

Capítulo 5

Composición de señales

En Física 2 estudiamos propagación de ondas imponiendo condiciones iniciales arbitrarias en sistemas que soportan modos normales, y vimos que en esos casos la onda que se propaga en el medio es una superposición de modos normales (¡los modos forman una base de el espacio de soluciones!). Esto es factible debido al **principio de superposición**: dado que la ecuación de ondas es lineal, una combinación lineal de soluciones también es solución.

En líneas generales, para hallar la solución se propone que la solución general a tiempo inicial es una superposición (combinación lineal) de modos normales. Luego, para hallar las amplitudes y fases de cada término de la superposición usamos la condición inicial expresada en una base Fourier (que, elegida apropiadamente, coincide con la de los modos normales), e igualamos la solución general en el tiempo inicial a la condición inicial.

¡Atención! Si no recordás esto que acabás de leer, leé primero la sección 5.1 en donde comentamos brevemente un ejemplo que vieron en Física 2 y luego retomá desde aquí. Si recordás todo, te lo podés saltar.

Si el sistema que estamos estudiando soporta un continuo de frecuencias, en lugar de usar sumatorias usamos integrales: la transformada de Fourier.

Este concepto lo podemos extrapolar a muchas situaciones, más allá de las ondas. Se utiliza muchísimo en casi cualquier rama de la física, como la electrónica y la óptica. Veamos algunos ejemplos.

La mayoría de los dispositivos electrónicos que usamos hoy en día manejan señales digitalizadas. Un ejemplo que ya usamos es la señal cuadrada que genera el generador de funciones. Para generar esa señal, el generador no hace más que superponer señales armónicas de distintas frecuencias. ¿Se te ocurre cuáles?

Otro ejemplo es cómo se transmite la información en los circuitos lógicos. En general esta está codificada en 8 bits, es decir base binaria de 8 dígitos (por ejemplo, si quiero transmitir una señal de 2 V, su codificación en base binaria es 00000010 ya que $2 = 0 \times 2^8 + 0 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$). Al conjunto ordenado de 8 bits lo conocemos como byte. Esta información además se transmite como pulsos con cierta frecuencia (bits por segundo), conocida como *bit rate*. Es decir que, a fines prácticos, en los circuitos lógicos la información se transmite en código binario, donde cada dígito es un pulso de amplitud 0 V si quiero transmitir el cero binario, y 3 V o 5 V para el 1 binario. En otras palabras: para transmitir la información de que la señal tiene 2 V, se transmite una serie de pulsos ordenados en el tiempo (byte) de amplitud (0 0 0 0 0 0 1 0). Y así, cualquier información que quiera transmitir necesito codificarla en código binario y transmitirla como 1 y 0, es decir como pulsos de 5 V y 0 V. Para transmitir estos pulsos, necesito que la electrónica que uso tenga suficiente ancho de banda como para que estos pulsos de los bits se propaguen en los circuitos sin deformarse demasiado (es decir, que no pierdan sus componentes de Fourier al propagarse).

Notar que, en cualquiera de los ejemplos mencionados anteriormente, para que los pulsos o señales estén *bien conformados*, es decir que tengan la forma que quiero que tengan, matemáticamente debería tener infinitas frecuencias (infinitas componentes del espectro en la serie de Fourier). Sin embargo, ningún dispositivo electrónico puede manejar infinitas frecuencias (ya que su ancho de banda es limitado), por lo que las series están truncadas. Entonces podemos ver una de las razones por las cuales es importante el ancho de banda de los dispositivos electrónicos (las frecuencias que pueden sintetizar o medir). Para sintetizar señales cuya forma no es armónica necesito que el ancho de banda sea suficiente para poder sintetizar la fundamental de la señal y un número adecuado de armónicos.

Analicemos todo lo dicho haciendo experimentos!

5.1. Recordando algunas cosas vistas en Física 2

5.1.1. La serie y la transformada de Fourier

La base de Fourier $\{1, \cos(2\pi n\nu_o x), \sin(2\pi n\nu_o x)\}$ nos permite escribir **cualquier función periódica** como una combinación lineal de senos y cosenos:

$$S(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_n^{\infty} a_n \cos(k_n x) + b_n \sin(k_n x) \quad (5.1)$$

donde las frecuencias $k_n = nk_o$ son múltiplos de la frecuencia fundamental ν_o y A_n, B_n amplitudes que pueden ser halladas a partir de las siguientes expresiones:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L S(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx \quad (5.2)$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L S(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx \quad (5.3)$$

En la Fig. 7.1 se pueden observar las series de Fourier de diversas ondas periódicas.

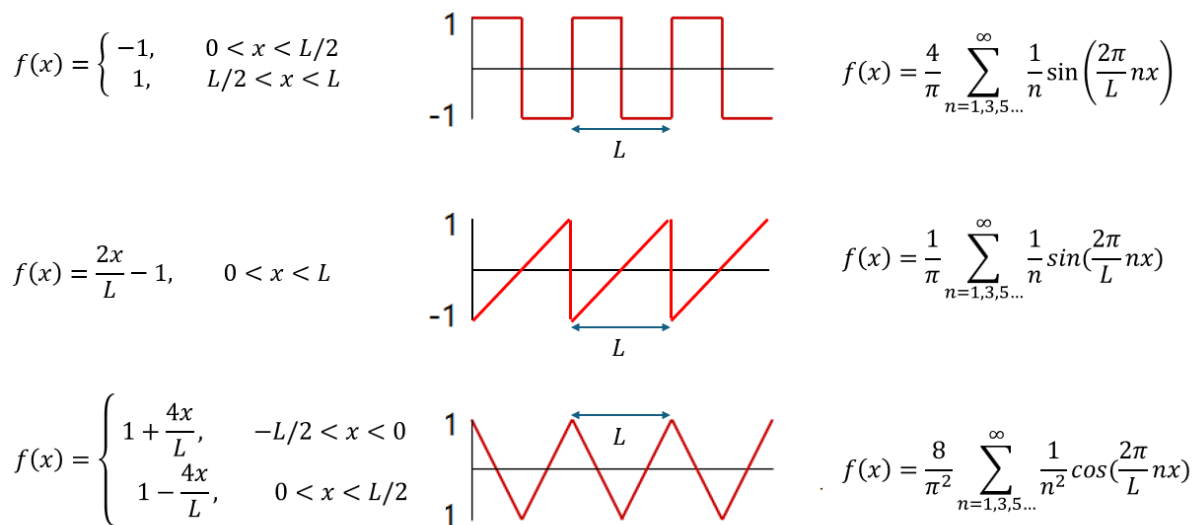


Figura 5.1: Series de Fourier de ondas periódicas cuadrada, diente de sierra y triangular.

Nota: Todo esto vale también para el tiempo, alcanza con cambiar $x \rightarrow t$ y $k_o \rightarrow \omega_o = 2\pi\nu_o$.

Tarea: Usando algún lenguaje de programación, graficar las series de Fourier de la Fig. 7.1, para un número finito de términos N_o .

-Que sucede cuando N_o aumenta?

-Cuantos términos necesito para que la serie se parezca a la función?

-Como puedo definir un error?

Así como existe una base de senos y cosenos, dado que la exponencial compleja es una combinación lineal de senos y cosenos ($e^{-ikx} = \cos(kx) - i\sin(kx)$), también podemos definir la serie de Fourier en una base exponencial

$$S(x) = \sum_n^{\infty} C_n e^{ikx} \quad (5.4)$$

En donde los coeficientes C_n pueden ser hallados a partir de la siguiente expresión

$$C_n = \frac{1}{L} \int_L S(x) \cdot e^{-ikx} dx$$

Más aun, si el sistema admite un continuo de frecuencias (por ejemplo cuando no es un sistema acotado, por lo que las frecuencias no se discretizan), en lugar de usar una sumatoria discreta podemos usar una integral (por ejemplo haciendo el límite al continuo empleando la serie en base exponencial), obteniendo la transformada de Fourier. La expresión para la transformada directa es

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i2\pi\nu t} dt$$

y para la transformada inversa

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\nu)\} = f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) \cdot e^{i2\pi\nu t} d\nu$$

En la Fig. 5.2 se pueden observar las transformadas de algunas funciones que solemos usar.

