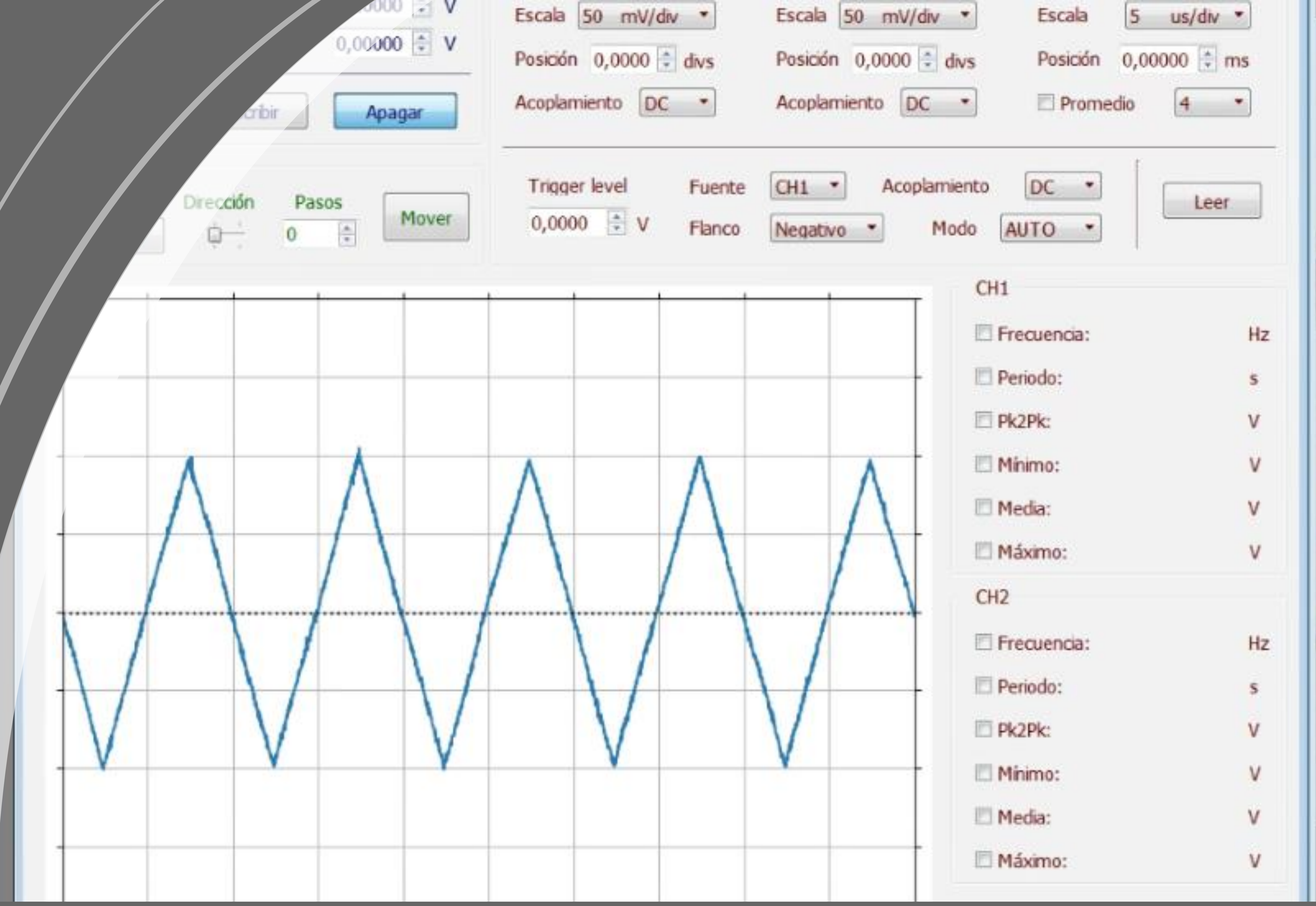
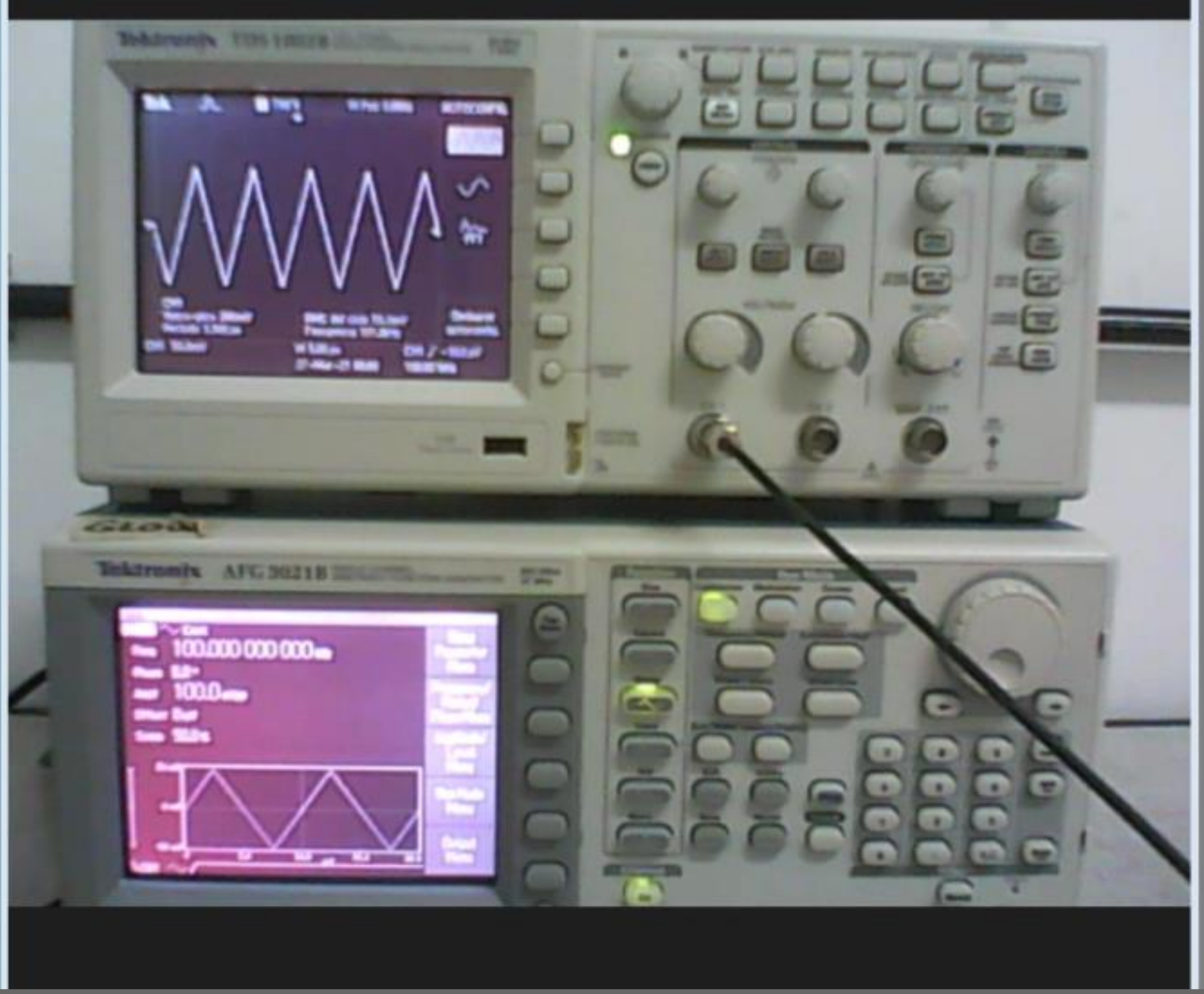
# Laboratorio 2
# Verano 2024



