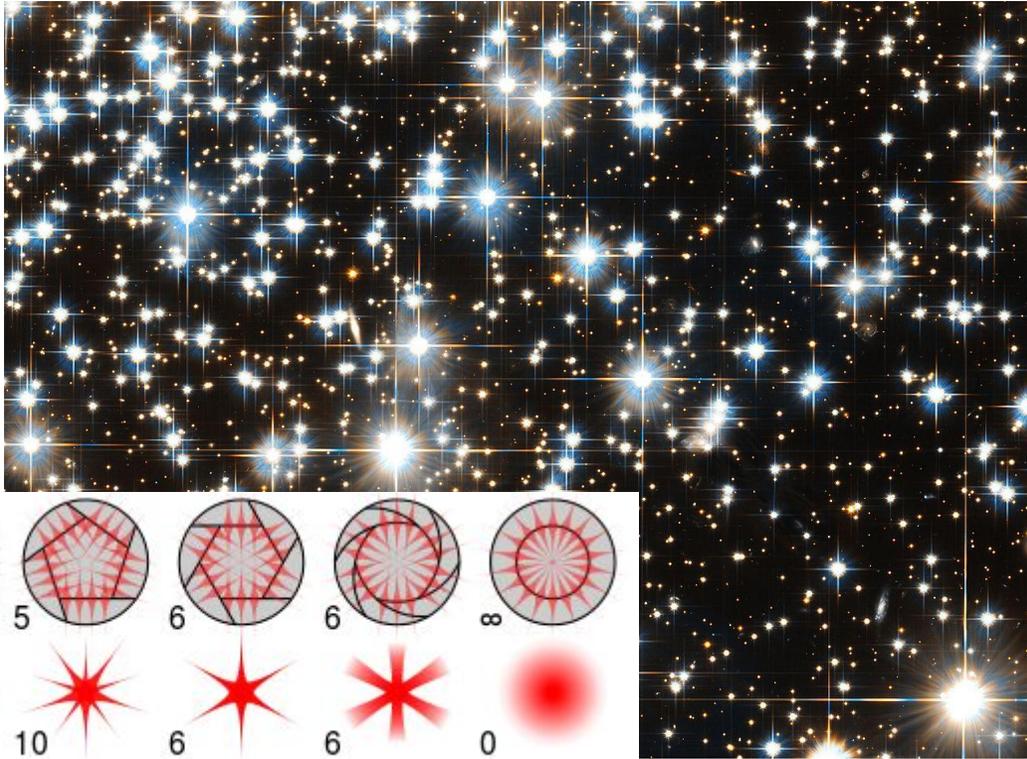


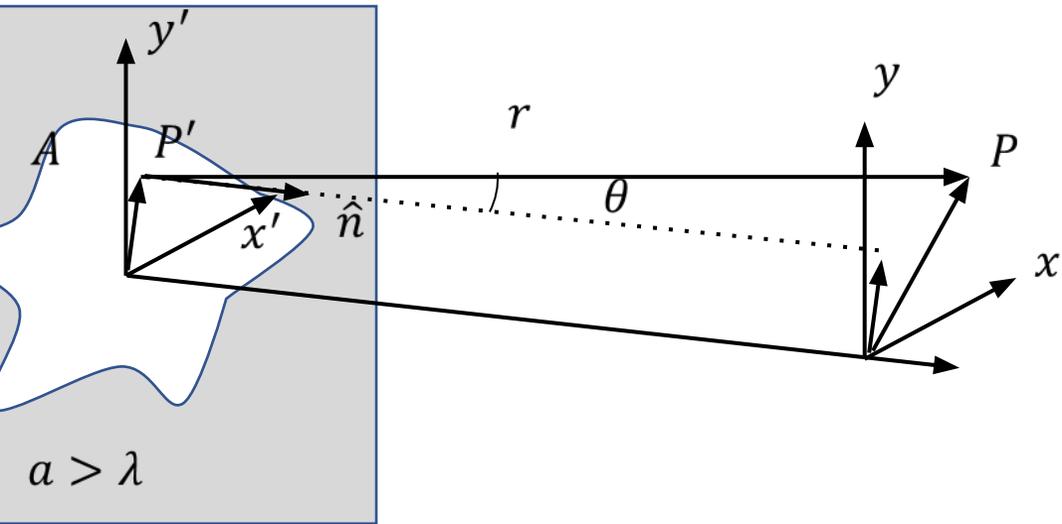
Difracción

Difracción: la luz cambia de dirección (sin reflejarse o refractarse)