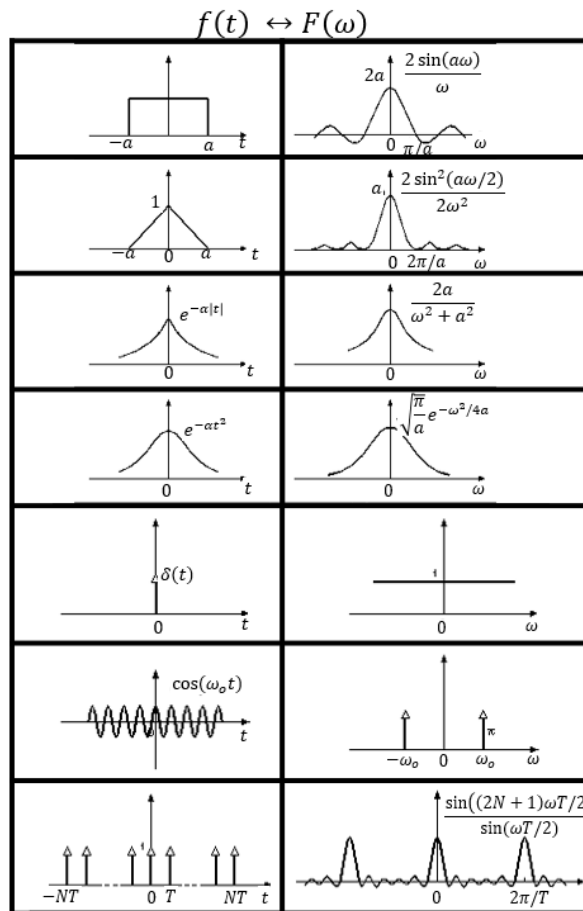


Figura 5.2: Transformadas de Fourier de distintas señales no periódicas.

Pensar: Podrías asociar las transformadas de la Fig. 5.2 a fenómenos que estudiaste en Física 2?

Veamos ahora ejemplos en donde usaron transformadas y series en Física 2.

5.1.2. Ejemplo del uso de la serie de Fourier en el problema de condiciones iniciales en sistemas acotados

Vamos a comentar someramente un ejemplo, pero si necesitas más detalles podés consultar el apunte de la materia Física 2 [?]. Tomemos como ejemplo para recordar, el de una cuerda de longitud L con extremos fijos. Tal como se mencionó en la sección 4.1.2, una posible solución es

$$\Psi_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi_n) \tag{5.5}$$

con $k_n = n\pi/L$. La solución más general es una superposición de modos normales

$$\Psi(x, t) = \sum_n A_n \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \cos\left(\omega_n t + \varphi_n\right) \quad (5.6)$$

en donde las constantes A_n y φ_n están determinadas por las condiciones iniciales. Vamos a suponer que la cuerda parte del reposo, es decir $\dot{\Psi}(x, 0) = 0$, de una posición inicial dada por la expresión

$$\tilde{\Psi}(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < \frac{L}{3} \\ \psi_o & \text{si } \frac{L}{3} < x < \frac{2L}{3} \\ 0 & \text{si } \frac{2L}{3} < x < L \end{cases} \quad (5.7)$$

Si pedimos que la cuerda parta del reposo en la expresión 5.6, obtenemos que

$$\sum_n A_n \sin(k_n x) \sin(\varphi_n) = 0 \quad (5.8)$$

para toda posición, por lo que la única posibilidad es que $\varphi_n = 0$ para todo valor n .

La condición inicial para la deformación implica poder igualar $\Psi(x, 0) = \tilde{\Psi}(x, 0)$. Nos encontramos con el problema de que la forma general para la deformación está escrita en una base de senos, mientras que la condición inicial es una función cuadrada. De este modo lo primero que tenemos que hacer es escribir a la condición inicial en una base de senos y cosenos (la de Fourier):

$$\Psi(x, t) = \sum_p A_p \sin\left(p \frac{\pi}{L} x\right) = \tilde{\Psi}(x, 0) = a_o/2 + \sum_n a_n \cos(nk_o x) + b_n \sin(nk_o x) \quad (5.9)$$

Dado que las series de Fourier permiten escribir funciones **periódicas** como superposición de senos y cosenos, para poder expresar a la condición inicial como una serie de Fourier necesitamos convertirla en una función periódica. Pero, ¿cual sería el período, y que condiciones tienen que cumplir? En primer lugar, se tienen que cumplir las condiciones de borde en $x = 0$ y $x = L$. En segundo lugar, querríamos interpretar la serie de modos como otro desarrollo Fourier para igualar término a términos los coeficientes. Esto es posible sólo si ambos desarrollos son de funciones con la misma periodicidad. Los períodos espaciales de los modos normales (longitudes de onda de los modos) son

$$\lambda_p = \frac{2\pi}{k_p} = \frac{2L}{p}, \quad (5.10)$$

es decir que la longitud de onda del modo fundamental ($p = 1$) es $\lambda_1 = 2L$, y todos los otros son fracciones enteras de este. Por lo tanto, en analogía, vamos a pedir que el período Λ

de una extensión periódica de $\tilde{\Psi}(x, 0)$, sea la longitud de onda fundamental: $\Lambda = \lambda_1 = 2L$. Entonces, siendo que $k_o = 2\pi/\Lambda$, reemplazando $\Lambda = 2L$ se obtiene $k_o = \pi/L$, en cuyo caso la igualdad entre series quedará

$$\Psi(x, t) = \sum_p A_p \sin(p \frac{\pi}{L} x) = \tilde{\Psi}(x, 0) = a_o/2 + \sum_n^{\infty} a_n \cos(n \frac{\pi}{L} x) + b_n \sen(n \frac{\pi}{L} x) \quad (5.11)$$

Entonces ya sabemos cuál es el período de la extensión. Para terminar de determinar cuál es la función extendida correcta, notemos que en la igualdad anterior entre desarrollos, del lado de modos normales solamente tenemos senos, mientras que para Fourier tenemos senos y cosenos. Por lo tanto, necesitaremos que $a_n = 0$ para todo n . Esto lo logramos si extendemos a $\tilde{\Psi}(x, 0)$ de forma impar. En la Fig. 5.3 encontramos la extensión impar de $\tilde{\Psi}(x, 0)$, con período $\Lambda = 2L$ y que además cumple las condiciones de borde (en este caso dos extremos fijos).

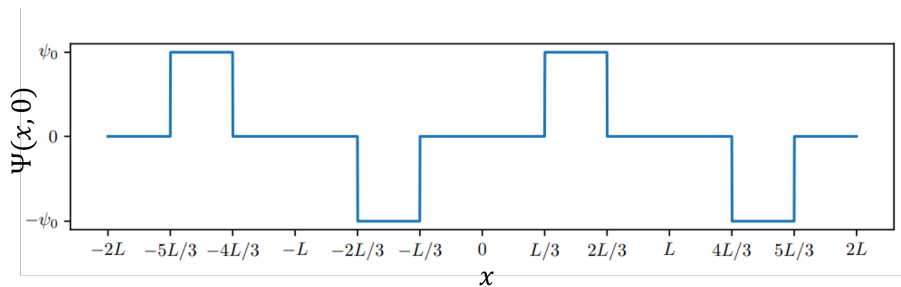


Figura 5.3: Extensión impar de $\tilde{\Psi}(x, 0)$.