## Clase 5
## 15/02/2024
## Ondas estacionarias
## Cuerdas

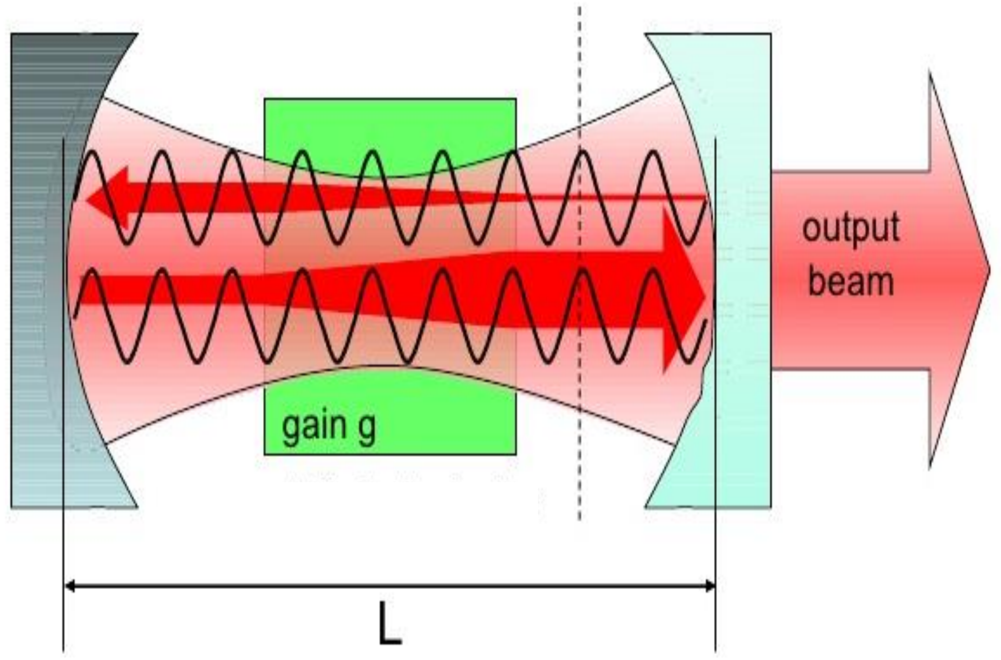
# Ondas estacionarias

Si las ondas están confinadas espacialmente, por ej. :

***Ondas en las cuerdas de un piano, guitarra, etc***

***Ondas sonoras en un tubo de un órgano***

***Ondas luminosas en una cavidad laser***




Se producen reflexiones en ambos extremos ya que las ondas viajen en ambas direcciones

Esas ondas **se superponen e interfieren**.
Hay ciertas frecuencias para las cuales esta superposición lleva a una configuración de vibración estacionaria (***Ondas estacionarias***).

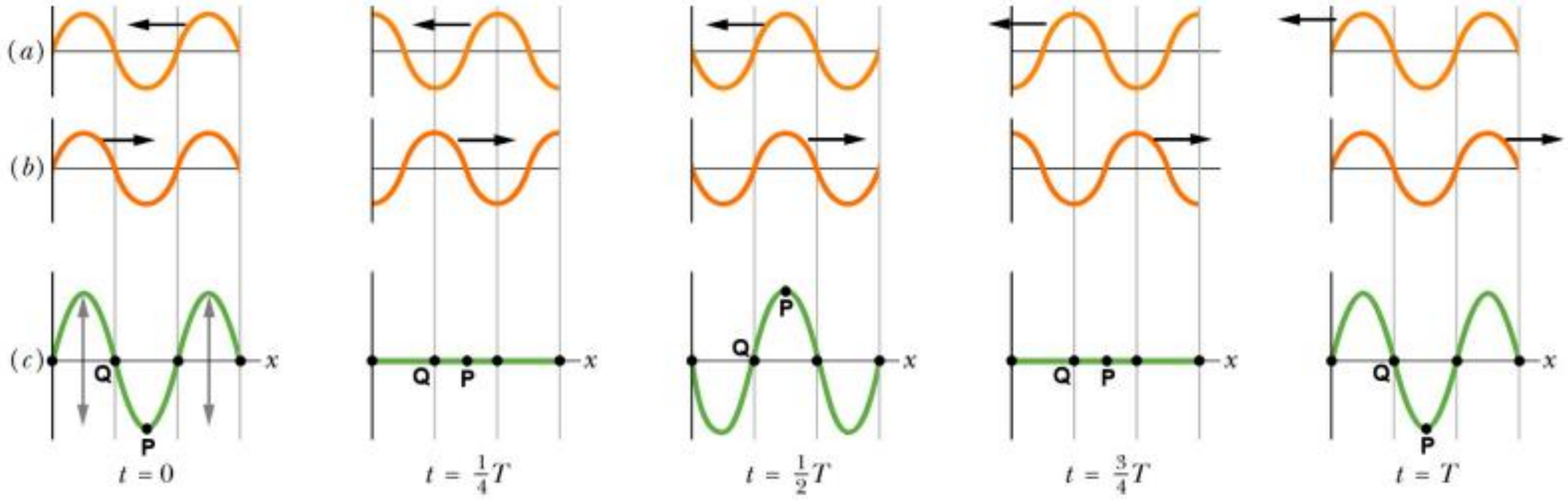
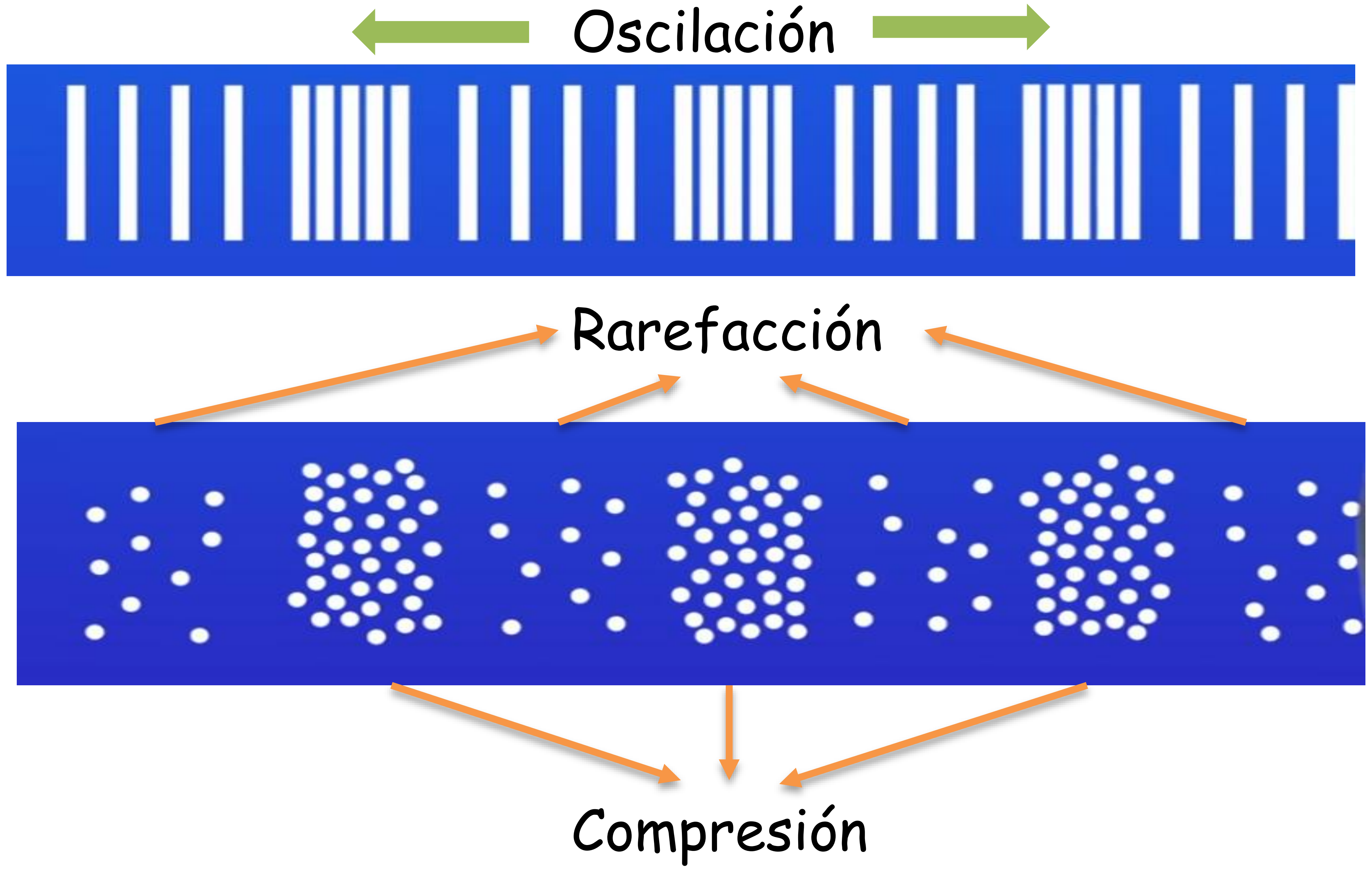



