

Capítulo 4

Ondas estacionarias

Una onda estacionaria se forma cuando se superponen dos ondas de igual frecuencia que se propagan en sentido opuesto a través de un medio. Por ejemplo, en la figura 4.1, se observa la superposición de dos ondas contrapropagantes en distintos tiempos ($t = 0$, $t = T/4$, $t = 3T/4$, $t = T$, donde T es el período de la onda). La onda que se propaga a la izquierda se puede expresar como

$$\Psi_A(x, t) = A \cos(\omega t + kx + \phi_A) \quad (4.1)$$

y una onda que se propaga a la derecha como

$$\Psi_B(x, t) = B \cos(\omega t - kx + \phi_B) \quad (4.2)$$

En la figura 4.1c se observa la superposición de ambas ondas, formando la onda estacionaria. Ver que la onda estacionaria cambia su amplitud en el tiempo, pero los puntos indicados con la letra Q (conocidos como nodos) tienen amplitud nula en cualquier tiempo y los indicados con la letra P alcanzan la amplitud máxima (antinodos). La forma funcional de estas ondas es

$$\Psi(x, t) = \Psi_A(x, t) + \Psi_B(x, t) = 2A \sin(kx) \cos(\omega t) \quad (4.3)$$

en donde, para simplificar los cálculos, se consideró, que las fases iniciales son nulas y las amplitudes son iguales. Por el contrario a las ondas propagantes, las ondas estacionarias no transportan energía (en ninguno de los casos hay transporte de masa). Se puede ver gráficamente a partir de la figura 4.1c, que la distancia que separa dos nodos consecutivos es $\frac{\lambda}{2}$.

Podríamos preguntarnos, ¿cómo es que generamos dos ondas que se propaguen en direcciones opuestas a partir de una única fuente de ondas? Los cambios en las carac-

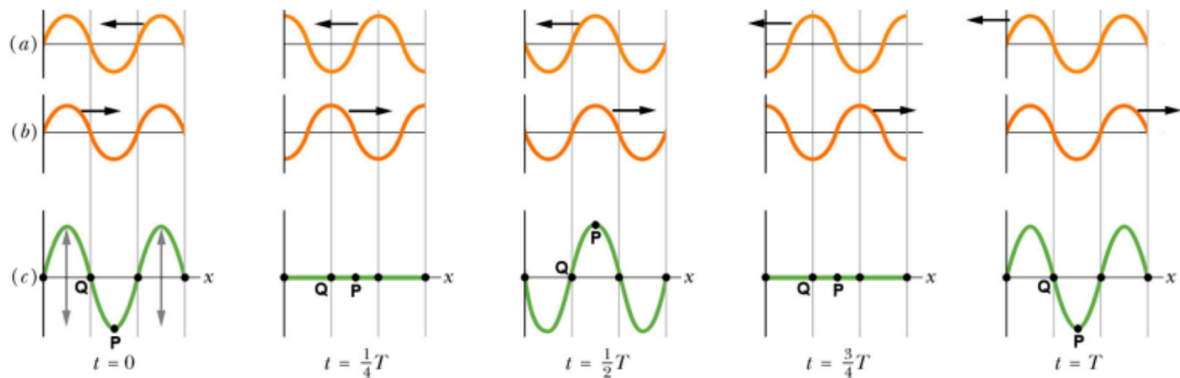


Figura 4.1: Dos ondas, una que se propagan hacia la izquierda (a) y otra hacia la derecha (b), se superponen para formar una onda estacionaria (c)

terísticas de los medios en donde se propagan las ondas (cambios de sección en tubos, fijaciones en las cuerdas, cambio de índice de refracción para la luz, etc), producen reflexiones. Por ejemplo, en la figura 4.2, se muestra la reflexión de una onda en una superficie perfectamente reflectante. La onda $\Psi(x, t)$ ahora está compuesta por la superposición de una onda que incide en la pared $\Psi_I(x, t)$ y una onda que se refleja $\Psi_R(x, t)$. Dado que la onda no puede producir movimiento de los átomos o moléculas de la superficie, se tienen que anular en la misma, es decir, la condición de borde en una superficie perfectamente reflectante o pared rígida es

$$\Psi(x_o, t) = \Psi_I(x_o, t) + \Psi_R(x_o, t) = 0. \quad (4.4)$$

Esto significa que la onda reflejada tiene igual amplitud que la onda incidente, pero se desfasa en π , puesto que $\Psi_I(x_o, t) = -\Psi_R(x_o, t)$. Nota: para dibujar la onda reflejada, tuvimos que espejar respecto a la dirección horizontal y vertical, por qué?)

