Capítulo 10

Apéndice

10.1. Transformada de Fourier de la señal del Michelson

Queremos hallar la transformada de Fourier de la señal medida en el Michelson cuando se desplaza el piezoeléctrico, que tiene la forma

$$1 + cos(kx(t))$$

donde $x(t)$ es la posición en función del tiempo, para la que vamos a suponer que es triangular periódica. Una onda triangular con período T y amplitud 1 se puede representar como:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{4}{T}t - 1 & \text{para } 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -\frac{4}{T}t + 3 & \text{para } \frac{T}{2} \leq t < T \end{cases}$$

Como es periódica podemos expresarla como una serie de Fourier de la forma

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{T}t}$$

con

$$c_n = x_o \frac{8}{\pi^2} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2}$$

De modo que

$$x(t) = x_o \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,\,\text{impar}}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right)$$

Transformada de Fourier de $1 + \cos(kx(t))$:

1. Transformada de Fourier del Término Constante 1
Usamos que la transformada de Fourier de una función constante c está dada por:

$$\mathcal{F}\{c\}(\omega) = c\delta(\omega)$$

Para $c = 1$:

$$\mathcal{F}\{1\}(\omega) = \delta(\omega)$$

Esto significa que vas a tener señal en la transformada para frecuencia $\omega = 0$
2. Transformada de Fourier de $\cos(kx(t))$

Necesitamos calcular:

$$\mathcal{F}\{\cos(kx(t))\}(\omega) = \mathcal{F}\left\{\cos\left(k \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{T}x}\right)\right\}$$

donde los c_n son los que se dieron previamente. Para calcular esta transformada, vamos a escribir el coseno en término de exponenciales y luego calcular la transformada de exponenciales de la siguiente manera

$$\mathcal{F}\{\cos(kx(t))\}(\omega) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}\{e^{ikx(t)}\}(\omega) + \mathcal{F}\{e^{-ikx(t)}\}(\omega)\right)$$

Enfoquémosnos en uno solo de los términos, por ejemplo en $\mathcal{F}\{e^{ikx(t)}\}(\omega)$ porque calculando uno, el resultado del otro se obtienen cambiando k por $-k$. Tenemos que usar la propiedad que la exponencial de una sumatoria, es el producto de exponenciales, es decir:

$$e^{ikx(t)} = e^{ik\sum_{n,n=1,\,\text{odd}}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{T}t}} = \prod_{n=1,\,\text{odd}}^{\infty} e^{ikc_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)}$$

Ahora, podemos calcular la transformada de un producto de exponenciales, para lo que vamos a usar que la transformada de un producto es la convolución de la transformadas. Es decir, vamos a usar que

$$\mathcal{F}\{\ f \cdot g\}(\omega) = \mathcal{F}\{\ f\}(\omega) * \mathcal{F}\{\ g\}(\omega)$$

Entonces nos queda,

$$\mathcal{F}\{\ e^{ikx(t)}\}(\omega) = \mathcal{F}\{\ e^{ikc_1 \cos\left(\frac{2\pi 1}{T}t\right)}\} * \mathcal{F}\{\ e^{ikc_3 \cos\left(\frac{2\pi 3}{T}t\right)}\} * ....\mathcal{F}\{\ e^{ikc_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)}\} * ... \quad (10.1)$$

Es decir, que si resolvemos la transformada de Fourier de un término genérico alcanza, porque todos tienen la misma forma. La transformada de un término genérico la conocemos y vale (ver más abajo el cálculo)

$$\mathcal{F}\left\{e^{ikc_s \cos\left(\frac{2\pi s}{T}t\right)}\right\}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kc_s)\delta\left(\omega - \frac{2\pi n s}{T}\right) \quad (10.2)$$

en donde J_n son funciones de Bessel de primer tipo de orden n.

Lo que viene ahora seria reemplazar cada uno de los términos en la ecuación **??**, es bastante lío, pero lo importante es darse cuenta que cada uno de los términos de la productoria tiene una δ en frecuencias que son únicamente múltiplos de la frecuencia de la alimentación, y por lo tanto, en principio, no deberían aparecer frecuencias que tengan que ver con el desplazamiento del piezo. En cambio, la información del desplazamiento del piezo está en las amplitudes, es decir, en las $J_n(kc_s)$. Más abajo hay una cuenta de dos exponenciales, pero con esta justificación en principio quedaría demostrado, que no hay info en las frecuencias sobre el desplazamiento de los piezos.

