

Capítulo 3

La respuesta del detector en las mediciones

Pensemos acerca de algunas ideas sobre situaciones en que realizamos mediciones (ver Fig. 7.1):

1. **Interferometría.** En el experimento de interferencia con dos emisores se produce una señal periódica dependiente de la posición. Si queremos medir la dependencia funcional debemos desplazar al detector a lo largo de la coordenada x mientras medimos la señal en el PE receptor. Sin embargo, el detector no es puntual (su respuesta está extendida en el espacio y no es una delta ideal); por lo tanto, no se mide la señal en la posición x sino el promedio de la señal en un rango $[x, x + \Delta x]$.

2. **Espectrometría.** Un espectrómetro permite separar la luz en distintos colores (frecuencias o longitudes de onda) empleando redes de difracción. De esta manera cada color va a ocupar un lugar en una posición diferente. Para medir la luz en cada color se utiliza un detector que se lo desplaza a través de la figura de difracción (espectro) mientras se mide la intensidad. Sin embargo, no es infinitamente angosto (no es una delta), y lo que en realidad mide es la intensidad de la luz para un rango de longitudes de onda cercanas a las que se quiere medir ($[\lambda, \lambda + \Delta\lambda]$).

3. **Imágenes.** Una fuente de luz produce sombras cuando ilumina un objeto. Si la fuente de luz es puntual, la sombra que produce es la sombra “verdadera”. Sin embargo las fuentes de luz reales no son puntuales. ¿Cómo difiere la sombra producida por una fuente real de la sombra producida por una fuente puntual? ¿Qué pasa si el tamaño de la fuente es más grande?

4. **Microscopía.** En un microscopio de fluorescencia se utiliza un haz láser enfocado en una muestra y se mide la luz emitida por la muestra en el punto focal (típicamente un área de $1\mu m$ de diámetro). La imagen de fluorescencia se construye barriendo el haz sobre todos los puntos de la muestra mientras se adquiere la intensidad. Nuevamente, dado que el punto focal no es un punto singular en el espacio (no es una delta), la fluorescencia que se mide proviene de la pequeña área en la que está enfocado el haz.