Las ondas estacionarias son más comunes de lo que tal vez nos imaginamos. Por ejemplo, son esenciales para el funcionamiento de los instrumentos musicales. En la figura 4.3, se muestran dos ejemplos típicos de un instrumento de viento (ondas longitudinales en gases) y uno de cuerdas (ondas transversales en cuerdas). Los modos de oscilación en ambos casos determinan la nota o tono y las características del sonido (dos notas iguales no suenan perfectamente igual en instrumentos distintos, aun estos sean del mismo tipo). La frecuencia del modo más bajo, conocida como nota fundamental, los armónicos y sobretonos son aquellos que le dan la riqueza la nota (su timbre, su color, etc). Tanto en los instrumentos de viento como cuerdas, las vibraciones de las ondas estacionarias en ellos producen vibraciones del aire en su entorno generando una onda longitudinal en el aire,

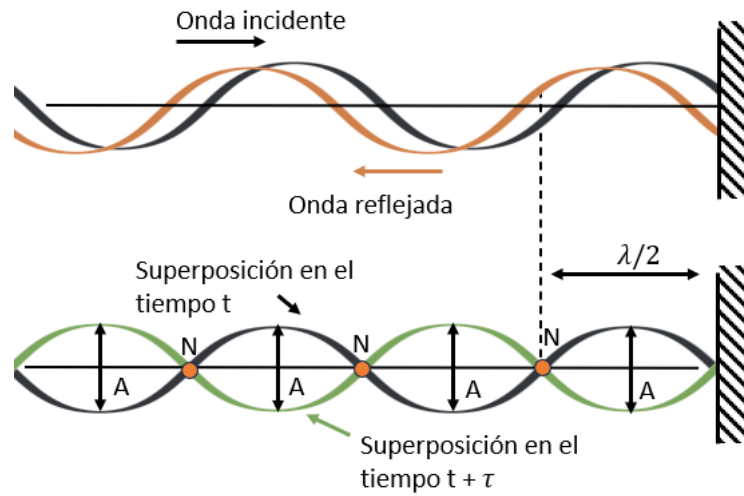


Figura 4.2: Arriba: una onda incidente (en negro) incide sobre una superficie reflectante. Esto produce una onda reflejada (marrón) que viaja en sentido contrario de igual amplitud. Esto genera una onda resultante que es la superposición de las ondas incidentes y reflejadas (abajo) formando nodos y antinodos.

que se propaga hasta nuestros oídos, lo que permite que escuchemos a los instrumentos musicales.

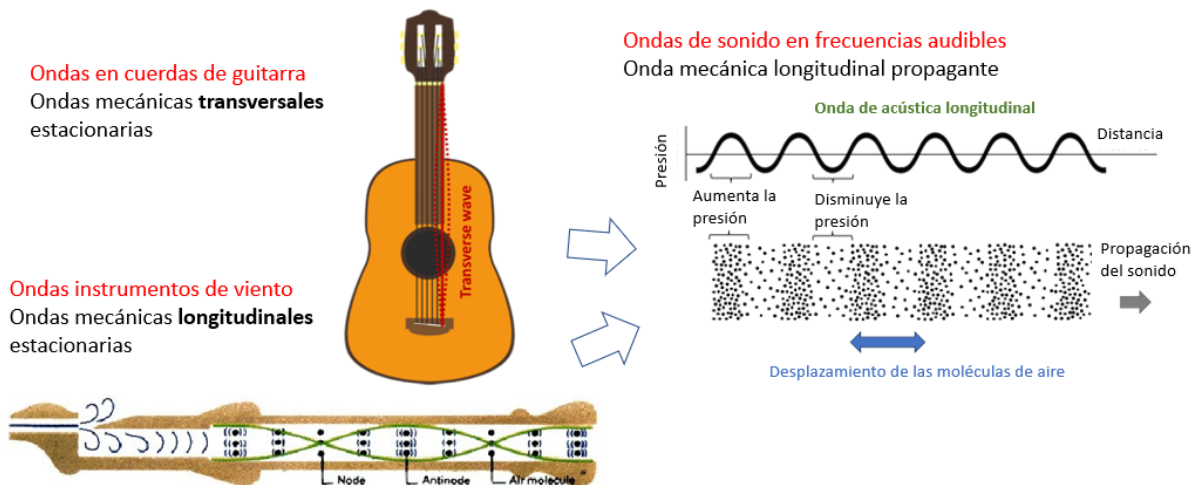


Figura 4.3: Las ondas de sonido provocan perturbaciones en el aire al desplazar las moléculas, dando lugar a una onda longitudinal que permite la propagación del sonido. En el caso de instrumentos de cuerdas, encontramos mayoritariamente ondas mecánicas transversales estacionarias mientras que en instrumentos de viento ondas mecánicas longitudinales.

Para accionar a las notas, ambos sistemas deben ser forzados. En el caso de los instrumentos de cuerda, los dos extremos de las cuerdas se encuentran fijos (condición de

borde extremos fijos) y el sistema se puede forzar por frotamiento (violín, viola, cello) o por percusión (los tres anteriores, la guitarra, el piano). En el caso de los instrumentos de viento, se fuerza soplando aire por un extremo y el otro extremo es abierto (condición de borde forzado-abierto).