Solo queda ahora resolver las integrales de las ecuaciones 5.3 tomando como período $2L$, es decir:

$$a_n = \frac{2}{2L} \int_0^{2L} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{2L}\right) dx = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \cos\left(\frac{\pi nx}{L}\right) dx \quad (5.12)$$

$$b_n = \frac{2}{2L} \int_0^{2L} f(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{2L}\right) dx = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right) dx, \quad (5.13)$$

a partir de las que se obtiene

$$a_n = 0 \quad (5.14)$$

$$b_{2n} = 0 \quad (5.15)$$

$$b_{2n-1} = \frac{4\psi_0}{\pi(2p-1)} \left[\cos\left(\frac{\pi(2p-1)}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi(2p-1)}{2}\right) \right] \quad (5.16)$$

Es decir que solo sobreviven los términos impares, al igual que la expansión en modos normales, por lo que podemos igualar los coeficientes $b_{2p-1} = A_p$ en la expresión 5.11. De modo que la solución para todo tiempo es

$$\Psi(x, t) = \sum_n \left\{ \frac{4\psi_0}{\pi(2p-1)} \left[\cos\left(\frac{\pi(2p-1)}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi(2p-1)}{2}\right) \right] \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right) \cos(\omega_n t + \varphi_n) \right\} \quad (5.17)$$

5.1.3. Ejemplo del uso de la transformada de Fourier en óptica

Observando la Fig. 5.2, es fácil recordar muchos problemas que resolvimos en Física 2:

1) Difracción en una rendija: la difracción en campo lejano es la transformada de Fourier de la rendija. Observar en la figura 5.2 que la transformada de la función cuadrada es la función seno cardinal.

2) La interferencia de N fuentes puntuales (campo lejano), es la transformada de Fourier de un peine de deltas como el último ejemplo de la figura 5.2. Esto da como resultado máximos (puntos brillantes) centrados en múltiplos de $2\pi/T$ (los ordenes de difracción). Estos máximos son más angostos cuanto más fuentes puntuales tenga.

3) En el caso más general, la difracción por una red se calcula como la interferencia de N fuentes puntuales (N es el número de rendijas iluminadas), multiplicado por la difracción en una de las rendijas (la transformada de Fourier de una de las rendijas).

5.2. Sintonizando señales con los piezoeléctricos

Vimos que, al alimentar al emisor con una señal sinusoidal de amplitud A_o , en el receptor se mide una señal de la misma frecuencia pero cuya amplitud depende de la misma ($A(\nu)$). Entonces podemos definir a la función transferencia del par emisor-receptor PE como $T(\nu) = A(\nu)/A_o$. Vemos entonces que, si la frecuencia de alimentación está cerca del máximo de la función transferencia (curva azul en la figura 5.4), la respuesta será mucho mayor que para una señal cuya frecuencia esté en las colas de la misma (curva verde). Podemos definir al factor calidad o de mérito como $Q = \nu_o/\Delta\nu$, donde ν_o es la frecuencia central y $\Delta\nu$ el ancho a mitad de altura de la campana de resonancia. Para el caso típico de los piezoeléctricos que se encuentran en el laboratorio, $Q \sim 0,1$. Ver que cuanto más

grande es la frecuencia de resonancia y más angosta la respuesta en frecuencias, Q se hace más grande.

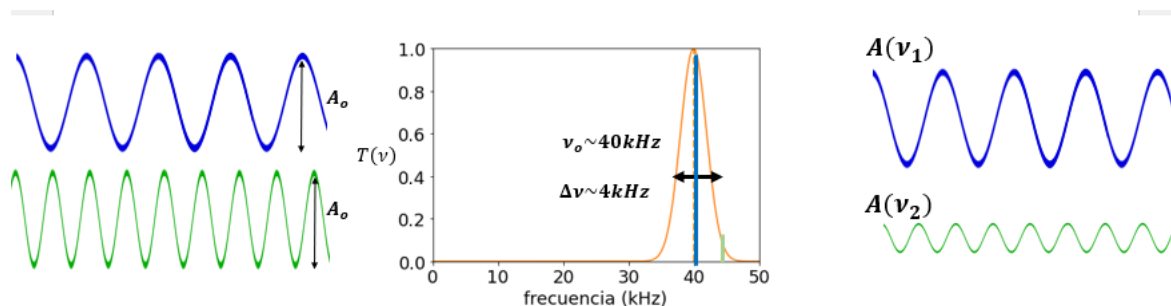


Figura 5.4: Izquierda: dos ejemplos de señales sinusoidales con distinta frecuencia con las cuales se alimenta un par ER. Medio: Curva de transferencia para el par ER. Notar que la frecuencia de la onda azul es un máximo en la función de transferencia, mientras que la verde no. Derecha: señal respuesta de cada excitación. Notar que en el caso de la onda azul la amplitud es mucho mayor que la verde.

Para pensar

¿Podemos pensar al piezoeléctrico como un filtro en frecuencias? (ver Fig. 5.4) Explicar. ¿Cómo debería ser Q para sintonizar las frecuencias con precisión grande?

5.3. Sintonizando señales periódicas

Vamos ahora a estudiar la capacidad del piezoeléctrico de sintonizar señales. Sabemos que, en general, si la señal es periódica podemos escribirla como una suma de señales armónicas a partir de la serie de Fourier. Tomemos el ejemplo particular de la señal cuadrada (ustedes en clase pueden tomar la que más les interese). Una señal periódica cuadrada de amplitud A cuya frecuencia es ν_o como la que se muestra en la figura 5.5, puede ser representada por la serie de Fourier cuyos términos corresponden a múltiplos impares de la frecuencia fundamental:

$$S(t) = \frac{4A}{\pi} \left\{ \sin(2\pi\nu_o t) + \frac{1}{3} \sin(2\pi(3\nu_o)t) + \frac{1}{5} \sin(2\pi(5\nu_o)t) + \dots \right\}. \quad (5.18)$$

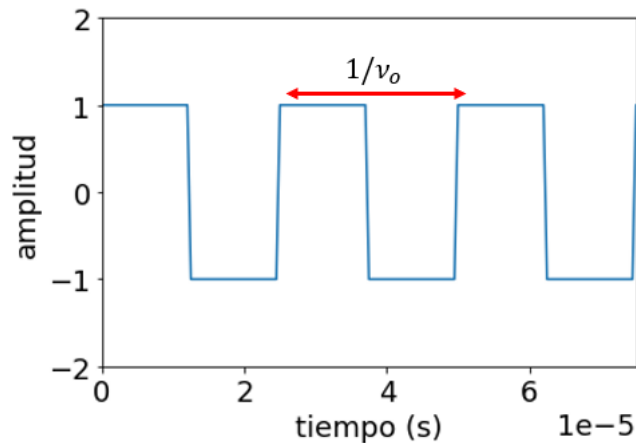


Figura 5.5: Señal periódica cuadrada de amplitud A y frecuencia ν_o .

Importante: Observar que no importa qué valor tome ν_o , los coeficientes de Fourier son siempre iguales ya que responden a la forma funcional de la señal.

En la figura 5.6(a) se puede observar la dependencia temporal de la señal y los primeros términos de la serie de Fourier. En la figura 5.6(b) se observa el **espectro** de frecuencias de la señal; es decir, la relación de los coeficientes de la serie de Fourier en función de la frecuencia. Se observa que, a medida que aumenta el número de armónico, la amplitud se hace cada vez más chica: esto hace pensar que, si bien la serie es una sumatoria infinita de términos, no necesitamos infinitos términos en la aproximación para tener una buena representación de la señal. En la figura 5.7 se puede observar la aproximación tomando $N=1$ y $N=10$ términos de la serie de Fourier.