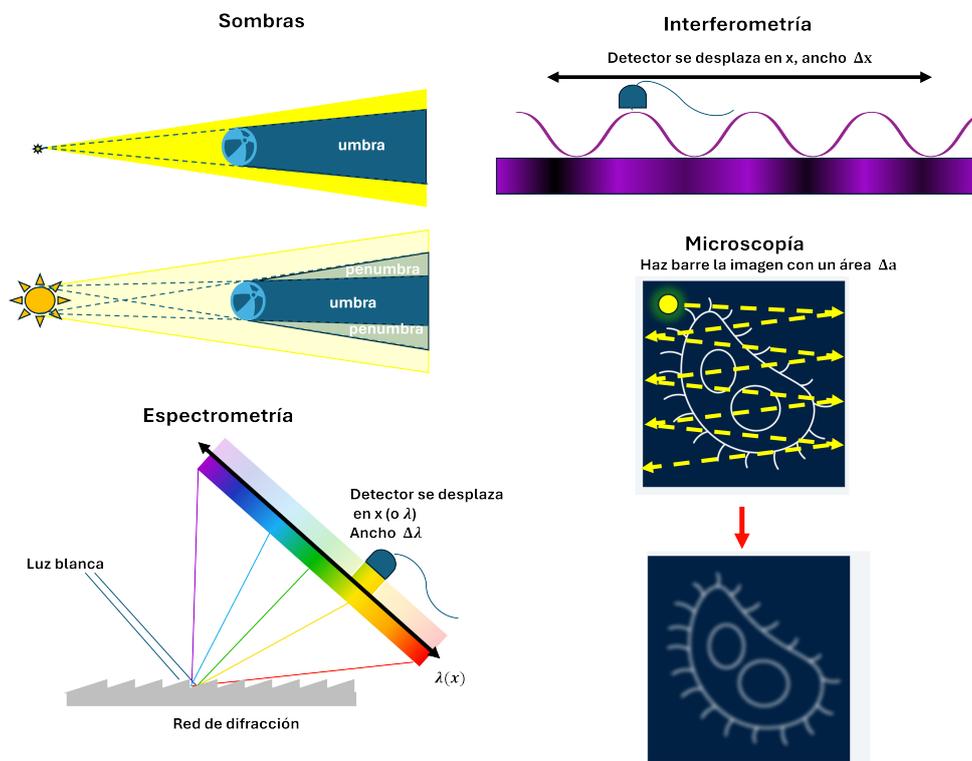


Figura 3.1: Ejemplos de sistemas en los cuales se observa la influencia de tener un detector o una fuente que no son puntuales. En el caso de las sombras, una fuente no puntual produce la zona de penumbra, produciendo un efecto de borronado respecto a lo que se obtendría con una fuente puntual. En espectrometría, en lugar de medir una “única” longitud de onda, se mide un rango $\lambda, \lambda + \Delta\lambda$. En interferometría, en lugar de medir en x integramos la señal en un rango $x, x + \Delta x$. En microscopía, en lugar de medir en (x, y) integramos en un área dada por el área del haz. Es decir: en la práctica no es posible medir “un punto” del espacio, sino un intervalo alrededor de ese punto.

En todos estos ejemplos, ¿Cómo se relaciona lo que se está midiendo con el fenómeno físico que se quiere caracterizar, si en cada punto que se mide se está mezclando la señal que se quiere medir con la señal en los puntos vecinos? ¿Cómo depende la medición del

tamaño del detector?

Siempre que se mida una variable física, la respuesta del instrumento impacta en la medición. La respuesta del instrumento (usualmente descrita como filtros en la teoría de sistemas lineales), en general reduce la resolución de la medición. En este caso se modela al proceso de medición como una convolución matemática. La ventaja de conocer la respuesta del instrumento es que se pueden construir algoritmos computacionales para reducir el impacto del instrumento y obtener resultados con mayor fidelidad. A estos algoritmos y procesos se los conoce como deconvolución.

Vamos a ver cómo se calcula una convolución (nombre raro pero no te preocupes, es sencillo). Luego vamos a hacer la analogía entre el experimento de interferencia y la convolución de la respuesta del detector y la señal que queremos medir. A continuación podremos cambiar algunos parámetros para estudiar como afecta el tamaño del detector.

3.1. Convolución: operación matemática

Nota: Los ejemplos que se muestran en esta sección están acompañados de un Jupyter notebook (convolucion.ipynb) que pueden bajar del campus, para apoyar esta explicación.

La convolución se puede definir para funciones discretas (como sería una medición muestreada) o para funciones continuas. En primer lugar, consideremos la función muestreada que se observa en la Fig. 3.2(a). Para este tipo de funciones, la convolución se define como

$$(f * g)_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \cdot g_{n-m}^* \quad (3.1)$$

en donde * en g significa complejo conjugado. Siendo que todas las señales medidas son reales, vamos a omitir * de ahora en más. Observar que en esta cuenta no importa cuál es el eje de las ordenadas, sino la posición de cada punto de la función. Luego veremos cómo se calcula el eje de las ordenadas. Por tal motivo nos concentramos en las sucesiones de números que se encuentran a la derecha de la figura 3.2(a) .

Pensemos qué hace esta operación, fijando valores para n . Si $n = 0$, la expresión 3.1 nos indica que tenemos que multiplicar f_m con g_{-m} , y luego sumar los productos para todos los m . Observar que g_{-m} es la sucesión que resulta de espejar a g respecto de $m = 0$, como se muestra en la Fig. 3.2(b). Multiplicamos entonces aquellos números cuyos productos dan distinto de cero (gris) y sumamos, obteniendo que la convolución vale $(f * g)_o = 9$.