En base a lo explicado previamente, nos interesa saber como se forman las ondas estacionarias, como influyen distintas condiciones de borde y como son los sistemas forzados. Intentemos responder a estas preguntas empleando dos sistemas típicos: cuerdas y tubos.

4.1. Ondas estacionarias en cuerdas

4.1.1. Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno en el caso de cuerdas, pueden ser que el extremo sea fijo, o que el extremo sea libre o que el extremo esté forzado, como se esquematiza en la figura 4.4. Si el extremo de la cuerda está fijo, el desplazamiento de la cuerda es nulo. Esto lo expresamos matemáticamente como

$$\Psi(x_o, t) = 0, \quad (4.5)$$

en donde x_o es la posición del extremo fijo de la cuerda. Como explicamos anteriormente esto significa que la incidente y reflejadas son iguales en magnitud pero están desfasadas en π . En el caso de que el extremo se encuentre libre, la onda incidente y reflejada tienen que ser iguales en amplitud y pendiente. Esto es

$$\left. \frac{d\Psi(x, t)}{dx} \right|_{x=x_o} = 0. \quad (4.6)$$

Ver que en el caso del extremo fijo, tal como mencionamos anteriormente hay una inversión de la onda, mientras que en el extremo libre la onda no se invierte.

Tarea: Escribir una superposición de ondas armónicas propagantes que satisfagan 4.5 y 4.6.

A partir de las condiciones de borde planeadas podemos proponer varias situaciones esquematizadas en la figura 4.5: que la cuerda tenga dos extremos fijos, que la cuerda tenga dos extremos libres, que la cuerda tenga un extremo fijo y uno libre. Para analizar que sucede podemos plantear la forma de la onda estacionaria genérica

$$\Psi(x, t) = A \cos(kx + \phi) \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.7)$$

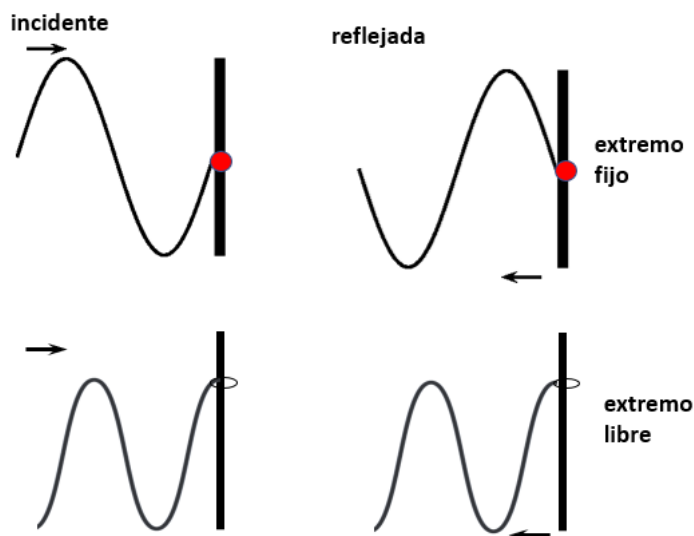


Figura 4.4: Arriba: una onda incide sobre un extremo fijo (izquierda). Esto genera una onda reflejada **invertida** (derecha), es decir, desfasada en π . Abajo: una onda incide en un extremo libre (izquierda) y produce una reflexión de igual amplitud y pendiente, sin invertirse.

donde φ es la fase inicial temporal y ϕ la fase inicial espacial. Luego proponemos las condiciones de borde adecuadas según el problema particular.

4.1.2. Cuerda con dos extremos fijos

Tarea: Probar que imponiendo las condición de borde de la ecuación 4.5 en ambos extremos para todo tiempo, se obtienen los resultados de esta sección.

Si la cuerda tiene dos extremos fijos en las posiciones $x = 0$ y $x = L$, y se proponen las condiciones de borde

$$\Psi(0, t) = 0; \Psi(L, t) = 0$$

en la ecuación 4.7, se obtiene que $\phi = \pi/2$ y que λ y k pueden tomar varios valores. En particular se obtiene $k = m\pi/L$ con m un entero positivo ($m = 1, 2, 3, \dots$) por lo que $\lambda_m = 2L/m$. Es decir la onda entra un número entero de veces en la distancia $2L$. Las posibles soluciones toman la forma

$$\Psi_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi_n) \tag{4.8}$$

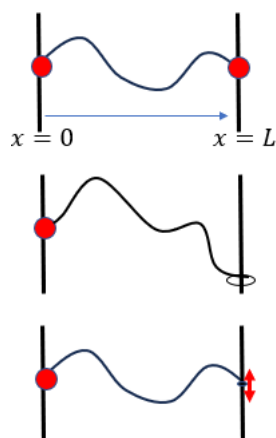


Figura 4.5: Ejemplo de dos configuraciones con distintas condiciones de contorno. Arriba, una onda con sus dos extremos fijos (puntos rojos). Medio: una onda con un extremo fijo y el otro extremo libre. Abajo: una cuerda con un extremo fijo y otro forzado

con A_n y φ_n parámetros a determinar a partir de las condiciones iniciales y ω_n y k_n relacionados a partir de la relación de dispersión de la cuerda $\omega_n = vk_n$, con $v = \sqrt{T/\mu}$ donde T es la tensión de la cuerda y μ su densidad lineal (en unidades de kg/m). Esto significa que solo algunas frecuencias podrán excitar a la cuerda. En la figura 4.6, se observa un esquema en donde se observan graficados los primeros modos normales, sus frecuencias ($f_n = \omega_n/2\pi$) y longitudes de onda. A la primer frecuencia f_1 se la conoce como frecuencia fundamental o primer armónico. Las demás frecuencias son múltiplos de esta y se las llama simplemente armónicos.