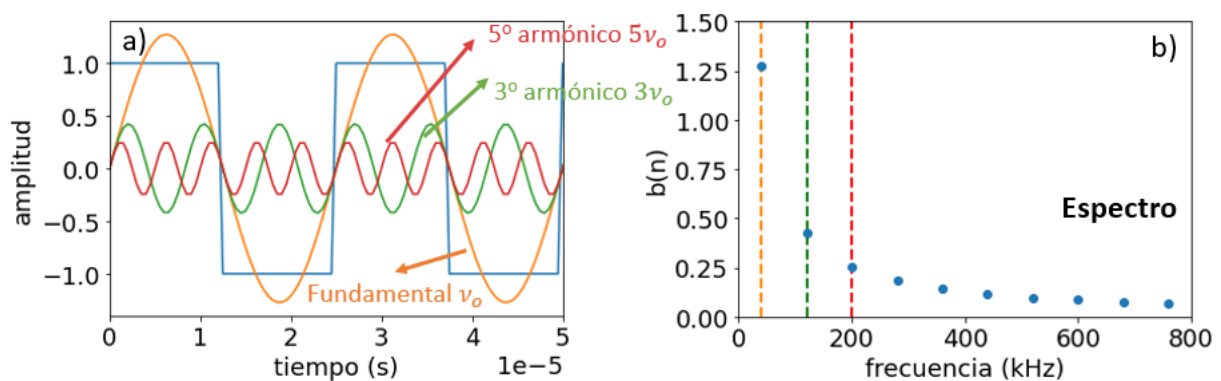


Figura 5.6: (a) Señal cuadrada (en azul) y los primeros tres términos de su serie de Fourier correspondientes al modo fundamental (amarillo), tercer (verde) y quinto (rojo) armónico. (b) Espectro de frecuencias de la señal cuadrada.

Ejercicio previo a la clase: Programar la serie de Fourier y graficarla para distintos valores de N . Estimar numéricamente el error de aproximación y definir cuántos términos es razonable tomar para tener una buena aproximación de la señal. Describir el criterio elegido.

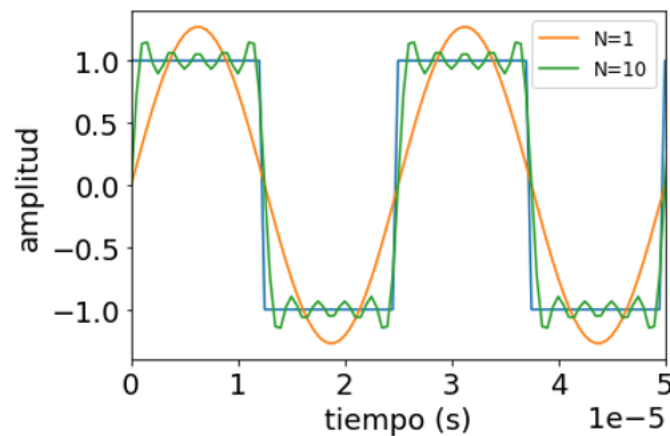


Figura 5.7: Aproximación a la señal cuadrada (azul) tomando $N=1$ (amarillo) y $N=10$ (verde) términos de la serie de Fourier.

Tal como se mencionó en la introducción de este capítulo, en cualquier instrumento para construir una señal se superponen ondas armónicas y, dado que el ancho de banda de los instrumentos es finito, no se pueden considerar infinitos términos en la superposición de las señales. Entonces, supongamos que el ancho de banda de nuestro instrumento es 800 kHz: en el caso del ejemplo podríamos tomar solo 10 términos de la serie, y por lo tanto mediríamos en el osciloscopio la señal que se muestra en la figura 5.7.

Para pensar y experimentar:

Observar en el osciloscopio el detalle de una onda cuadrada generada por el generador de funciones.

- ¿Cuál es el ancho de banda del generador de funciones? (está impreso en el mismo)
- ¿Cuál es el ancho de banda del osciloscopio? (está impreso en el mismo)
- ¿Cuál es el contenido espectral de la señal que estamos midiendo?
- ¿Quién lo limita: el osciloscopio o el generador de funciones?

Pensemos ahora el siguiente experimento. Alimentamos al piezoeléctrico emisor con una señal cuadrada. La frecuencia fundamental de la señal cuadrada la podemos cambiar libremente. ¿Qué se espera medir en el piezoeléctrico receptor? ¿Qué pasa cuando cambiamos la fundamental? Para responder esto podemos hacernos algunas preguntas que motiven el experimento. Aquí van algunos ejemplos, pero ¿qué otras preguntas se te ocurren?

Para pensar (antes de la clase) y experimentar (en clase):

Elegir la frecuencia de la señal con que se alimentará al piezoeléctrico. ¿Cómo es la separación entre las frecuencias los armónicos de la cuadrada respecto al ancho de la campana de resonancia?

¿Qué se mide en el receptor si se alimenta al emisor con una señal cuadrada de frecuencia:

- igual a la de resonancia del PE?
- igual a la de resonancia sobre un número entero impar?
- igual a la de resonancia sobre un número entero par?
- distinta a cualquiera de esas opciones?

¿Cómo utilizarías el piezoeléctrico para medir los coeficientes de la serie de Fourier?

¿Puedo reconstruir la señal empleando esos coeficientes de Fourier?

Explicar... ¡y hacerlo!

5.4. Respuesta impulsiva de un sistema

En todos los casos que vimos hasta ahora, el par ER fue alimentado con una onda periódica, y, por lo tanto, con un espectro de frecuencias discreto. Supongamos ahora que alimentamos al PE con una señal cuyo contenido espectral es continuo y coincidente con la función transferencia $T(\nu)$. Además supongamos que idealmente esta señal tiene un espectro plano, es decir, todas sus componentes espectrales tienen la misma amplitud. En la figura 5.8 se muestran algunas de las señales incluidas en la señal de alimentación en este experimento imaginario. Por lo que vimos hasta el momento, al medir en el receptor solo aquellas señales cuyas frecuencias coincidan con la campana de resonancia ofrecen una señal apreciable. Las señales con frecuencias coincidentes con la de resonancia tendrán

mayor amplitud y las que están hacia las colas de la función transferencia tendrán menor amplitud. En el receptor se mide entonces la superposición de todas esas señales. Es decir que, analizando el espectro de la señal medida, podemos medir la función transferencia del sistema piezoeléctrico ER.

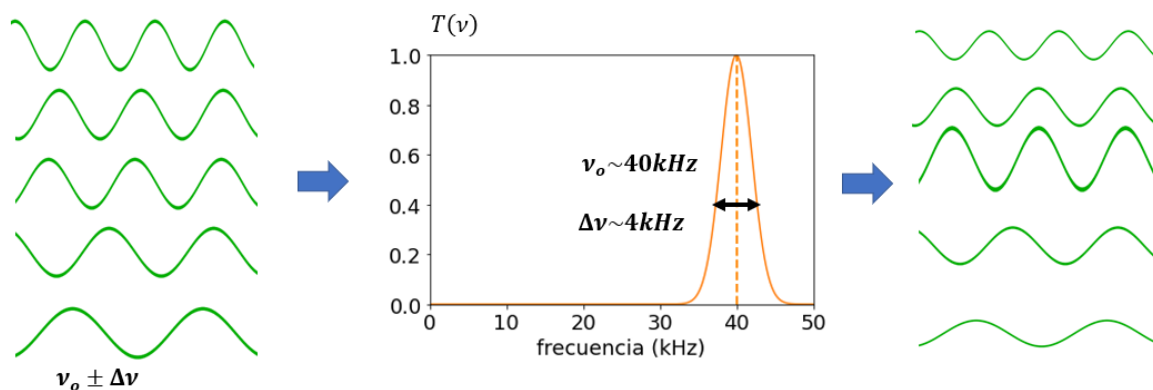


Figura 5.8: Esquema de la acción del par ER cuando se alimenta al emisor con ondas armónicas de igual amplitud cuyas frecuencias se encuentran en el rango donde la función transferencia $T(\nu)$ no es nula. La respuesta del par ER es la superposición de todas las ondas que se encuentran a la derecha.

Nos preguntamos ahora: ¿es posible excitar al PE simultáneamente en todo el rango en que este puede responder? Es decir, ¿existe alguna señal cuyo espectro sea continuo y se superponga con la función transmisión $T(\nu)$ del PE? ¿Cuál será esta señal?