**Figure 3:** Two traveling waves (a) and (b) going in opposite directions generate a standing wave (c).

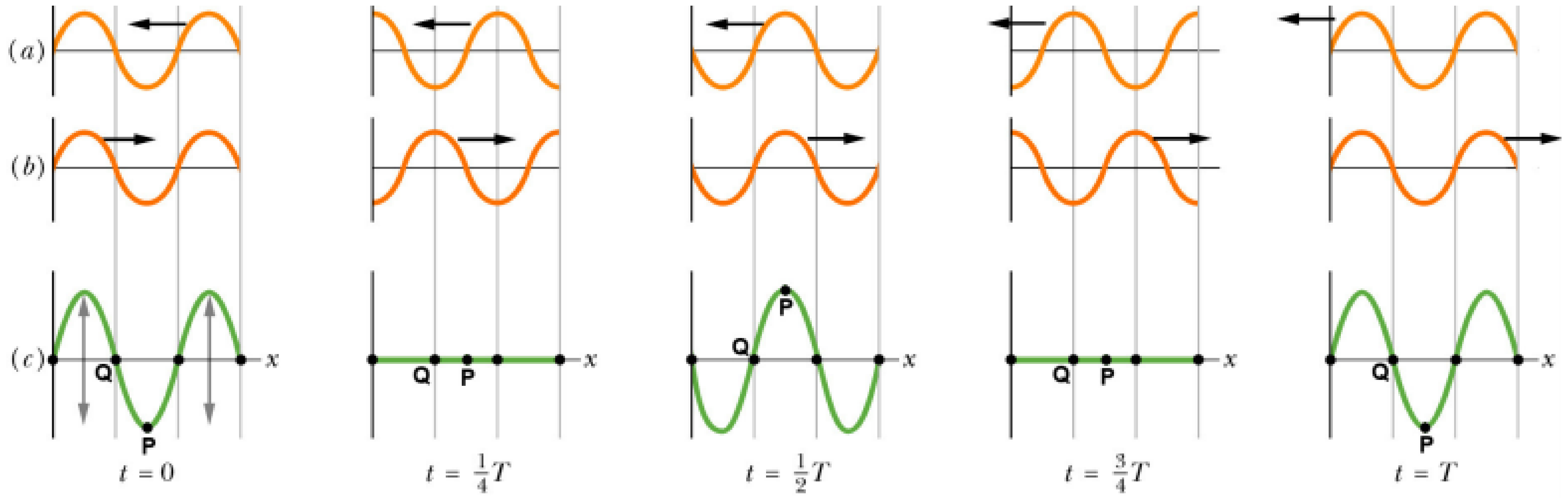
Ondas transversales

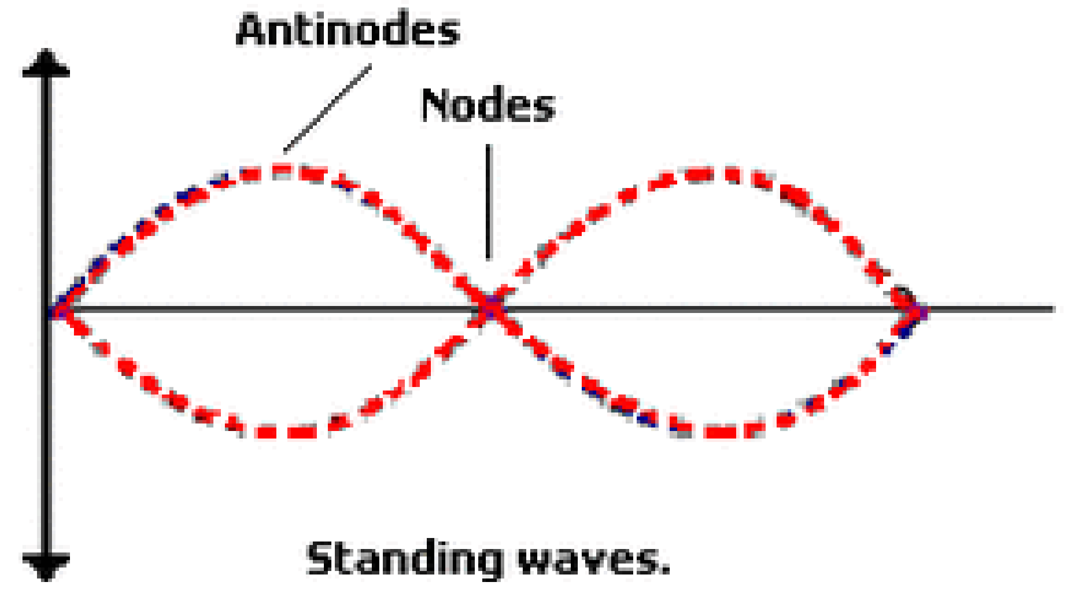

La onda se mueve hacia arriba y abajo : oscilación
La onda oscila perpendicular a la dirección de transferencia de energía

Ondas longitudinales




La onda oscila paralela a la dirección de transferencia de energía




Si se fijan ambos extremos de una cuerda y se mueve una parte de la cuerda hacia arriba y abajo con un movimiento armónico simple de pequeña amplitud se encuentran configuraciones de onda estacionaria a ciertas frecuencias (frecuencias de resonancia).