4.1.3. Cuerda con un extremo libre y uno fijo

Tarea: Probar que imponiendo las condición de borde de la ecuación 4.5 y 4.6 en cada uno de los extremos para todo tiempo, se obtienen los resultados de esta sección.

De manera análoga a la sección anterior, si ahora la cuerda tiene un extremo fijo en $x = 0$ y uno libre en $x = L$, y se proponen las condiciones de borde

$$\Psi(0, t) = 0; \quad \left. \frac{d\Psi(x, t)}{dx} \right|_{x=L} = 0$$

en la ecuación 4.7, se obtiene que $\phi = \pi/2$ y que λ y k pueden tomar varios valores. En este caso se obtiene $k = (2m - 1)\pi/2L$ con m un entero positivo ($m = 1, 2, 3, \dots$) por lo

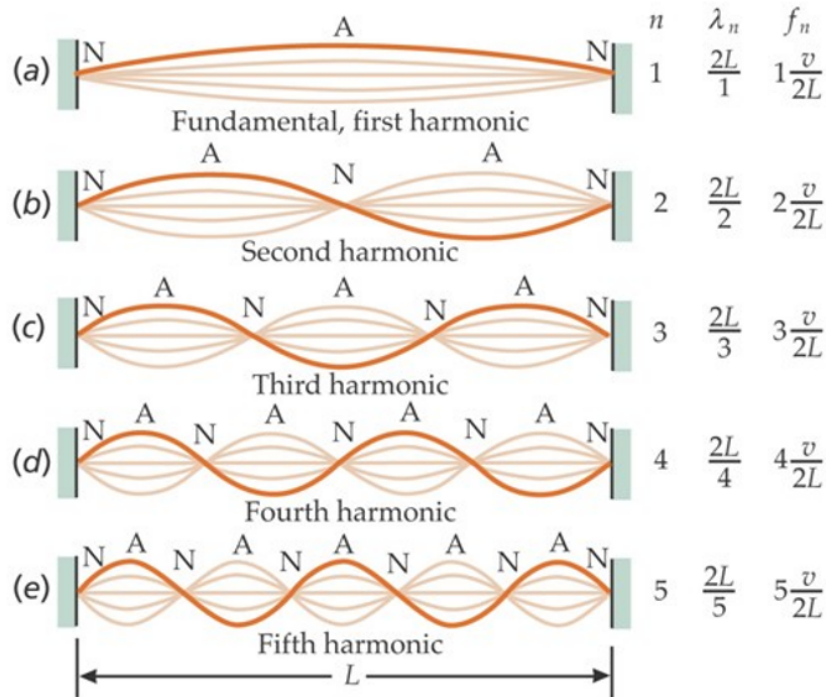


Figura 4.6: Primeros cinco modos de oscilación de una cuerda con dos extremos fijos. A la derecha se puede observar el número de modo (n), su longitud de onda (λ_n) y su frecuencia (f_n). En el esquema las N marcan las posiciones de los nodos y las A la de los antinodos (puntos de máxima amplitud).

que $\lambda_m = 4L/(2m - 1)$. Es decir la onda entra un número entero de veces en la distancia $4L$. De manera análoga al inciso anterior, las posibles soluciones toman la forma

$$\Psi_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad (4.9)$$

En la figura 4.7 se pueden observar graficados los primeros modos normales, sus frecuencias y longitudes de onda.

4.1.4. Cuerda con un extremo fijo y otro forzado

Supongamos que ahora tenemos una cuerda con un extremo fijo en $x = 0$ y uno forzado armónico en $x = L$ ($D \cos(\omega t)$). El extremo fijo será un nodo, pero el extremo forzado se verá obligado a moverse como el forzante, esto es

$$\begin{aligned} \Psi(0, t) &= 0 \\ \Psi(L, t) &= D \cos(\omega t) \end{aligned}$$