Para responder esa pregunta necesitamos pensar en cuáles son las señales con mayor contenido espectral, y nos vamos a ayudar con situaciones que ya conocemos (¡y la figura 5.2!).

Analizar las siguientes situaciones con intuición y conocimiento:

- Un aplauso, un golpe en una mesa, un chasquido con los dedos, la explosión de un chaskiboom (todos lo conocemos no? :)): ¿cuánto dura el evento en el tiempo? ¿qué contenido espectral necesito para que suceda tan rápido?
- Hacer un experimento en casa grabando alguna de estas señales y utilizar la transformada de Fourier para analizar su contenido espectral.
- La difracción en una rendija en campo lejano: ¿cómo se relacionan la ‘función rendija’ y la ‘función difracción’? ¿Cuánto espacio ocupa la rendija? ¿Cuánto espacio ocupa la difracción? ¿Cómo se relaciona la difracción con la transformada de Fourier de la rendija?

Nota: Recordar la definición de la transformada de Fourier explicadas anteriormente.

5.4.1. Respuesta al impulso

Todas las situaciones que describimos anteriormente están relacionadas con señales del tipo impulsivas. Es decir, señales muy cortas en el tiempo y de amplitud muy grande. El impulso ideal es una $\delta(t)$ de Dirac, cuya transformada de Fourier (TF) es una constante (Fig. 5.2), por lo que su contenido espectral es infinito. Sin embargo, experimentalmente no podemos tener una señal que sea una delta (ya vimos que los dispositivos electrónicos tienen un ancho de banda limitado). Entonces, veamos cuál es la mejor señal impulsiva que podemos generar.

En la figura 5.9 se observa un pulso cuadrado de ancho Δt y altura $1/\Delta t$ (es decir área $A = 1$). Llamaremos a esta función $x(t) = \text{rect}(t)$. En el límite de $\Delta t \rightarrow 0$, el pulso cuadrado se parece cada vez más a la delta de Dirac. La TF del pulso cuadrado de ancho Δt es la función seno cardinal $\text{sinc}(\nu/\Delta\nu)$, que tiene su máximo en la frecuencia $\nu = 0$, y el ancho de la región más significativa es ($\sim 1/\Delta t$). Vemos que a medida que disminuye Δt el ancho de la función sinc aumenta, es decir, el contenido espectral aumenta. Entonces, generando el pulso más angosto posible obtendremos el mayor ancho espectral, pero centrado en la frecuencia $\nu = 0$.

Experimental: ¿Cuál es el pulso más angosto que se puede generar empleando el generador de funciones del laboratorio? ¿Qué contenido espectral tiene?

Todavía podríamos hacer un truco más para correr el centro del espectro a donde nosotros querramos. Supongamos que, en lugar de emplear una función cuadrada, empleamos una función armónica (portadora) modulada por una función cuadrada, $x(t) = \text{rect}(t)\sin(2\pi\nu_0 t)$. Para calcular la TF vamos a usar una propiedad de la transformada, cuya deducción van a aprender más adelante, pero es tan bueno que se los muestro ahora:

Propiedad: Dadas las funciones f y g , la transformada del producto se calcula así:

$$\mathcal{F}\{f(t)g(t)\} = \mathcal{F}\{f(t)\} * \mathcal{F}\{g(t)\} = F(\nu) * G(\nu)$$

Es decir: la transformada de un producto, es la convolución del producto de la trans-

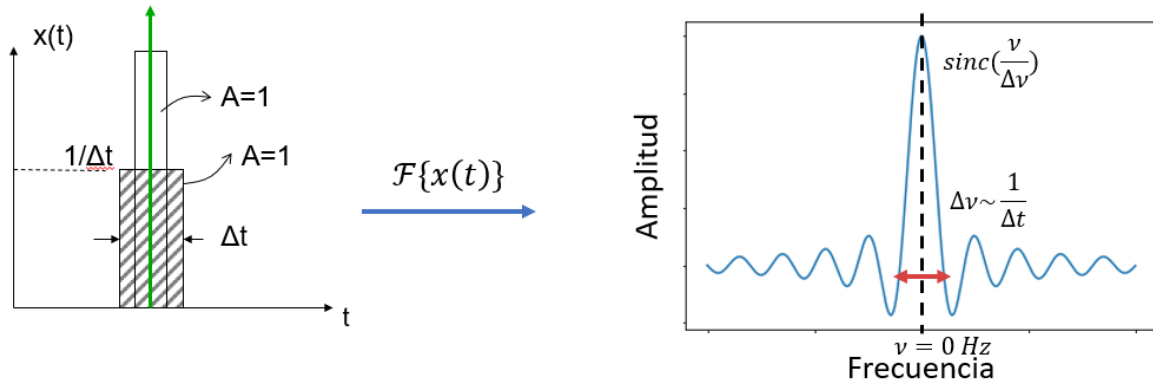


Figura 5.9: Esquema de un pulso cuadrado de ancho Δt y altura $1/\Delta t$ (izquierda) y su transformada de Fourier (derecha). A medida que $\Delta t \rightarrow 0$, el pulso se parece cada vez más a una delta y la transformada a una constante.

formada

Entonces, la TF de $x(t)$ se puede expresar como (la cuenta que sigue va para quienes hayan hecho Matemática 4, quienes aun no hayan cursado vean directamente el resultado):

$$F(\nu) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}\{\text{rect}(t)\sin(2\pi\nu_o t)\} = \mathcal{F}\{\sin(2\pi\nu_o t)\} * \mathcal{F}\{\text{rect}(t)\} = \quad (5.19)$$

$$F(\nu) = \delta(\nu - \nu_o) * \text{sinc}(\nu/\Delta\nu) = \text{sinc}((\nu - \nu_o)/\Delta\nu) \quad (5.20)$$

en donde usamos los resultados de la tabla 5.2 para calcular las transformadas. Es decir, agregar la portadora nos permitió correr el espectro a la frecuencia que querramos. En la figura 5.10 podemos ver un ejemplo de la señal y su transformada para una portadora de frecuencia $\nu_o = 10$ kHz. Sin embargo, cuanto más angosto es el pulso, menos oscilaciones entran, y cada vez menos se parece la señal a una modulación y una portadora.

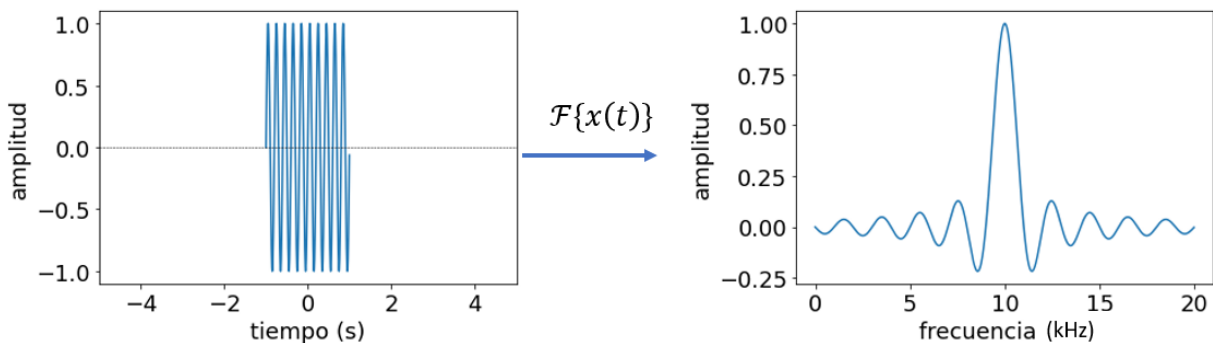


Figura 5.10: Ejemplo de una señal armónica modulada por una función cuadrada y su transformada de Fourier

Volvamos ahora al caso del pulso cuadrado, y analicemos un ejemplo hipotético sencillo para ver cómo es la evolución temporal para distintos anchos de impulsos, o a medida que el pulso cuadrado se acorta para parecerse más a un impulso ideal. El caso que se muestra podría ser el de un oscilador amortiguado. Queremos analizar qué sucede cuando, luego de recibir el impulso, el sistema evoluciona. Vemos que el ancho del pulso fija la condición inicial para la evolución posterior. Cuanto más corto, menos importante lo que suceda dentro del pulso; es decir, se lleva al sistema a la condición inicial instantáneamente. La evolución posterior depende de las frecuencias que se hayan activado, hasta que el sistema decae completamente. Si el sistema tiene asociadas varias frecuencias o un ancho de frecuencias, cada señal asociada a una frecuencia individual decaerá con el tiempo característico propio, pero la señal total será la superposición de todas las señales. Es decir, estamos dando un impulso al sistema, y este reaccionará activando todas sus frecuencias que coincidan en rango espectral con las del impulso (idealmente un rango infinito), y la evolución posterior será que cada componente espectral decaerá con su tiempo característico. La respuesta total es la superposición de las respuestas individuales en cada frecuencia. Seguiremos trabajando con el concepto de frecuencias activadas en la siguiente sección.

