} m. \quad (2.35)$$

Es decir que los máximos de interferencia están equiespaciados. La distancia entre dos máximos consecutivos, llamada interfranja  $i$ , vale

$$i = y_{m+1} - y_m = \frac{\lambda L}{h}. \quad (2.36)$$

En esta aproximación, para  $h$  y  $L$  fijos, la interfranja es constante y a partir de su medición se puede calcular la longitud de onda.

**Medición de la longitud de onda.** Se propone una práctica de laboratorio para medir la longitud de onda en ultrasonido utilizando dos emisores y un receptor, que es conceptualmente similar a la experiencia de Young en luz visible. En base al esquema de la Fig. 2.13 se muestra el dispositivo experimental en la Fig. 2.14.

**Para pensar:** Juntando lo explicado en la Sección 2.6.2, se te ocurre cómo medir la longitud de onda en este experimento?

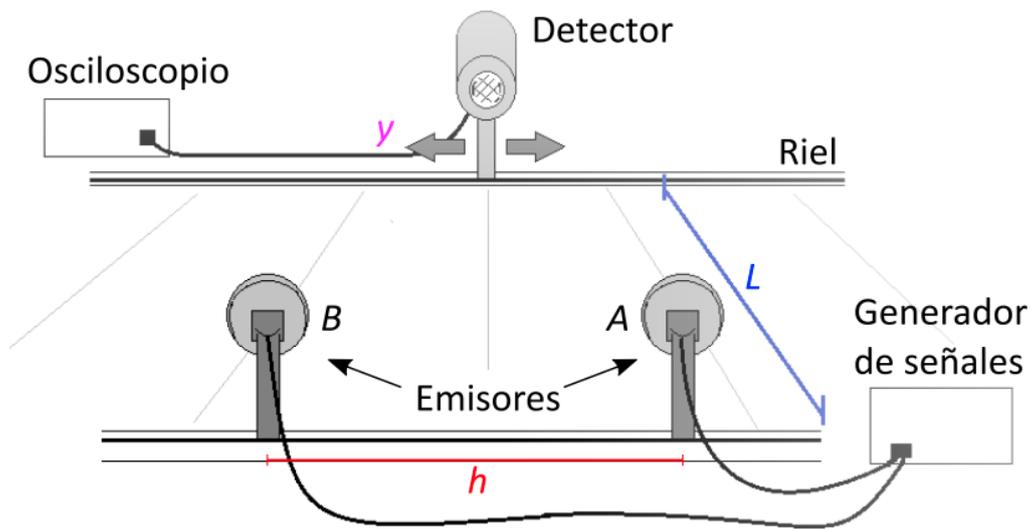


Figura 2.14: Esquema del dispositivo experimental para el experimento de Young acústico.