A cada frecuencia le corresponde una función de onda y es un modo de vibración.

Existen ciertos puntos de la onda estacionaria donde no hay movimiento que son llamados **nodos**.

En el punto medio entre dos nodos se da el sitio de máximo movimiento : **antinodos**.

En los extremos fijos de la cuerda hay nodos.
Si un extremo está fijo y el otro sometido a un oscilador será considerado un nodo porque su amplitud de vibración es mucho más pequeña que la del antinodo.

La frecuencia más baja es la frecuencia fundamental $f_1$, que produce el modo fundamental (o primer armónico).

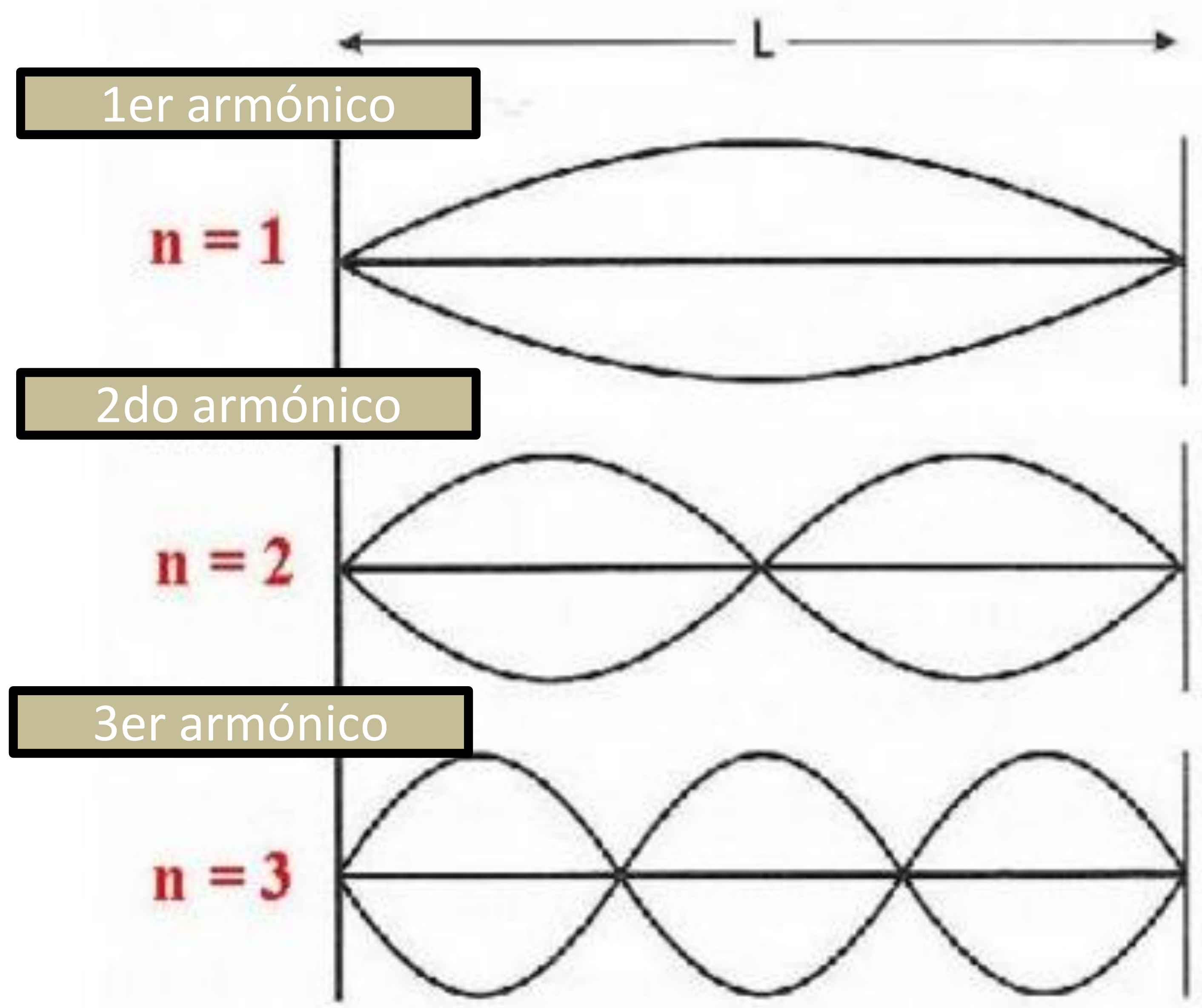
El segundo modo (segundo armónico) se produce al doble de frecuencia que el fundamental $f_2$ .

El tercer modo de vibración se produce al triple de frecuencia de la fundamental $f_3$ .

El conjunto de todas las frecuencias resonantes se llama **espectro de frecuencias de resonancia de la cuerda.**

$\lambda_n = \frac{2}{n}L$ $\qquad$ $f_n = \frac{v}{\lambda_n}$

v es la misma velocidad para todo n




½ onda

$\lambda_1 = \frac{2}{1}L \qquad f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2L}$