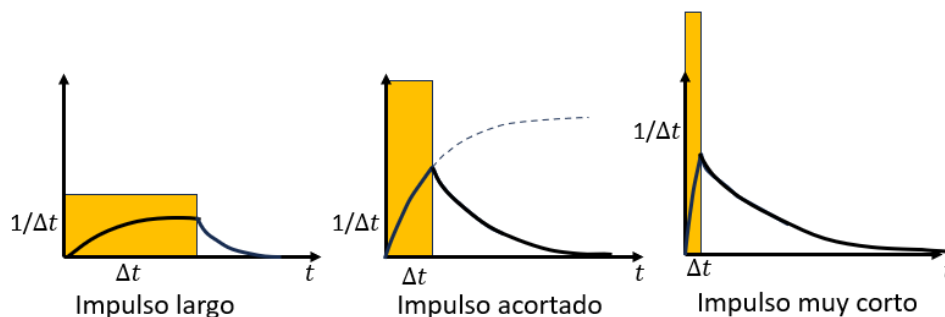


Figura 5.11: Dependencia temporal de una señal ante distintos impulsos. Cuanto más corto el impulso, es menos importante lo que pase durante Δt , la evolución posterior depende de las frecuencias activas del sistema.

5.4.2. Respuesta al escalón

En los experimentos de tiempo de vuelo en ultrasonido (piezoeléctricos) y en sonido (tubo de Kundt) usamos una señal cuadrada de baja frecuencia ($\sim 10Hz$) para medir con qué velocidad se propaga el flanco de la señal en el aire. Para eso medimos el retardo Δt entre la señal medida en el receptor (PE receptor o micrófono) y la señal de alimentación en función de la distancia entre el emisor y el receptor d , y usamos que $d = c_s \Delta t$, donde c_s

es la velocidad de propagación de las ondas. Como ejemplo de las señales medidas, en la figura observamos la señal que resulta de alimentar a un piezoeléctrico con dicho flanco.

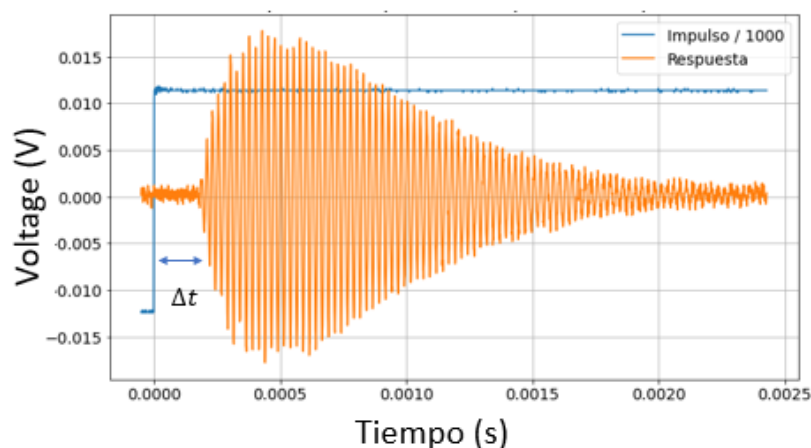


Figura 5.12: Respuesta del par ER (naranja) cuando se alimenta al emisor con una señal cuadrada de baja frecuencia (azul). Δt es el retardo entre que la señal es enviada por el emisor y recibida por el receptor.

Tratemos de entender ahora, por qué la señal adquiere esa forma. En primer lugar vemos que, para las escalas temporales que estamos manejando, podemos pensar que la señal cuadrada es simplemente una señal constante nula (frecuencia cero), un flanco vertical (ahora veremos que significa vertical) y nuevamente una señal constante (frecuencia cero). Sabemos que el piezoeléctrico no tiene respuesta en $\nu = 0$, entonces si lo estamos excitando, es porque el flanco tiene al menos una porción de su contenido espectral que coincide con al función transferencia del PE, $T(\nu)$.

Comencemos analizando conceptualmente al flanco, luego daremos descripciones más matemáticas. En la figura 5.13(a) vemos un flanco típico que podríamos medir con un osciloscopio. Podemos caracterizar al flanco midiendo el tiempo de subida de la señal (o *rise time*) t_r que se suele caracterizar midiendo el tiempo que tarda la señal en subir del 10% al 90% del valor estable. En el ejemplo de la figura 5.13(b) se observa cómo el flanco de una señal cuadrada se va ajustando por una serie de Fourier que considera cada vez más términos. Vemos que si solo consideramos el primer armónico (una onda sinusoidal con la frecuencia fundamental) la subida de la señal es muy suave. También vemos que su flanco es más vertical cuanto más términos de la serie se consideran. Lo que estamos diciendo es que para tener un flanco vertical se necesita mucho contenido espectral. Pero ¿cuánto es mucho? Se puede ver, analizando la transformada de Fourier,

que el tiempo de subida de la señal es inversamente proporcional al ancho de banda $t_r = 0,35/BW(\text{bandwidth})$. Entonces por ejemplo, si el tiempo de subida es 10 ns, el ancho de banda es aproximadamente 35 MHz, que es 3 ordenes de magnitud mayor que la frecuencia que necesitamos para excitar al PE.

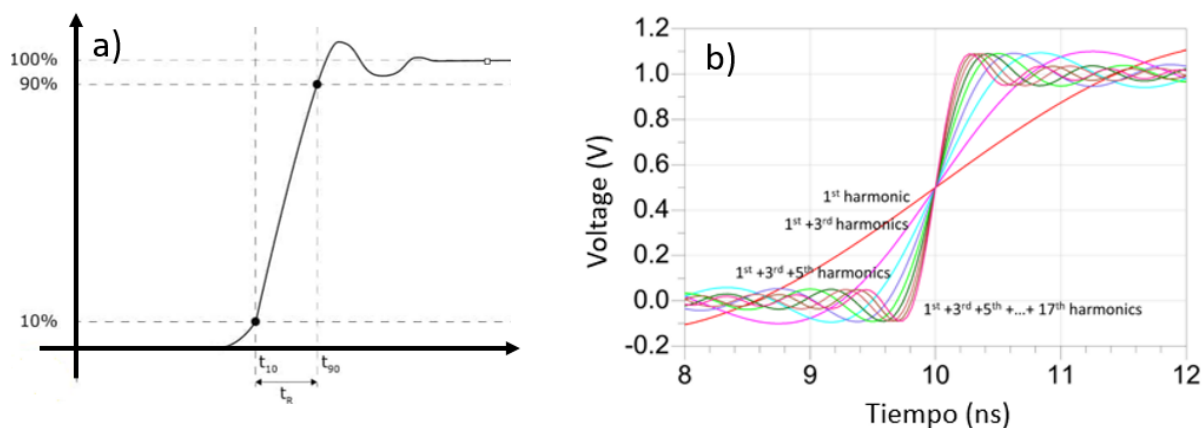


Figura 5.13: (a) Flanco de una señal cuadrada y medición del tiempo de subida (t_r). (b) Ejemplo de como la suma de más armónicos (o términos en la sumatoria) en la serie de Fourier reconstruye cada vez mejor una onda cuadrada.