10.1.1. Transformada de Fourier de una exponencial

Usamos la representación en serie de Fourier para expresar la función exponencial en términos de funciones de Bessel:

$$e^{ikc_s \cos\left(\frac{2\pi s}{T}t\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kc_s) e^{in\frac{2\pi s}{T}t}$$

Donde J_n es la función de Bessel de primera clase de orden n.
La transformada de Fourier de $e^{in\frac{2\pi s}{T}t}$ es un delta de Dirac centrado en $\frac{2\pi ns}{T}$:

$$\mathcal{F}\{e^{in\frac{2\pi s}{T}t}\} = \delta\left(\omega - \frac{2\pi ns}{T}\right)$$

Entonces, la transformada de Fourier de $e^{ikc_s \cos\left(\frac{2\pi s}{T}t\right)}$ es:

$$\mathcal{F}\left\{e^{ikc_s \cos\left(\frac{2\pi s}{T}t\right)}\right\}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kc_s)\delta\left(\omega - \frac{2\pi ns}{T}\right)$$

10.1.2. Transformada de Fourier del producto de dos exponenciales

Para encontrar la transformada de Fourier del producto de las dos funciones, realizamos la convolución de las transformadas de Fourier individuales:

$$\mathcal{F}\left\{e^{ikc_s \cos\left(\frac{2\pi s}{T}t\right)}\right\} * \mathcal{F}\left\{e^{ikc_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)}\right\}$$

La convolución de dos deltas de Dirac $\delta(\omega - \omega_1)$ y $\delta(\omega - \omega_2)$ se realiza de la siguiente manera:

$$(\delta(\omega - \omega_1) * \delta(\omega - \omega_2))(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega' - \omega_1)\delta(\omega - \omega' - \omega_2)\, d\omega' = \delta(\omega - (\omega_1 + \omega_2))$$

Aplicando esto a nuestras series de funciones de Bessel, obtenemos:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kc_s)\delta\left(\omega - \frac{2\pi ns}{T}\right) * \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(kc_k)\delta\left(\omega - \frac{2\pi mk}{T}\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^n i^m J_n(kc_s)J_m(kc_k)\delta\left(\omega - \frac{2\pi(ns + mk)}{T}\right)$$

La transformada de Fourier del producto de las dos funciones es:

$$\mathcal{F}\left\{e^{ikc_s \cos\left(\frac{2\pi s}{T}t\right)}e^{ikc_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)}\right\}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^{n+m} J_n(kc_s)J_m(kc_k)\delta\left(\omega - \frac{2\pi(ns + mk)}{T}\right)$$

10.1.3. Todas las frecuencias

Para calcular la transformada de Fourier del producto infinito de exponenciales de cosenos, es útil recordar que cada exponencial de un coseno se puede expresar en términos de una serie de funciones de Bessel. Usaremos la propiedad de que la transformada de Fourier de un producto de funciones en el dominio del tiempo corresponde a la convolución de sus respectivas transformadas de Fourier en el dominio de la frecuencia.

Para encontrar la transformada de Fourier del producto de todas estas funciones, realizamos la convolución de todas sus transformadas de Fourier. La convolución de muchas deltas de Dirac resulta en una delta de Dirac centrada en la suma de las posiciones de las deltas individuales. Por lo tanto, la transformada de Fourier del producto infinito será una suma infinita de convoluciones.

$$\mathcal{F}\left\{\prod_{n=1,\,\mathrm{odd}}^{\infty} e^{ikc_n\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)}\right\}(\omega) = \tag{10.3}$$

$$\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\sum_{m_3=-\infty}^{\infty}\sum_{m_5=-\infty}^{\infty}\cdots\left(\prod_{n=1,\,\mathrm{odd}}^{\infty} i^{m_n} J_{m_n}(kc_n)\right)\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{T}\sum_{n=1,\,\mathrm{odd}}^{\infty} m_n n\right)$$

Donde la suma se realiza sobre todos los índices m_n correspondientes a los términos impares n.