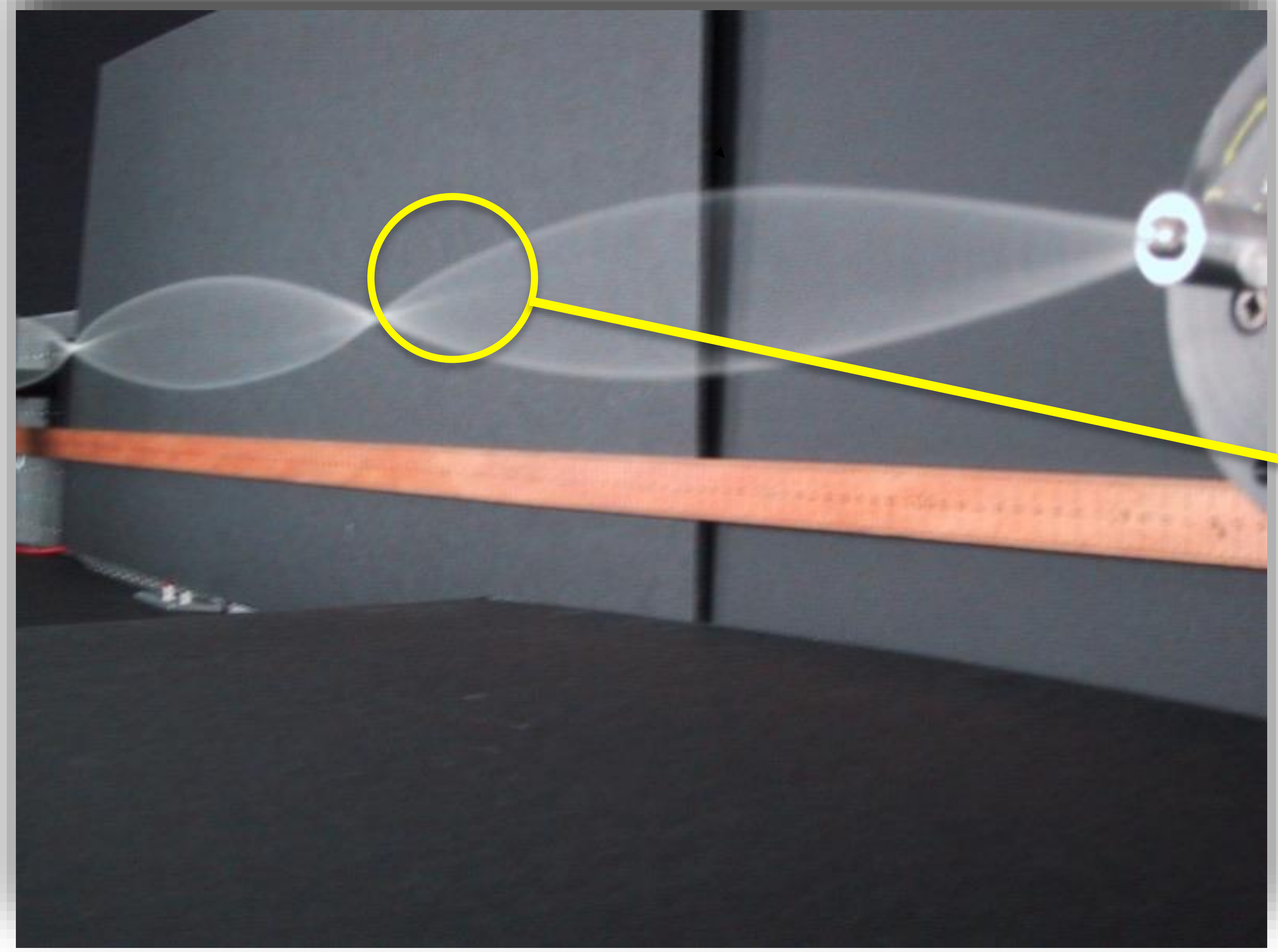
Dos ½ ondas

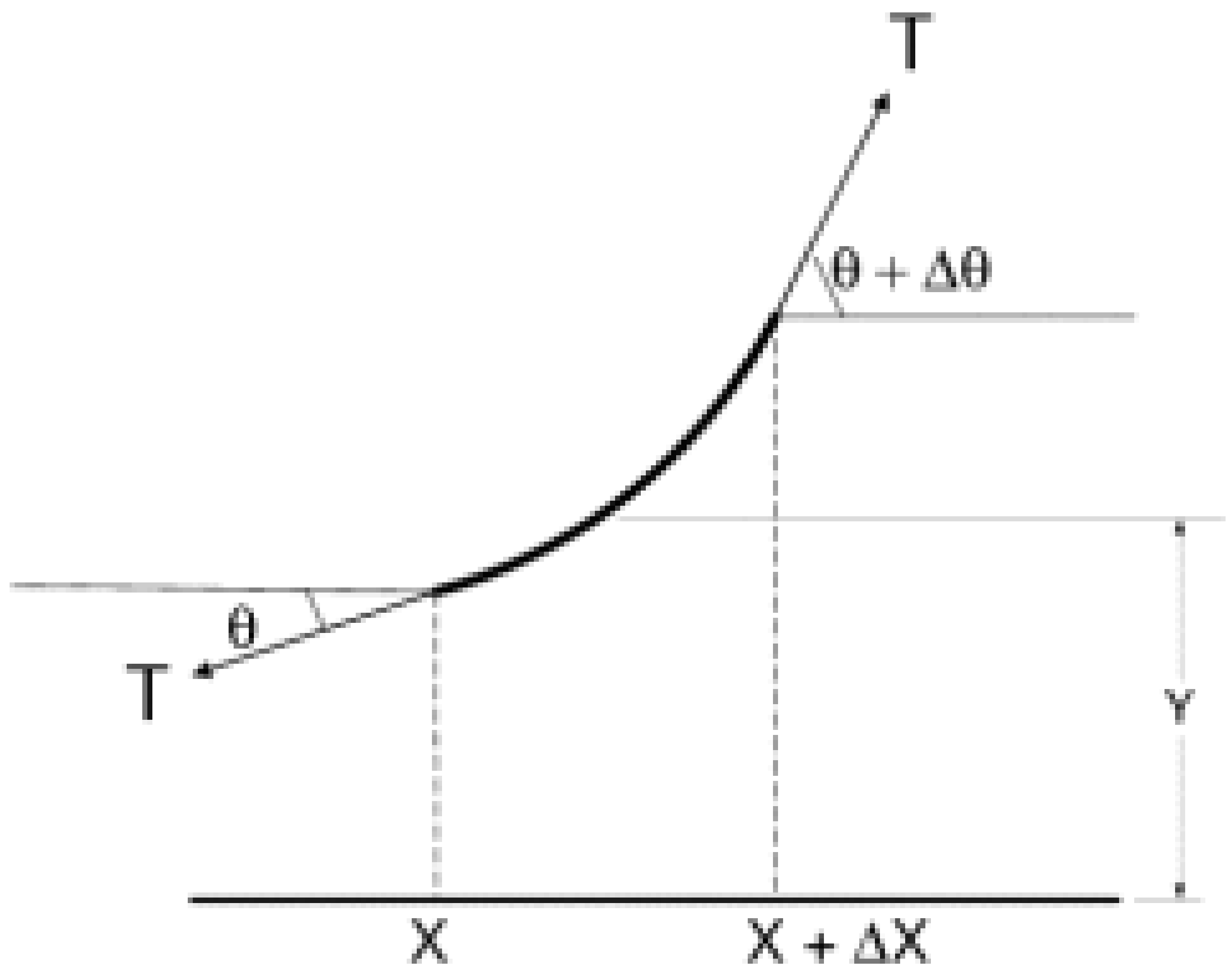
$\lambda_2 = \frac{2}{2}L \qquad f_2 = \frac{v}{\lambda_2} = \frac{v}{L} = 2f_1$

Tres ½ ondas

$\lambda_3 = \frac{2}{3}L \qquad f_3 = \frac{v}{\lambda_3} = \frac{v}{2/3L} = 3f_1$