Para experimentar

- Caracterizar el flanco de una señal producida en el generador de funciones empleando el osciloscopio. ¿Cuál es el tiempo de subida? ¿Cuál es el contenido espectral? ¿Quién lo limita: el generador, el osciloscopio o ambos?
- Comparar el ancho del pulso más angosto con el tiempo de subida. ¿Cuál de las dos señales es más rápida? ¿Cuál tiene mayor contenido espectral?

Nota: Si bien se comparó el flanco con términos de una serie de Fourier, todo este análisis se puede realizar empleando la transformada de Fourier de la función Heaviside: su comportamiento con la frecuencia, al igual que los términos de la serie, va como $1/\nu$ [?].

Entonces tenemos ancho de banda suficiente para excitar al PE, y lo estamos excitando en todas sus frecuencias. ¿Cómo entendemos entonces la señal de respuesta? En primer lugar, se observa que hay un retardo Δt entre que la señal es emitida y el PE receptor la recibe. Luego, de todas las posibles frecuencias contenidas en el flanco, solo aquellas que coinciden con $T(\nu)$ tienen una amplitud significativa. La señal total es la superposición de

todas las señales cuyas frecuencias están contenidas en $T(\nu)$, con amplitudes dadas por $T(\nu)$. Como todas las frecuencias están muy juntas, el resultado de dicha superposición es un batido.

Si entonces realizamos la transformada de Fourier de la señal medida, obtendremos la función transmisión del par ER.

Pensar y experimentar

Pensar cuáles son las diferencias y similitudes que hay entre el par ER piezo-eléctrico y el micrófono-parlante en el tubo de Kundt.

- ¿Cómo se comparan los anchos de banda de sus respuestas?
- ¿Cómo se comparan las frecuencias que se pueden propagar entre ellos?
- ¿Qué se espera obtener si se realiza el experimento de la respuesta impulsiva en el tubo de Kundt?

5.5. Frecuencia de muestreo y transformada de Fourier

Cuando medimos con un instrumento en el laboratorio, a pesar de que la variable de interés sea continua, obtenemos una muestra discreta de esa variable. Por ejemplo, cuando medimos la amplitud de la onda en función del tiempo, estamos de acuerdo que tanto la amplitud como el tiempo son variables continuas; sin embargo, el osciloscopio nos entrega una señal que es digitalizada y muestreada.

La digitalización depende de los bits que tenga la placa de adquisición del osciloscopio o del instrumento que estemos usando. Por ejemplo, si nuestra placa es de 12 bits, significa que todo el rango dinámico que puede medir nuestro instrumento ΔV , va a estar dividido en valores digitales $\Delta V/2^{12}$.

El muestreo de una señal dependiente del tiempo corresponde a tomar datos equiespaciados en un tiempo dt o a una frecuencia de muestreo $f_s = 1/dt$ determinada. La frecuencia de muestreo define el número de muestras que se obtienen de la señal por segundo, y está limitada por el instrumento de medición. En este proceso hay que ser cuidadosos en no perder información de la señal. En la Figura 5.14 se muestra un ejemplo

de una señal muestreada (medida) utilizando una frecuencia más chica que la de la señal a medir, por lo que se obtienen puntos discretos sobre la señal. Sin embargo, se observa que la señal muestreada (puntos azules) poco tiene que ver con la señal que se desea medir. Si la frecuencia de muestreo no es adecuada, la señal medida puede resultar en una señal completamente distinta a la original. Este efecto se lo conoce como *aliasing*.

El teorema de Nyquist, establece que una señal estará correctamente muestreada si la frecuencia de muestreo f_s es al menos el doble de la frecuencia más alta de la señal f_{max} .

$$f_s > 2f_n. \quad (5.21)$$

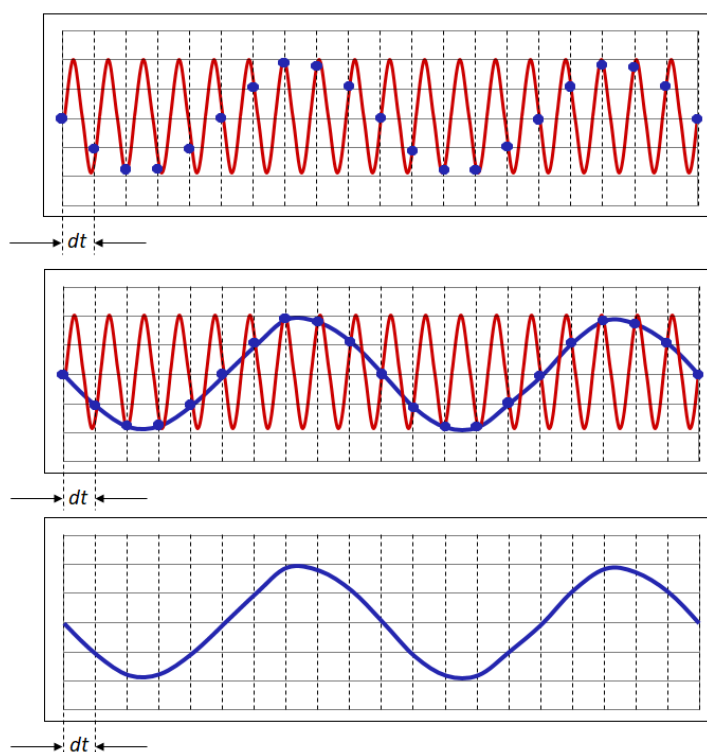


Figura 5.14: Señal continua periódica de frecuencia f_0 (en rojo) y señal medida (en azul) con una frecuencia de muestreo $f_s < f_0$ tal que la señal que se obtiene es una onda armónica con una frecuencia distinta a f_0 .

Si, por ejemplo, se desea muestrear una señal que contenga frecuencias de hasta 8 kHz, se necesita una frecuencia de muestreo de al menos 16 kHz. La mitad de la frecuencia de muestreo (equivalente a f_{max}), en este ejemplo 8 kHz, se denomina frecuencia de Nyquist, f_n .

Veamos cómo se desprende este teorema observando el espectro en frecuencias (espacio transformado) de la señal. En la Figura 5.15 se observa una señal continua $g(t)$ en el espacio de tiempos y su transformada $G(f)$ en el espacio de frecuencias. Consideremos que la señal tiene un espectro de frecuencias acotado.

La señal muestreada $g_s(t)$ resulta de hacer el producto entre la señal continua y el muestreo, que está representado por el peine de deltas

$$s(t) = \sum_n \delta(t - n\delta t) \quad (5.22)$$

La transformada del peine de deltas es también un peine de deltas que están a una distancia f_s entre sí:

$$S(f) = \sum_n \delta(f - n f_s) \quad (5.23)$$

Es decir que, cuanto mas chico sea δt , más van a estar separadas las deltas del peine en el espacio de las frecuencias.