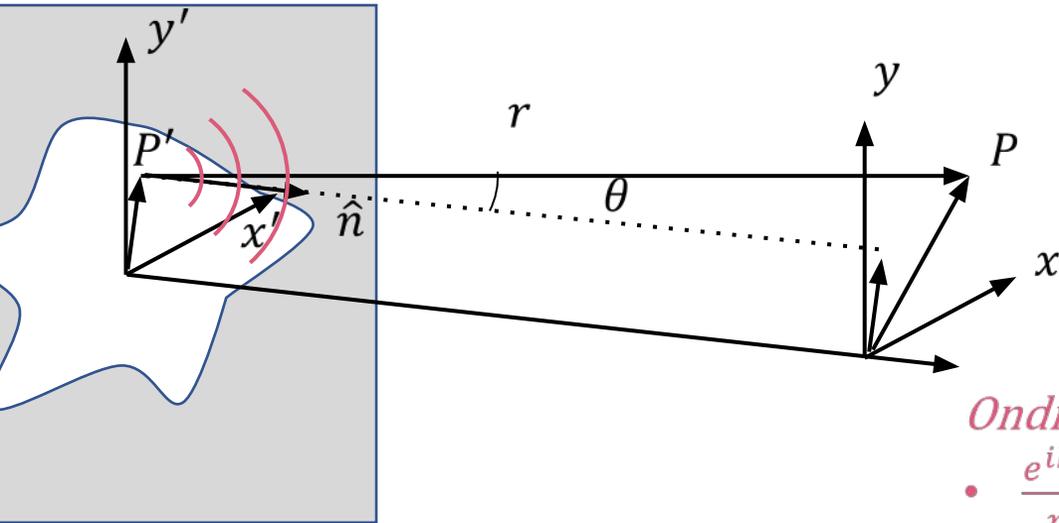
Integral de Kirchhoff (1882) : solución de la ecuación de Maxwell



$$E(\vec{r}, t) = U(\vec{r})e^{i\omega t}$$

$$U(P) = -\frac{i}{\lambda} \iint_A U(P') \frac{e^{ikr}}{r} \frac{1}{2} [\cos(\hat{n}, \hat{r}) + 1] dS'$$

Integral de Kirchhoff (1882): solución de la ecuación de Maxwell



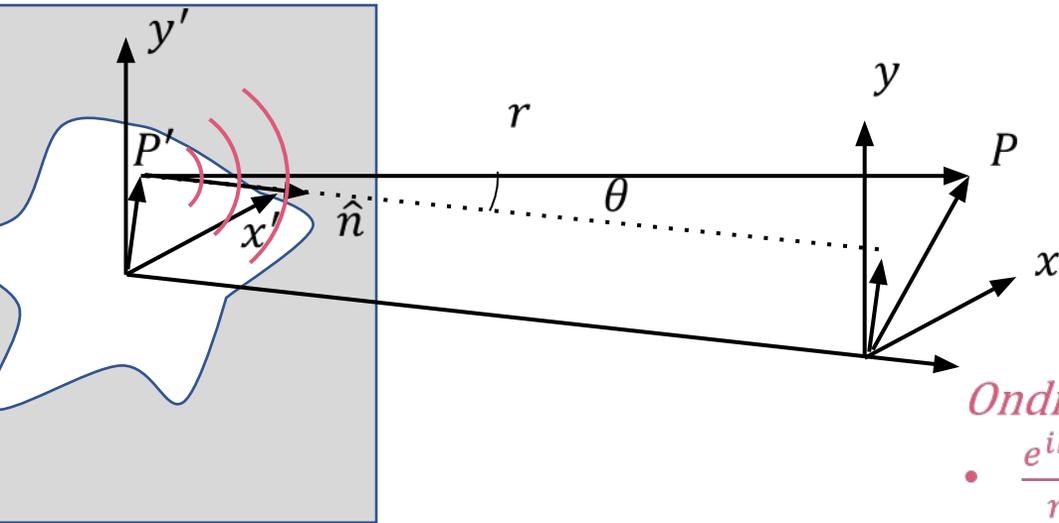
$$E(\vec{r}, t) = U(\vec{r})e^{i\omega t}$$

$$U(P) = \iint_A \left(-\frac{i}{\lambda}\right) U(P') \frac{e^{ikr}}{r} \frac{1}{2} [\cos(\hat{n}, \hat{r}) + 1] dS'$$