## Ondas transversales en una cuerda tensa






$$F_y = T\ sen(\theta+\Delta\theta) - T\ sen\ \theta$$

$$F_x = T\ \cos(\theta+\Delta\theta) - T\ \cos\ \theta$$

Admitiendo *y* pequeño y ángulos pequeños

$$F_y = T(\theta+\Delta\theta) - T\theta$$

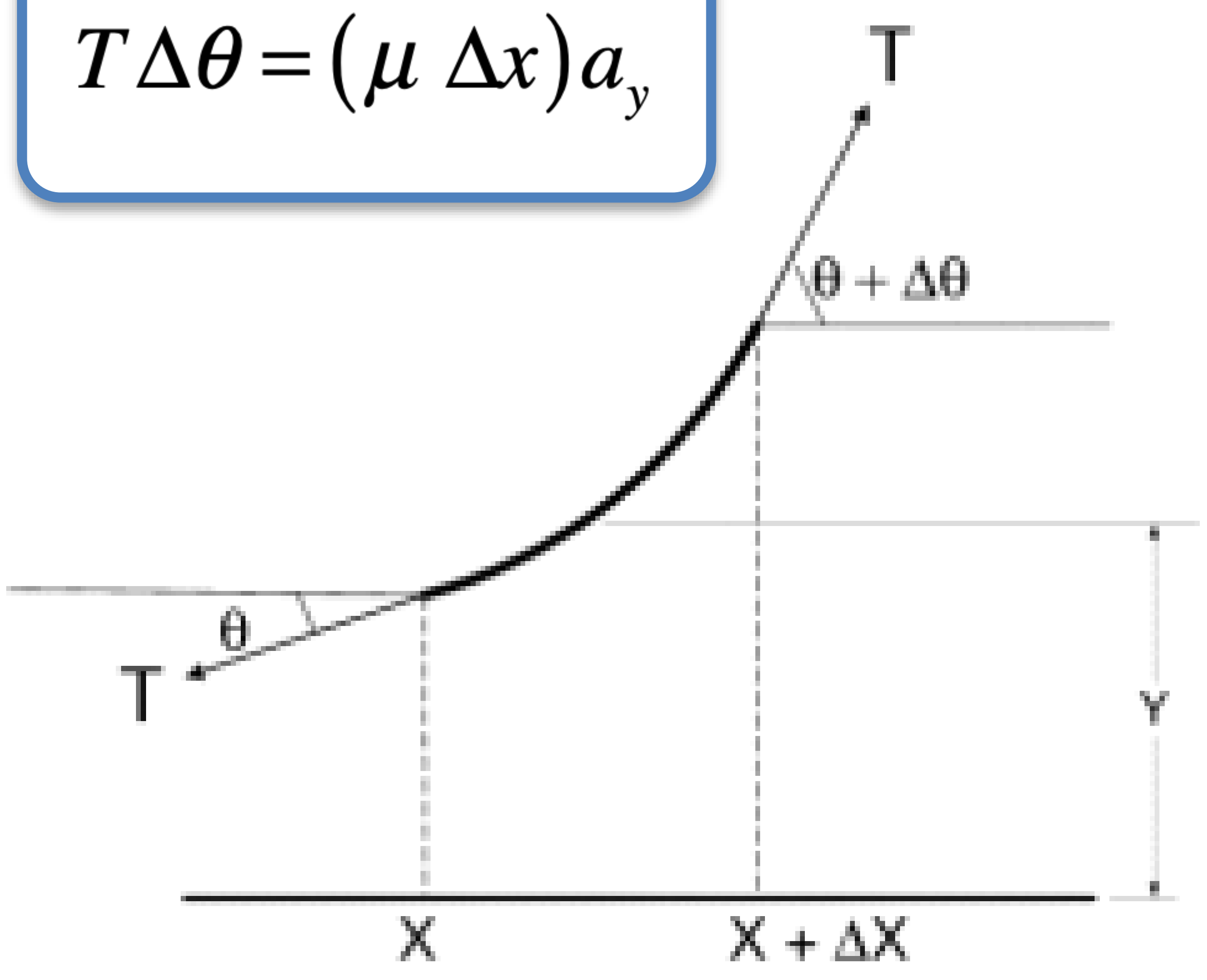
$$F_x = 0$$

$$F_y = T\Delta\theta \quad \begin{cases} T\Delta\theta = ma_y \\ T\Delta\theta = (\mu\ \Delta x)a_y \end{cases}$$

$$m = \mu\ \Delta x$$

Densidad lineal

$$\boxed{T\Delta\theta = (\mu\ \Delta x)a_y}$$




$$\frac{\partial y}{\partial x} = \tan\theta \qquad \frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x} \approx \left(\frac{\Delta\theta}{\Delta x}\right)\frac{\partial}{\partial\theta}$$

*derivando de nuevo*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \left(\frac{\Delta\theta}{\Delta x}\right)\frac{\partial}{\partial\theta}(\tan\theta) \longrightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x = \sec^2\theta\ \Delta\theta \xrightarrow{(\theta\text{ pequeño})} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x \approx \boxed{\Delta\theta}$$

$$T\ \boxed{\Delta\theta} = (\mu\ \Delta x)a_y$$

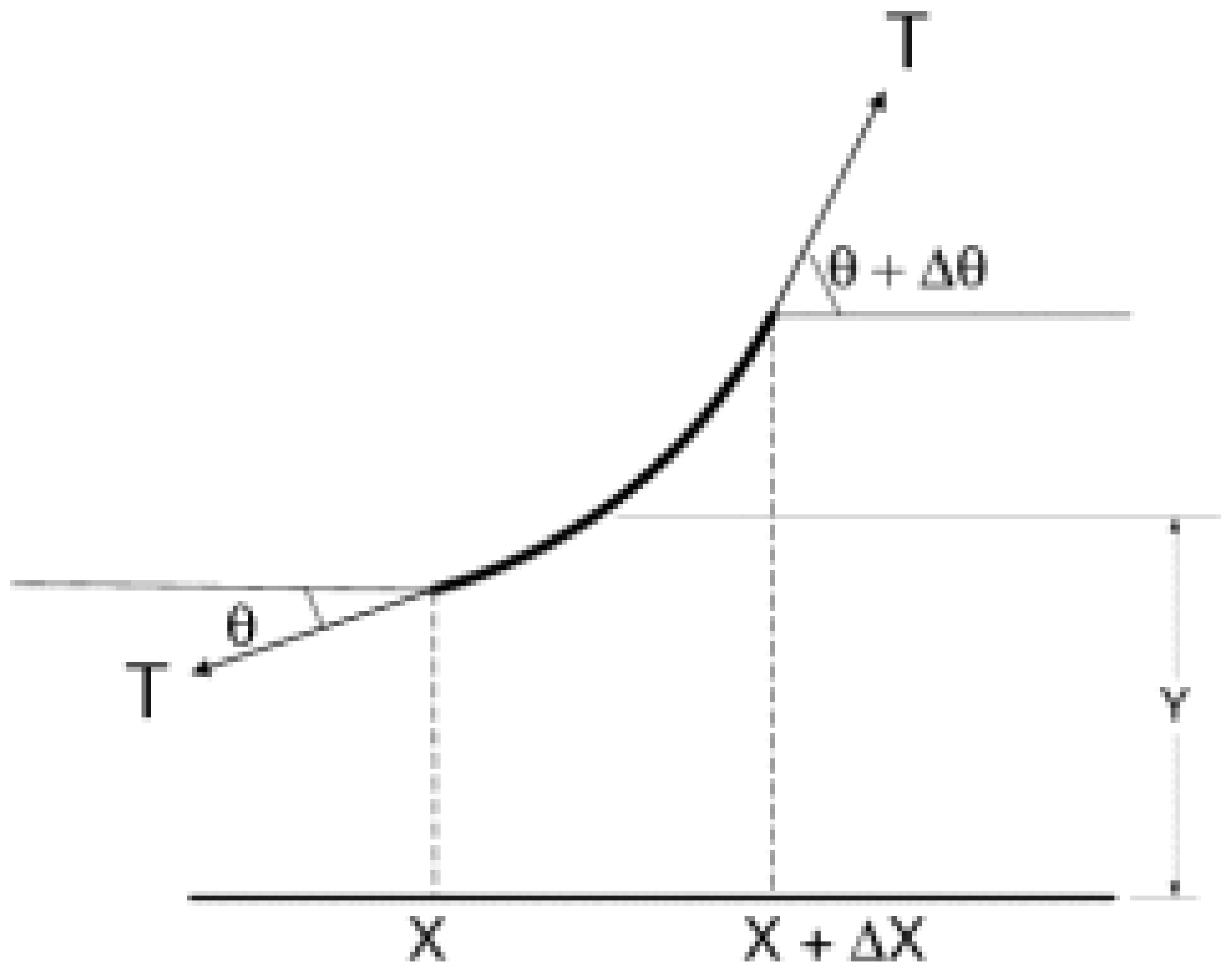
$$T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x = (\mu\ \Delta x)a_y \xrightarrow[a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}]{} T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x = (\mu\ \Delta x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \longrightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \boxed{\frac{\mu}{T}}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$v = \left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/2}$$