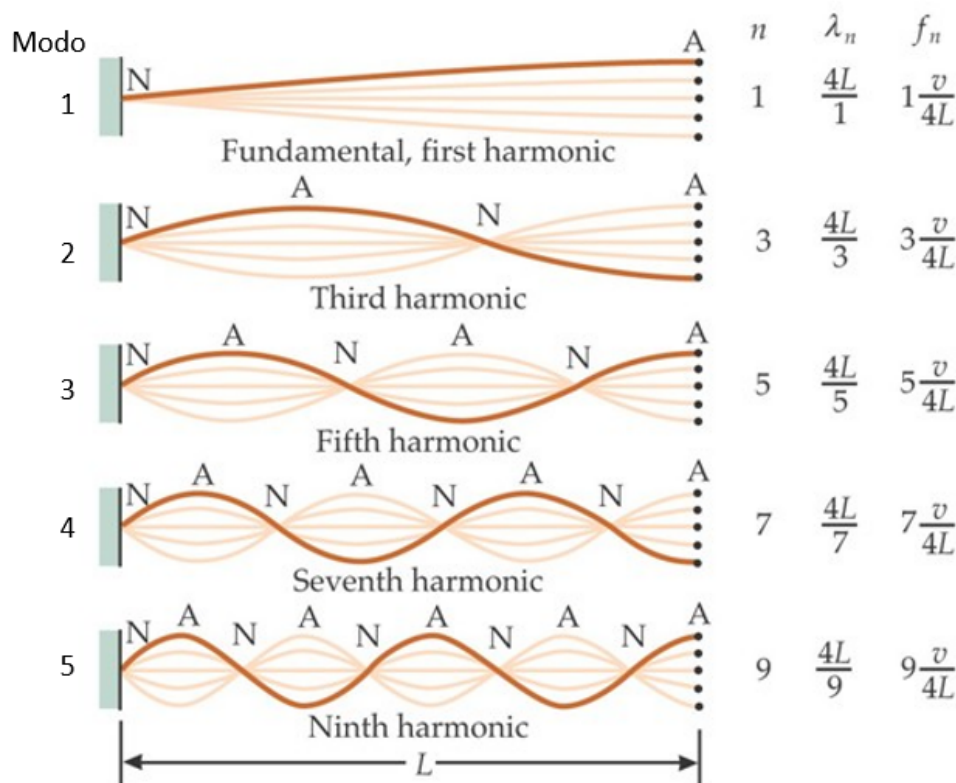


Figura 4.7: Primeros cinco modos de oscilación de una cuerda con dos un extremo fijo y uno libre. A la derecha se puede observar el número de modo (n), su longitud de onda (λ_n) y su frecuencia (f_n). En el esquema las N marcan las posiciones de los nodos y las A la de los antinodos (puntos de máxima amplitud).

Luego de aplicar estas dos condiciones a la ecuación 4.7, se obtiene que

$$\Psi(x, t) = \frac{D}{\sin(kL)} \sin(kx) \cos(\omega t) \quad (4.10)$$

En donde se uso que dado que la solución transitoria decayó, la cuerda debe oscilar con la misma frecuencia y fase que el forzante.

El denominador de la ecuación 4.10 se anula cuando $kL = n\pi$ con $n = 1, 2, 3, \dots$ (que son los mismos valores que se obtienen para extremos fijo-fijo o libre-libre). De este modo si el forzante tiene frecuencia $\omega = \omega_n = vk_n$, la solución diverge (es un sistema resonante).

Por otra parte, en las frecuencias de resonancia $D/\sin(kL) \gg D$, por lo tanto la amplitud del forzante es despreciable respecto a la amplitud de la onda, por ello consideramos al extremo forzado como un nodo.

¿Qué pasa si forzamos con una frecuencia que no sea de un modo normal? Al forzar generamos una onda progresiva que al llegar a un extremo se refleja generando una onda regresiva (que viaja en el sentido contrario). Cuando la onda regresiva llegue al otro

extremo volverá a reflejarse generando una nueva onda progresiva que se superpone con la onda progresiva original. En general, debido al tiempo de viaje, la nueva onda progresiva no estará en fase con la original. En cada reflexión, la onda adquiere una $\Delta\phi_i$, de manera que la perturbación total progresiva será la suma de todas las ondas con distintas fases

$$\Psi_{\text{tot}} = \sum_i (A \cos(kx - \omega t + \phi_o + \Delta\phi_i)). \quad (4.11)$$

La suma de ondas con defasaje aleatorio tiende a cero para una cantidad suficiente de ondas. La única manera que no se anule la suma es que la diferencia de fase sea cero. Esto se logra para algunas relaciones entre λ y L que son precisamente las condiciones bajo las cuales aparecen los modos normales. Lo mismo pasa con las regresivas.

4.1.5. Experimento: ondas estacionarias en cuerdas.

En esta experiencia se estudiarán ondas estacionarias en cuerdas. El dispositivo experimental se observa en la figura 4.8. En uno de los extremos de la cuerda se sujeta un portapesas y se la posiciona sobre una polea. En el portapesas se pueden colocar distintas masas para tensionar la cuerda. Se debe tener particular cuidado durante el montaje de que la cuerda este correctamente nivelada. Se excita a la cuerda en el otro extremo empleando un wave driver (un parlante con membrana). El wave driver tiene una pieza con una ranura para sujetar a la cuerda. Se alimenta al wave driver utilizando el generador de funciones y un amplificador de señales. Además se puede emplear un osciloscopio para medir la señal de alimentación. En el laboratorio se cuenta con cuerdas de distinta densidad, masas de distinto peso, balanza, micrómetro. **Advertencia:** el wave driver posee una traba para bloquear su accionamiento mecánico cuando no están en uso. No te olvides de retirar la traba antes de comenzar a usarlos. ¿Qué voltaje máximo soporta?