Onditas esféricas secundarias

- $\frac{e^{ikr}}{r}$ Onda esférica
- $U(P')$ Amplitud del campo sobre la apertura
- $1/\lambda$ la amplitud se reduce en λ
- $-i$ la onda se desfasa en -90°

Integral de Kirchhoff (1882): solución de la ecuación de Maxwell



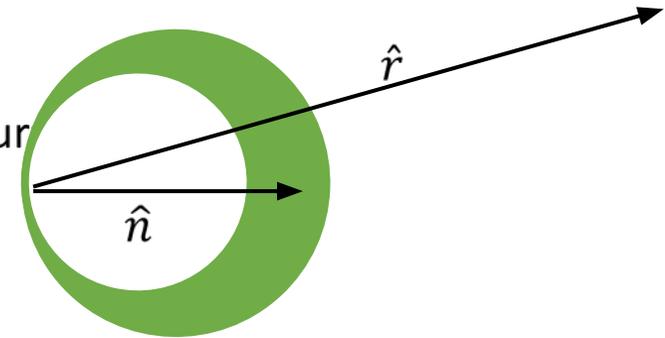
$$E(\vec{r}, t) = U(\vec{r})e^{i\omega t}$$

$$U(P) = \iint_A \left(-\frac{i}{\lambda}\right) U(P') \frac{e^{ikr}}{r} \frac{1}{2} [\cos(\hat{n}, \hat{r}) + 1] dS'$$

Onditas esféricas secundarias

- $\frac{e^{ikr}}{r}$ Onda esférica
- $U(P')$ Amplitud del campo sobre la apertura
- $1/\lambda$ la amplitud se reduce en λ
- $-i$ la onda se desfasa en -90°