La consecuencia de cambiar el valor de n es producir traslaciones de g_{-m} . Entonces los distintos valores de la convolución se obtienen desplazando a g_{-m} en el valor de n , y para cada desplazamiento multiplicar y sumar los elementos de ambas sucesiones. Veamos ejemplos concretos en las figuras 3.2(c-h). Por ejemplo, $n = -4$ significa que g_{-m} se desplaza 4 veces hacia la izquierda, como se muestra en 3.2(c).

Ahora vamos a hacer las cuentas para aquellos valores de n para los cuales la convolución no da cero. Vemos que $n = -4$ es el desplazamiento menor que me ofrece un valor distinto de cero (ver que si $n = -5$ o menor, siempre algún término del producto es cero). Entonces solo tiene sentido aumentar n . Luego, vemos que podemos seguir este procedimiento hasta que la convolución vuelva a dar cero, si variamos n desde -4 hasta 2. En el medio obtenemos valores distintos de cero, como se ve en 3.2(c-h). El resultado de la convolución se puede observar en la figura 3.3.

¿Cómo cambia el resultado si las funciones son continuas? La expresión para la convolución está dada por la ecuación

$$f(x) * g(x)_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot g^*(t - \xi) dt, \quad (3.2)$$

en donde $*$ significa complejo conjugado. Siendo que todas las señales medidas son reales, vamos a omitir $*$ de ahora en más. En este caso la operación es similar pero, en lugar de hacer una sumatoria, calculamos el área bajo la curva que resulta de multiplicar a la primera función por la segunda invertida y desplazada.