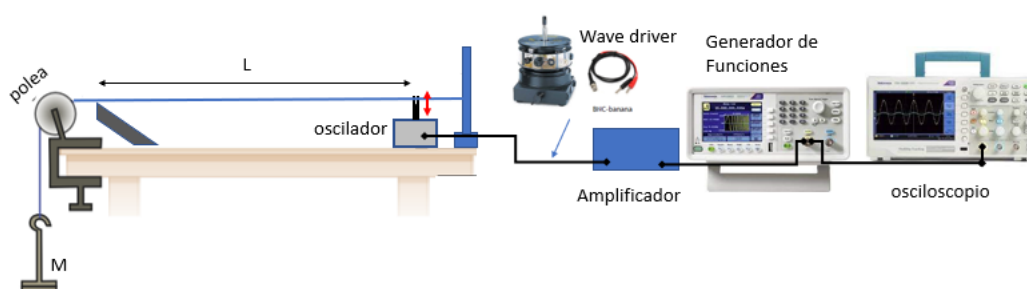


Figura 4.8: Esquema experimental para la experiencia con cuerdas.

Experimental:

- a) Como se genera un punto fijo del lado de la polea?
- b) Caracterizar las cuerdas que se van a utilizar midiendo su densidad lineal. ¿Cómo?
- c) Como genero tensión en la cuerda? que rango de tensiones es razonable emplear?
- d) Calcular la velocidad de propagación esperada en base a la densidad lineal y la tensión.
- e) Buscar los modos normales del sistema. Caracterizar la frecuencia, la longitud de onda, etc. Como determino la velocidad de la propagación a partir de las mediciones realizadas.
- f) Medir la velocidad de propagación para distintas tensiones de la cuerda. Cuantos valores de tensión es razonable tomar?
- g) Repetir para una cuerda con otra densidad.

4.2. Ondas estacionarias en tubos

Ya hemos estudiado ondas que se propagan en gases cuando hicimos el experimento de ultrasonido. Decíamos que la onda se propaga en el aire a través de compresiones y expansiones del mismo, pero que no hay un movimiento neto de las partículas de aire (aun estas puedan oscilar localmente).

Supongamos que el gas se encuentra en equilibrio en un tubo cuya sección tiene área A , a una presión de equilibrio P_o , con una densidad ρ_o (ver figura 4.9). Llamemos entonces $\Psi(x, t)$ al desplazamiento longitudinal de las moléculas de aire respecto de la posición de equilibrio, y consideremos un volumen inicial $V_o = \Delta x A$. Cuando la onda se propaga en el tubo, el volumen de aire sufre un desplazamiento o deformación y por lo tanto hay variaciones de presión en su entorno. La presión está relacionada con la compresión o expansión del gas. Cuando se comprime a un volumen más chico, la presión aumenta. Cuando se expande a un volumen más grande la presión disminuye. La variación de presión (Δp) se puede expresar como

$$\Delta p = -\kappa \frac{\Delta V}{V_o} \quad (4.12)$$

donde κ es el módulo de compresibilidad en unidades de Pa. De este modo, nos queda calcular la variación de volumen a partir de la función desplazamiento como $\Delta V = \Psi(x +$

$\Delta x, t) - \Psi(x, t)$. A partir de esta expresión y en el límite de Δx muy chiquito, se obtiene

$$\Delta p = -\kappa \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x}. \quad (4.13)$$

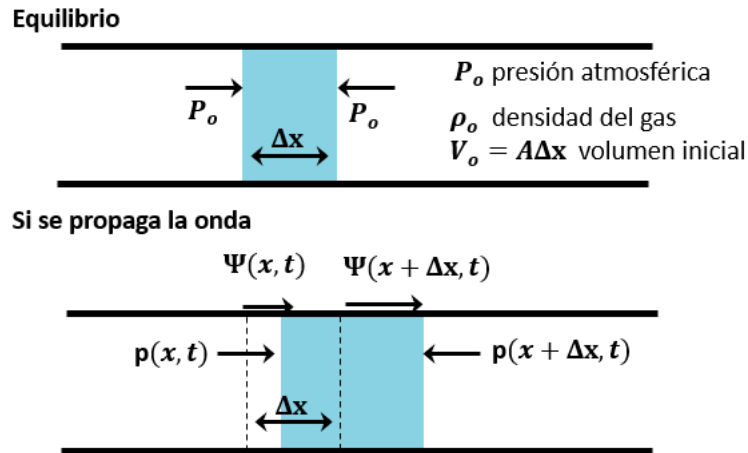


Figura 4.9: Esquema de un gas en equilibrio (arriba) y un gas en el que se propaga una onda (abajo)

Por otra parte, se puede ver que la variación de densidad es

$$\rho(x, y) = \rho_o \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x}. \quad (4.14)$$

con ρ_o la densidad media del gas.