Velocidad con que las ondas progresivas recorren una cuerda de densidad lineal $\mu$ al aplicarle una tensión T

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Ec. de onda




$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad v = \left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/2}$$

Ec. diferencial de orden 2 en derivadas parciales

$$y(x,t) = g(x)\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\varphi = 0$$

$$\underbrace{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 g(x)\cos(\omega t) \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d^2 g(x)}{dx^2}\cos(\omega t)}$$

$$\frac{d^2 g(x)}{dx^2}\cancel{\cos(\omega t)} = -\frac{\omega^2}{v^2} g(x)\cancel{\cos(\omega t)} \qquad (*)$$

$$\frac{d^2 g(x)}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} g(x)$$

Ec.diferencial de un oscilador armónico (la variable es la posición y no el tiempo)

Se propone una solución armónica $g(x) = A \cdot sen(bx)$ ←

reemplazando en (*)

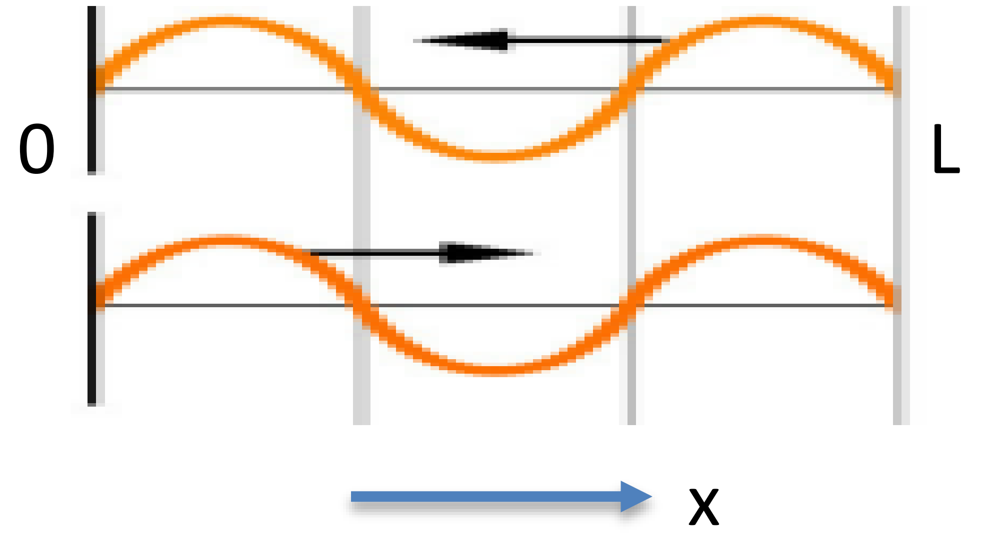
$$\frac{d^2 g(x)}{dx^2} = -Ab^2 sen(bx) \longrightarrow -\cancel{A}b^2 \cancel{sen(bx)} = -\cancel{A}\frac{\omega^2}{v^2}\cancel{sen(bx)} \longrightarrow b = \frac{\omega}{v}$$

**Condiciones de contorrno**

deplazamiento nulo en los extremos de la cuerda (en x = 0 y x=L)

$$g(x) = A\ sen(\frac{\omega}{v}x) \longrightarrow 0 = A\ sen(\frac{\omega}{v}L) \qquad \frac{\omega}{v}L = n\pi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega = 2\pi \cdot f \\ f_n = \dfrac{nv}{2L} \end{array} \right.$$




$$\xrightarrow{v = \left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/2}} \quad \boxed{f_n = \frac{n}{2L}\left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/2}}$$