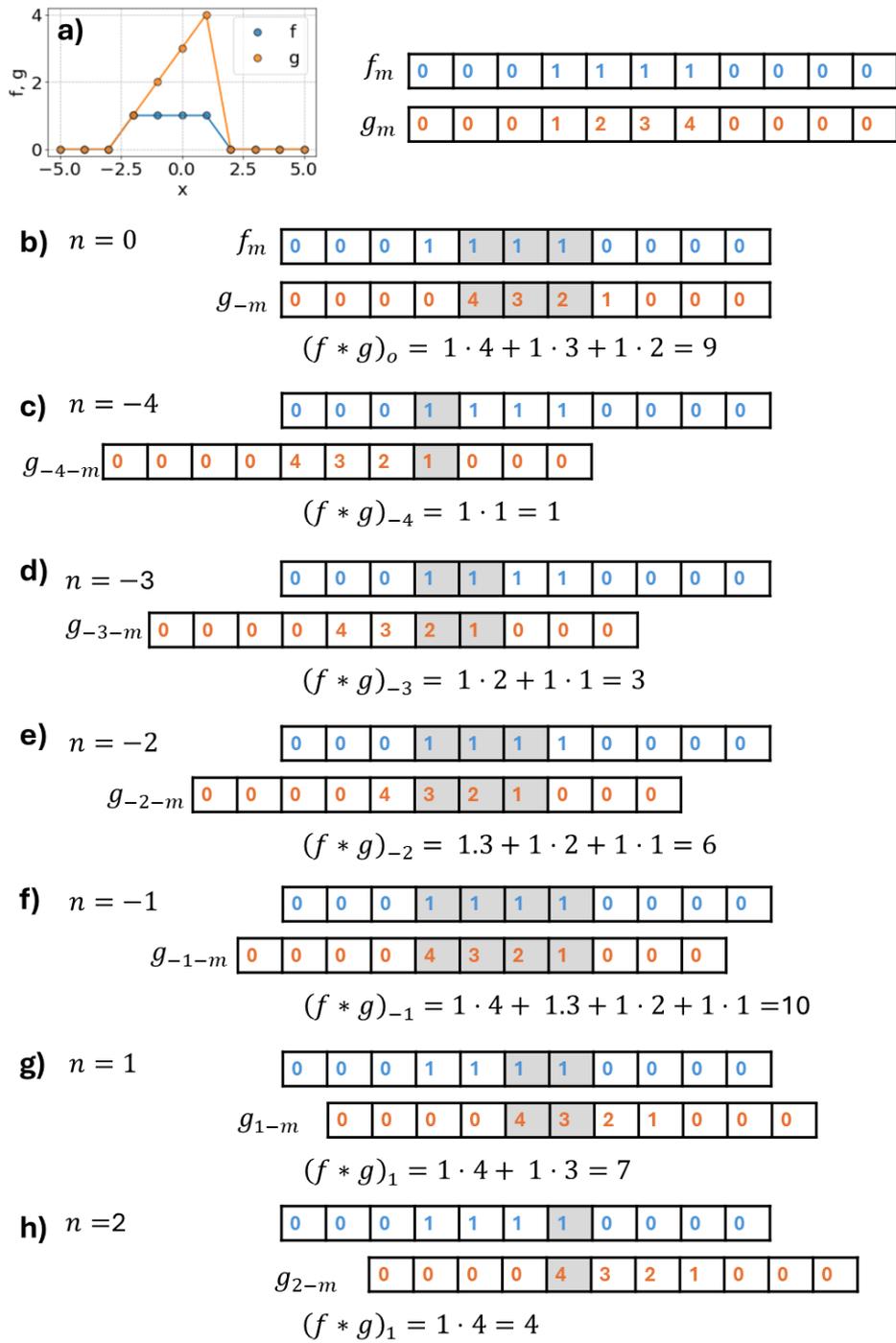


Figura 3.2: Convolución de las funciones f_m y g_m . En (a) se muestra un gráfico del muestreo realizado para estas funciones. En (b-h) se presenta una visualización del cálculo de la convolución de estas funciones para distintos valores de n .

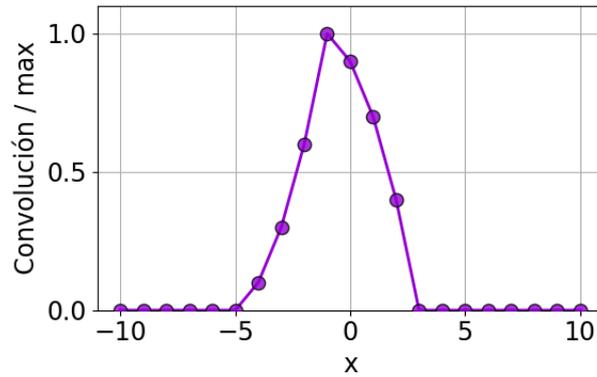


Figura 3.3: Resultado normalizado de la convolución entre las funciones f_m y g_m , variando n entre -10 y 10. Se observa que toma valores no nulos cuando n se encuentra entre -4 y 2.

En la figura 3.4 se muestra un ejemplo para funciones ‘continuas’. Ver que el procedimiento es el mismo: se invierte la función $g(x)$ respecto de $x = 0$, se desplaza a $g(-x)$ a través de $f(x)$ para distintos valores de ξ . Para cada desplazamiento ambas funciones se multiplican y se calcula el área bajo la función producto (color gris en la figura que corresponde al punto rojo en la convolución).