4.2.1. Condiciones de borde en tubos

Las condiciones de borde en los tubos pueden ser extremo cerrado, extremo abierto o extremo forzado (también existen otras como los cambios de sección, pero por ahora tomamos estas tres). Miremos primero que pasa con el extremo cerrado que está a la derecha de la figura 4.10. Las partículas muy cercanas a la pared se encuentran quietas, de modo que la condición de borde se puede expresar como

$$\Psi(x_o, t) = 0, \quad (4.15)$$

donde x_o es la posición del extremo. En el momento de la foto, la partículas cercanas a la pared se mueven hacia la pared, por lo que la presión en ese extremo es máxima.

En el caso de un extremo abierto, como el que se muestra en la figura 4.11, la condición que hay que pedir, es que la presión inmediatamente antes e inmediatamente después del

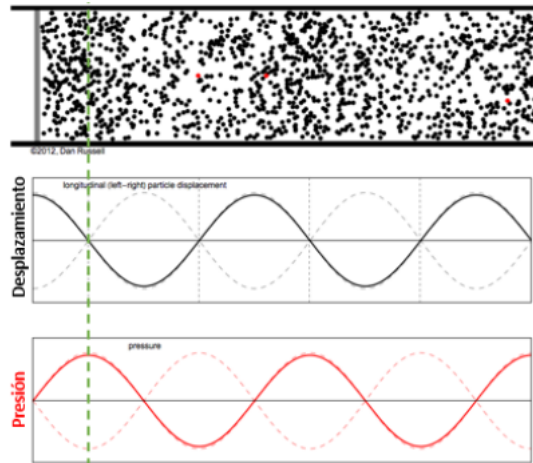


Figura 4.10: Condiciones de borde Forzado- cerrado. Arriba: Esquema de la distribución de moléculas o átomos en el gas. Medio: Desplazamiento de las moléculas (positivo es hacia la derecha, negativo es hacia la izquierda). Abajo: Presión en el tubo.

extremo sea la misma. De este modo, la variación de presión es nula, por lo que la condición es que

$$\left. \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} \right|_{x=x_0} = 0. \quad (4.16)$$

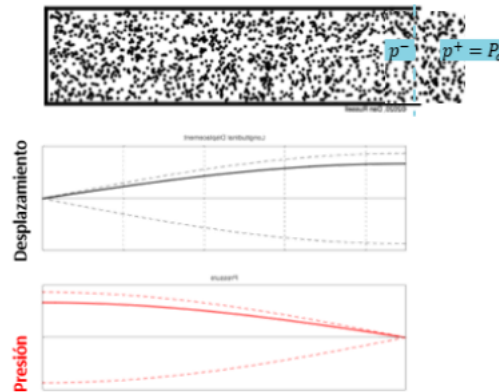


Figura 4.11: Condiciones de borde cerrado- abierto. A la derecha, el extremo está abierto y las presiones en el interior y exterior se igualan. Arriba: Esquema de la distribución de moléculas o átomos en el gas. Medio: Desplazamiento de las moléculas (positivo es hacia la derecha, negativo es hacia la izquierda). Abajo: Presión en el tubo.

Analicemos ahora el extremo forzado. Podemos suponer que las partículas se mueven igual que el forzante (igual que el piezoeléctrico o igual que el parlante), en cuyo caso la condición será que $\Psi(L, T) = C \cos(\omega t)$, suponemos al extremo forzado en $x = L$.

Utilizando esta condición obtenemos los mismos resultados que para la cuerda: $kL = n\pi$ y la función de onda

$$\Psi(x, t) = \frac{C}{\sin(kL)} \sin(kx) \cos(\omega t) \quad (4.17)$$

Es decir, el extremo forzado se comporta como un extremo cerrado para desplazamiento. Sin embargo, también podríamos pensar que en el extremo forzado las presiones se igualan. Entonces

$$\Delta p = -\kappa \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L} = C \cos(\omega t). \quad (4.18)$$

A partir de esta condición se obtiene que la amplitud de la onda es

$$A = \frac{-C}{\kappa \cos(kl)} \quad (4.19)$$

que se maximiza cuando $k_m = (2m - 1)\pi/2L$, es decir, un extremo abierto para desplazamiento.

4.2.2. Modos normales en tubos

A partir de las condiciones de borde mencionadas, se puede probar que los modos en los tubos con condición abierto-abierto, abierto-cerrado o cerrado-cerrado, son similares a los de las cuerdas. Los resultados se encuentran en la Figura 4.12.