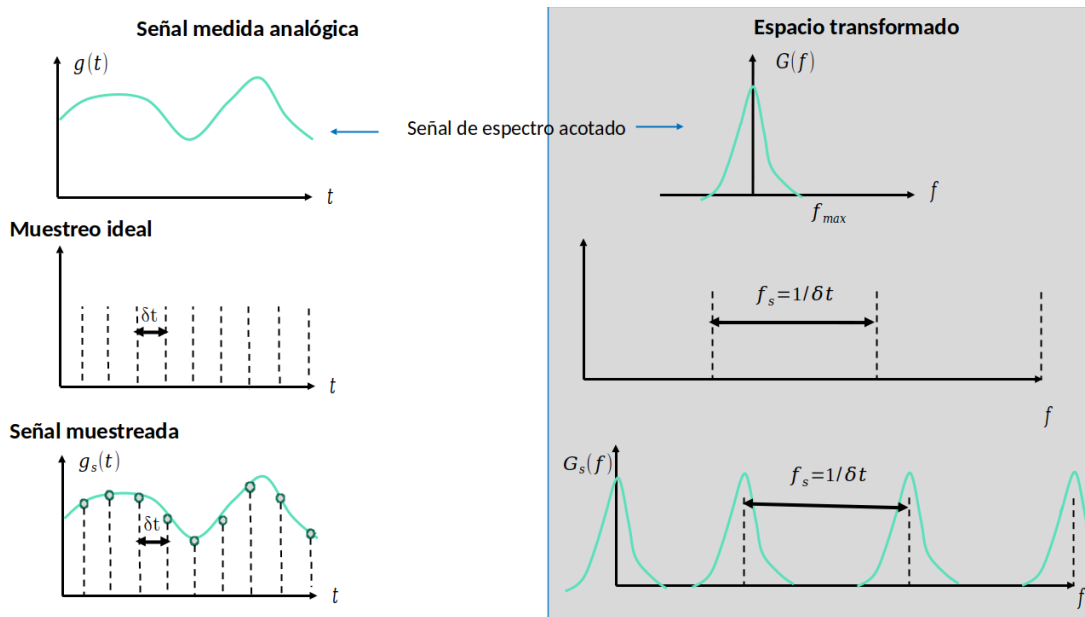


Figura 5.15: Medición de una señal continua en el tiempo y su representación en el espacio transformado de frecuencias.

La señal muestreada resulta entonces

$$g_s(t) = g(t) \sum_n \delta(t - n\delta t) = \sum_n g(n\delta t) \delta(t - n\delta t).$$

Ahora tenemos que ver cómo es el espectro de esta función, y para eso hacemos la transformada. Podemos usar una propiedad muy interesante de las transformadas y la convolución que dice que la transformada del producto de funciones, es igual a la convolución de las transformadas. Es decir:

$$\mathcal{F}\{g(t)h(t)\} = \mathcal{F}\{g(t)\} * \mathcal{F}\{h(t)\} \quad (5.24)$$

Entonces podemos calcular el espectro de la función muestreada como

$$G_s(f) = \mathcal{F}\{g(t)\} * \mathcal{F}\left\{\sum_n \delta(t - n\delta t)\right\} = G(f) * \sum_n \delta(f - nf_s) = \sum_n G(f - nf_s).$$

donde $G(f)$ es la transformada de la función sin muestrear (es decir el espectro de la señal original). No hace falta entrar en el detalle de cómo se calcula la convolución pero, en esencia, lo que implica la expresión más a la derecha es que tenemos una réplica de $G(f)$ centrada en cada posición $f = nf_s$. Veamos cómo se ve la señal en el espacio transformado cuando cambia la frecuencia de muestreo, o lo que es lo mismo, el dt en el espacio de tiempos. En la Fig. 5.17 se ven dos ejemplos: se observa que al aumentar dt (y por lo tanto disminuir f_s), en el espacio transformado comienzan a solaparse las réplicas vecinas. Esto da lugar al efecto de *aliasing* que mencionamos antes (la aparición de frecuencias que previamente no existían). Fíjense que ahora la condición de Nyquist surge naturalmente, ya que f_s tiene que ser por lo menos mayor que $2f_{max}$, para que las réplicas no se solapen.

Ahora nos preguntamos ¿cómo está muestreada la transformada? De hecho, tiene que estar muestreada, porque no podemos obtener una transformada continua si la función original es discreta. Si se realizan N mediciones (muestras) sobre la señal $g(t)$, la duración total de la señal está dada por $\Delta t = Ndt$. Mediante la transformada de Fourier discreta (DFT) en el espacio transformado obtendremos N valores de $G_s(f)$ en el intervalo $(-f_s/2, f_s/2)$ (ancho f_s). Por lo tanto, dado que en el espacio transformado tenemos también N muestras, el espaciado de frecuencias será $\Delta f = f_s/N = 1/(Ndt) = 1/\Delta t$ (ver Fig. 5.16). Es decir: **la resolución de la transformada está dada por el largo total de la medición.**

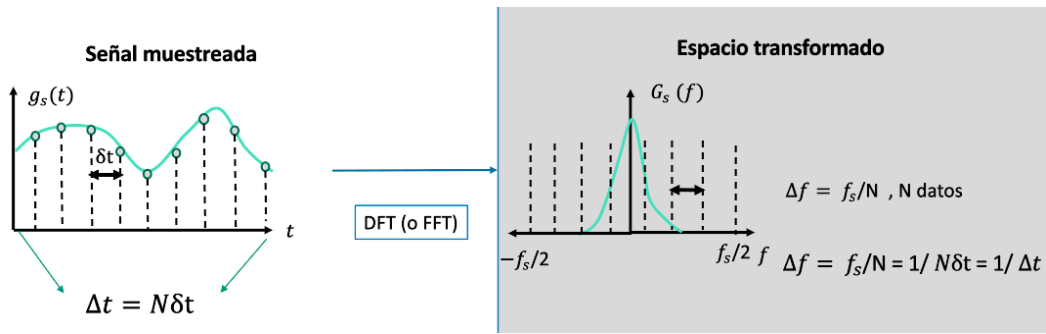


Figura 5.16: Esquema de la relación entre el tiempo en el espacio de coordenadas y las frecuencias en el espacio transformado.

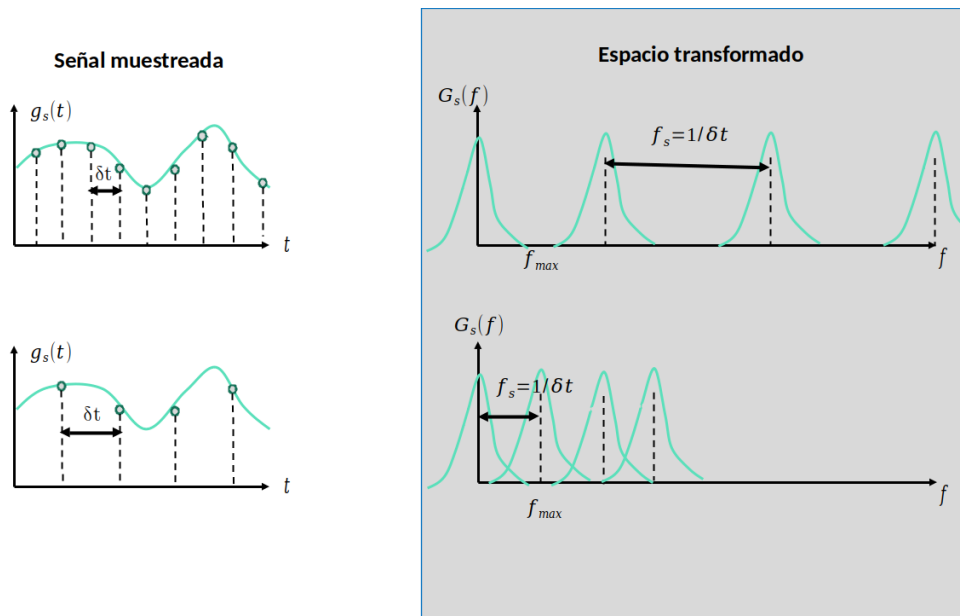


Figura 5.17: Ejemplo de una señal medida con dos frecuencias de muestreo diferentes, tanto en el espacio de coordenadas (tiempo) como en el espacio transformado (frecuencias).

Para pensar: Supongamos que se quiere medir la campana de resonancia del par PE a partir de la transformada de su respuesta. ¿Cuánto tiempo tengo que medir? ¿Qué frecuencia de muestreo debo usar para que no haya *aliasing* si la campana está centrada en 40kHz y tiene una ancho de 5kHz? Piensen en cuántos puntos se necesitan mínimo para medir bien la campana.