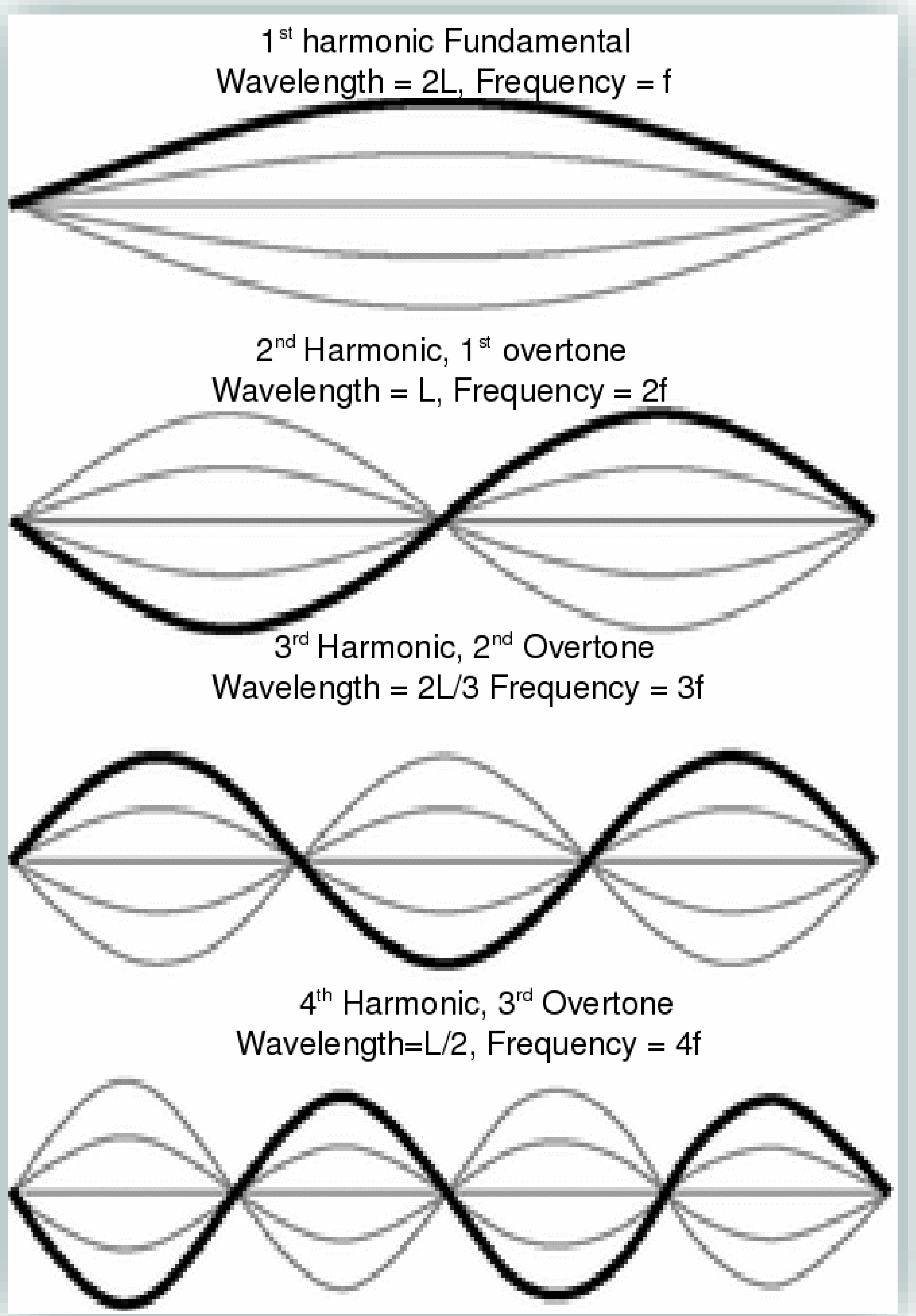
$$f_n = \frac{nv}{2L}$$

Relación de dispersión $\quad f_n = \frac{v}{\lambda_n}$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

La descripción completa del movimiento de la cuerda :

$$y(x,t) = A_n sen\left(2\pi \frac{x}{\lambda_n}\right)\cos(\omega t)$$




***Otra condición de contorno***

$x = L \qquad$ *cuerda fija*

$x = 0 \qquad$ *vibración transversal con frecuencia arbitraria y amplitud B*

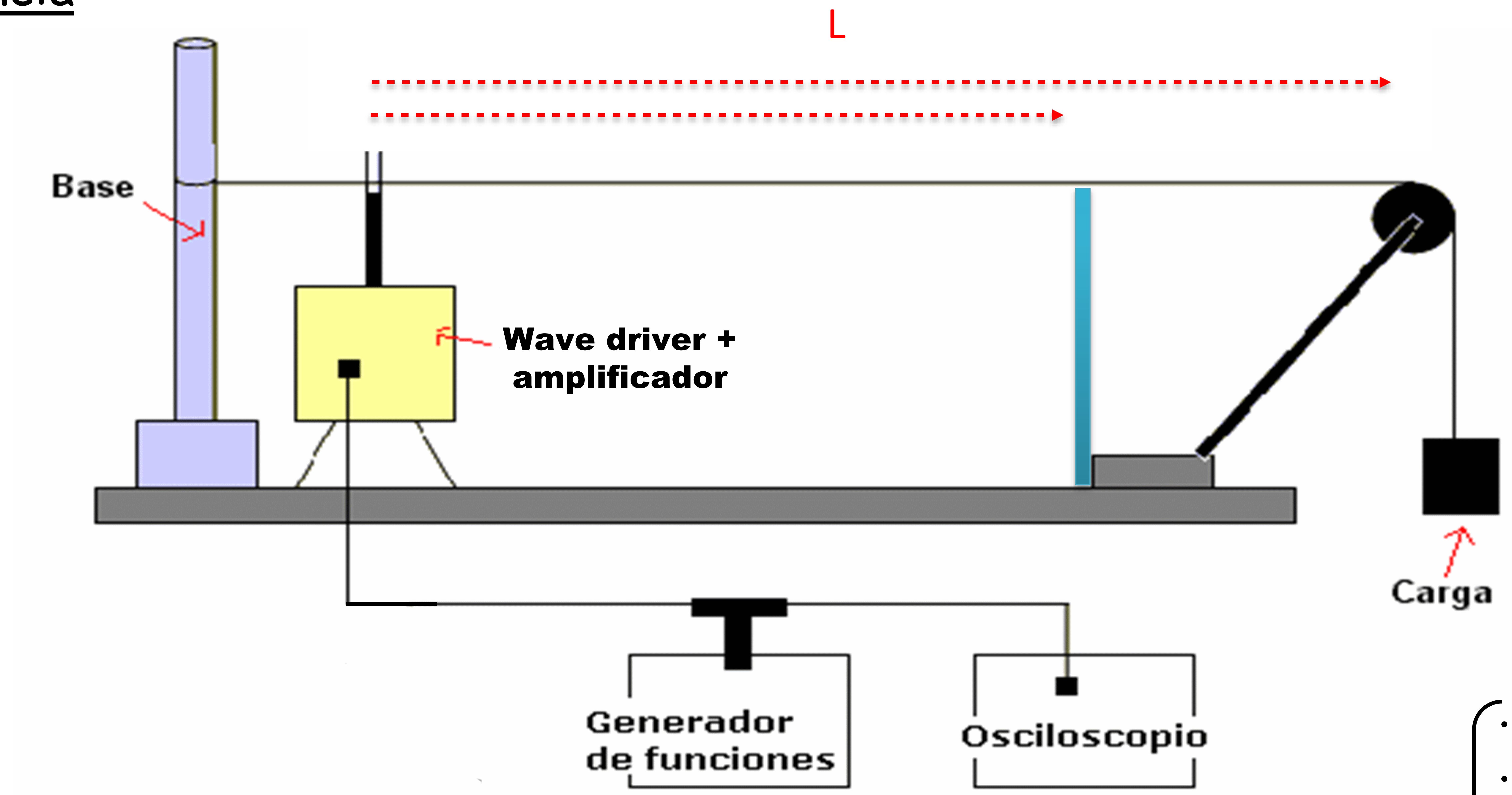
$$y(0,t) = B\cos(\omega t)$$
$$y(L,t) = 0$$

*Si se resuelve la ec. de onda con estas condicones se obtiene*

$$A = \frac{B}{sen\left(p\pi - \frac{\omega L}{v}\right)} \qquad p = entero$$

*lo que implica que la respuesta será máxima cerca de las frecuencias naturales del sistema*

# Experiencia




1. Estimar la densidad lineal de la cuerda.
   - Medir la longitud lo de una cuerda de nylon.
   - Medir el diámetro de la cuerda con micrómetro.
   - Pesar la cuerda con una precisión de 0,1 mg.
   - Calcular la densidad lineal
   - Calcular la densidad
2. Para una dada carga, obtener la frecuencia de 5 modos normales de la cuerda.
3. Calcular la velocidad de propagación usando la relación de dispersión. $v = \lambda_n f_n$
4. Comparar con la velocidad de propagación del modelo. $v = \left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/2}$
5. Repetir para 5 cargas diferentes.
6. Repetir para otra cuerda con distinta densidad lineal.

# ¿ PREGUNTAS ?