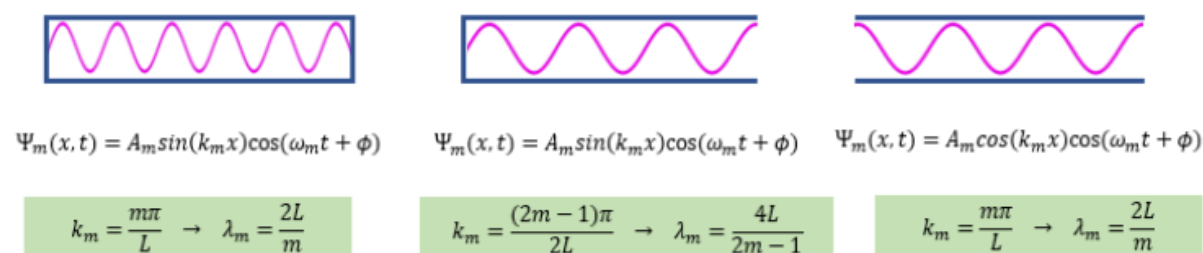


Figura 4.12: Modos normales en tubos, para las condiciones cerrado-cerrado (izquierda), cerrado-abierto (medio), abierto-abierto (derecha)

Tarea: Nunca confíen en lo dicho, pruébenlo ustedes mismos!

4.2.3. Experimentando con tubos: el tubo de Kundt

El dispositivo experimental que se empleará en la práctica se muestra en la figura 4.13. Consiste en un tubo de longitud L , que incorpora una regla para medir posiciones dentro del mismo. En un extremo del tubo hay un pistón móvil que actúa como extremo cerrado y permite variar la longitud del mismo. Este se puede remover dejando al tubo con una longitud fija con aquel extremo abierto. Dentro del tubo hay un micrófono con el cual se mide la perturbación (de desplazamiento o presión) dentro del tubo. El micrófono se conecta a un amplificador y luego al osciloscopio para poder medir la señal. El otro extremo del tubo se encuentra abierto y a una distancia d_o ($d_o \ll L$) de un parlante con el cual se emitirá la señal. El parlante está conectado a un generador de funciones mediante un cable BNC-banana. El generador de funciones a su vez está conectado al osciloscopio para medir la señal emitida. Todas las conexiones salvo las que se indica lo contrario son con cables BNC-BNC. **No superar los 2 Vpp que se mandan al parlante, sino se distorsiona la señal.**

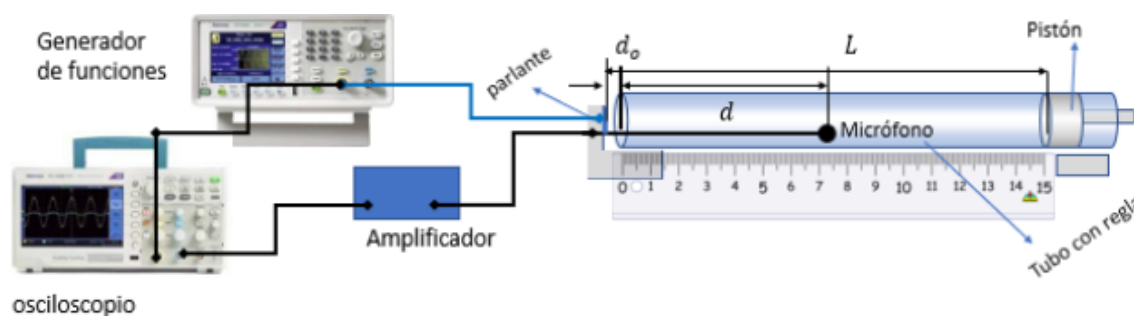


Figura 4.13: Dispositivo experimental que se empleará en la práctica de ondas estacionarias en tubos

Experimental:

- Determinar que mide el micrófono: Presión o desplazamiento. ¿Cómo lo hago? ¿Dónde mido? ¿Qué espero medir?
- Diseñar un experimento para determinar si el parlante fuerza al extremo en presión o desplazamiento. (es decir si el extremo está abierto o cerrado).

En todas las experiencias siguientes, repetir el experimento con pistón (cerrado), sin pistón (abierto).

- a) Medir las variaciones de presión o desplazamiento en los modos a lo largo del tubo. ¿Cuántos modos puedo observar? ¿Puedo definir la posición de los nodos? ¿Y de los máximos? ¿Que error le asigno? ¿Cuál tiene menor error?
- b) Dejando L fijo, estudiar la dependencia entre la frecuencia ν , la longitud de onda de los modos λ y el número de modos. Pensar como es conveniente medir λ . Usando estos datos, medir la velocidad de propagación del sonido y el largo efectivo del tubo.
- c) Diseñar un experimento para medir la velocidad de propagación variando la longitud del tubo.
- d) Determinar la velocidad de propagación a partir del retardo entre una señal impulsiva y la señal medida. Adquirir una señal completa y guardar los datos (Los vamos a usar pronto!).
- e) Comparar la velocidad del sonido obtenida por los distintos métodos.