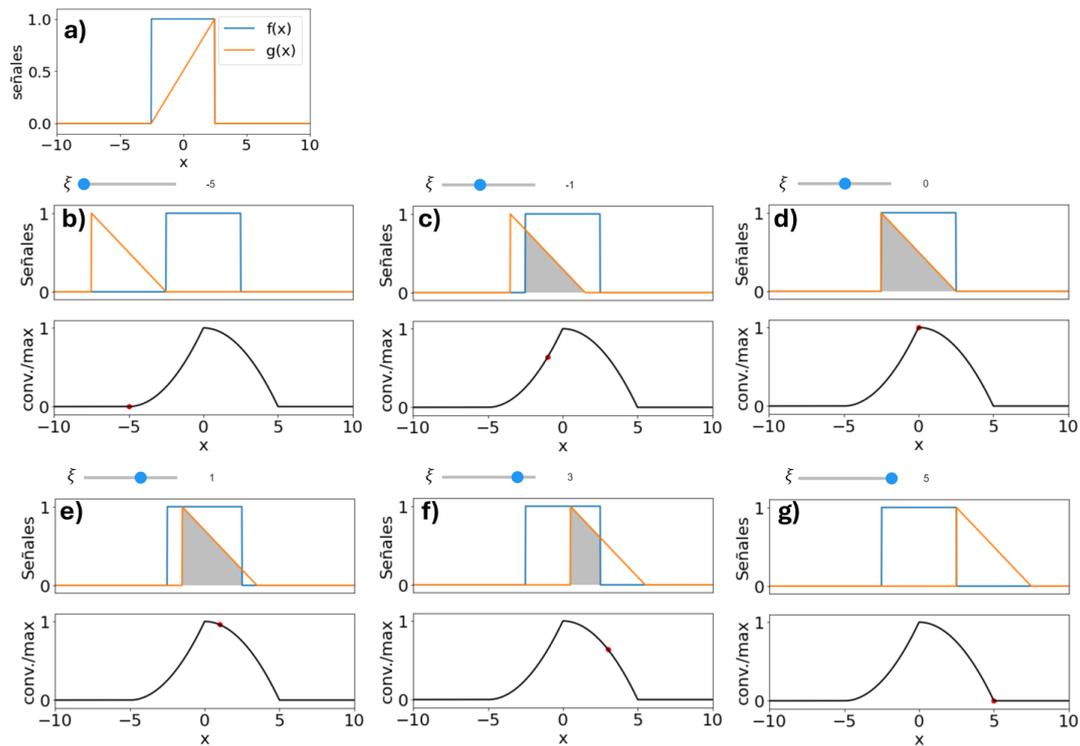


Figura 3.4: Ejemplo de convolución para dos funciones continuas $f(x)$ y $g(x)$. Las mismas se encuentran graficadas en (a). Se observa el proceso de convolución para diferentes desplazamientos: (b) $\xi = -5$, (c) $\xi = -1$, (d) $t = 0$, (e) $\xi = 1$, (f) $\xi = 3$, y (g) $\xi = 5$. En cada caso se detalla el área integrada (arriba en gris) y el valor resultante de la convolución (abajo como un punto rojo).

Nota: todo esto que pensamos en una coordenada espacial unidimensional, también vale para la coordenada temporal y para múltiples dimensiones.

3.2. Convolución: intrínseca en el proceso de medición

Si observamos ahora los ejemplos de mediciones que mencionamos en la Fig. 7.1 vemos que, en casi todos los casos, hay ‘algo’ que se traslada a través de aquello que se desea medir (detector o el haz de iluminación). En cada posición del detector o haz de barrido, la medición resulta de integrar o sumar todo aquello que se encuentre en el área de interacción del detector o haz con lo que uno quiere medir $S(x)$. Es decir, el resultado del proceso de medición ($M(x)$) es la convolución de lo que se desea medir $S(x)$ con la

respuesta del detector $R(x)$. Re-escribiendo a la expresión 3.4 obtenemos

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau) \cdot R(x - \tau) d\tau. \quad (3.3)$$

Supongamos que estamos en el caso ideal que la respuesta del detector sea una delta (por ejemplo, el haz puede enfocarse en un área infinitamente pequeña o el detector (ya sea piezoeléctrico, detector de luz, etc) tienen un área infinitamente pequeña (sabemos que eso no es posible). Entonces escribiendo $R(x - \tau) = \delta(x - \tau)$ y reemplazando en la expresión 3.4, obtenemos

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau) \cdot \delta(x - \tau) d\tau = S(x). \quad (3.4)$$

Es decir, matemáticamente en el caso de tener un detector ‘ideal’ la medición resulta idéntica a lo que uno quiere medir. Pero, físicamente, ¿qué es ideal?

3.3. El detector ideal y el real

Veamos un ejemplo de medición, en donde queremos medir el doblete del sodio. Es decir, queremos medir el espectro de una lámpara de sodio, que emite dos líneas espectrales muy angostas (ancho $\sim 0,1$ nm) centradas en las longitudes de onda 589.0 nm y 589.6 nm (doblete). Vamos a suponer que la forma o perfil de estas es lorentziano. En la figura 3.5 se pueden observar a estas líneas graficadas en color naranja. Supongamos entonces que utilizando una red de difracción separamos estas líneas y con un detector vamos a barrer el espectro midiendo la intensidad, tal como se muestra en la Fig. 7.1. Para que la resolución en la detección sea buena, solidario al detector pondremos una rendija cuyo tamaño podemos cambiar con mucha precisión, de manera que todo lo que este dentro de la rendija puede ser capturado por el detector, y todo lo que esté afuera no. La función de respuesta $R(x)$ que caracteriza a la rendija junto con el detector es la función cuadrada que está graficada en la Fig. 3.5(a). En las Figs.3.5(b-c) se grafica en verde el resultado de la medición (simulado como la convolución entre la respuesta del detector y las líneas espectrales que se desean caracterizar). Vemos que cuanto más chica es la rendija (más parecida a una delta), más se parece la medición a las líneas espectrales; mientras que, al aumentar el ancho de la rendija, dejamos de resolver al doblete para medir solo una línea espectral.

Desarrollando la intuición: Usando la simulación (Jupyter notebook (convolucion.ipynb)), les sugerimos responder las siguientes preguntas (y diseñar otras!) para trabajar sobre nuestra intuición acerca de la convolución en el proceso de medición.

1. Cambiar la resolución del espectrómetro. Que pasa cuando la función resolución se aproxima a una delta?
2. Cambiar la distancia entre líneas espectrales manteniendo la misma resolución del espectrómetro.
3. Simular ruido de alta frecuencias sumando a las líneas espectrales algo como $0.1 \sin(1000 x)$. Ver que la convolución funciona filtro pasa bajos.
4. Como debe ser el ancho de la rendija para tener una medición fiel?

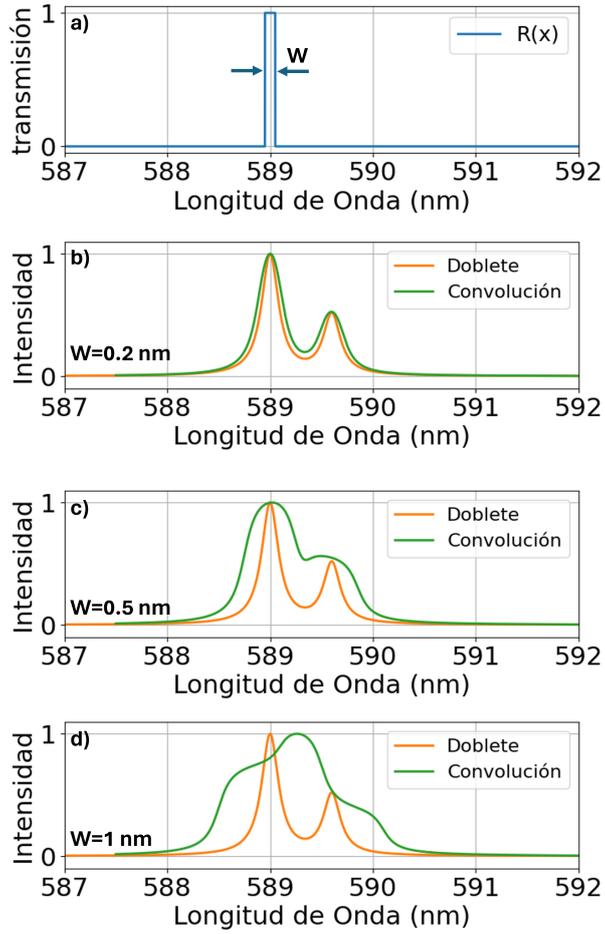


Figura 3.5: (a) Se observa la función que representa a la respuesta de la rendija y por lo tanto al la región donde puede medir el detector, donde 1 corresponde a detección total y 0 a detección nula. (b) Se detalla la comparación entre el espectro del doblete de sodio (línea sólida naranja) y el espectro obtenido al medir (línea sólida verde) utilizando una rendija de ancho $W = 0,2$ nm, (c) $W = 0,5$ nm y (d) $W = 1,0$ nm.