Factor de oblicuidad

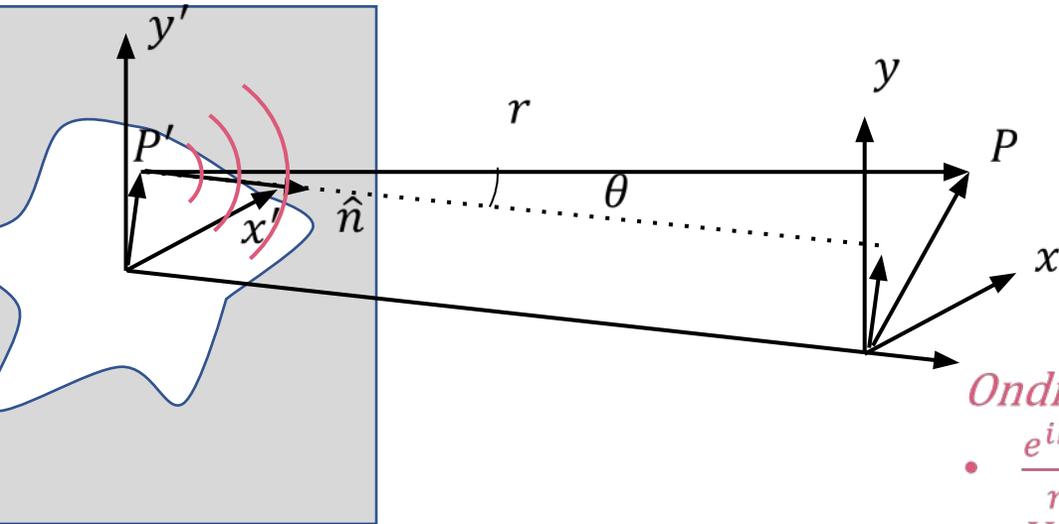


Integral de Kirchhoff (1882): solución de la ecuación de Maxwell



$$E(\vec{r}, t) = U(\vec{r})e^{i\omega t}$$

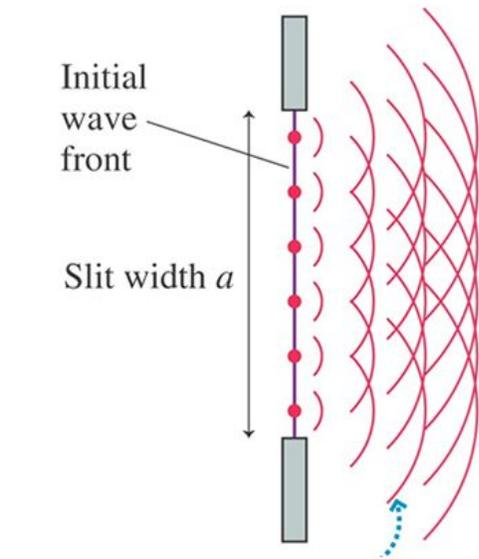
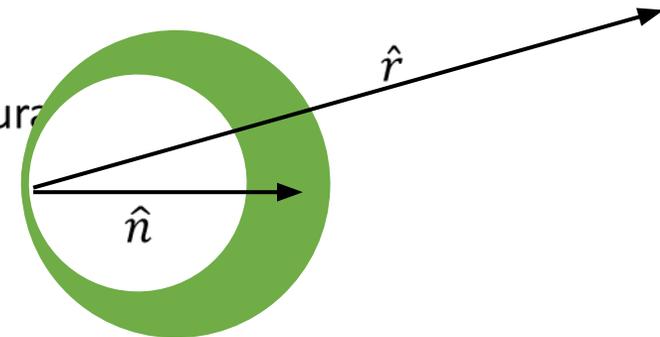
$$U(P) = \iint_A \left(-\frac{i}{\lambda}\right) U(P') \frac{e^{ikr}}{r} \frac{1}{2} [\cos(\hat{n}, \hat{r}) + 1] dS'$$



Onditas esféricas secundarias

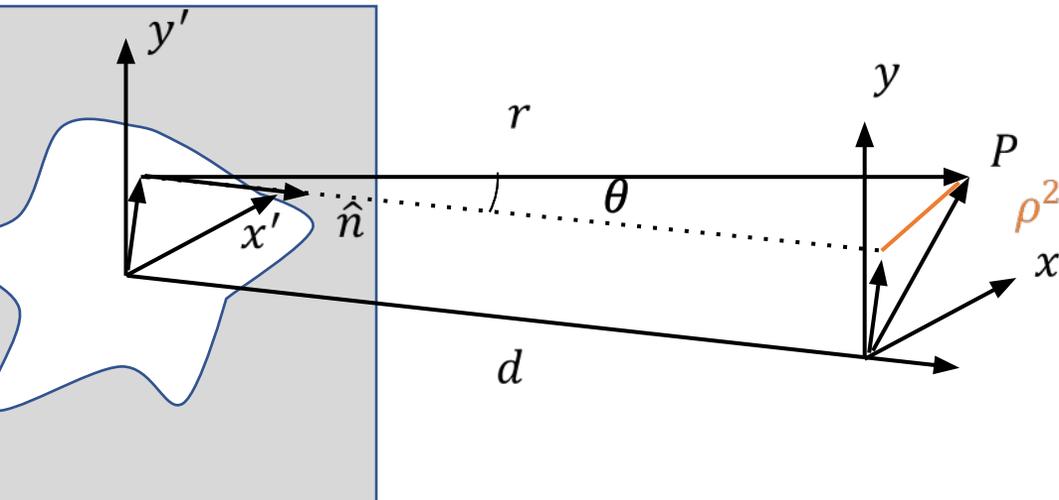
- $\frac{e^{ikr}}{r}$ Onda esférica
- $U(P')$ Amplitud del campo sobre la apertura
- $1/\lambda$ la amplitud se reduce en λ
- $-i$ la onda se desfasa en -90°

Factor de oblicuidad



Principio Huygens-Fresnel (1818): El campo en cualquier punto del espacio se obtiene como la **superposición (es decir, interferencia)** de las “onditas esféricas secundarias” generadas en cada punto de la apertura

Aproximación de Fresnel



$$U(P) = -\frac{i}{\lambda} \iint_A U(P') \frac{e^{ikr}}{r} \frac{1}{2} \left[\frac{d}{r} + 1 \right] dS'$$

$$\rho^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2$$

$$\cos(\hat{n}, \hat{r}) = \frac{d}{r}$$

Difracción de Fresnel $\rho^2 \ll d^2$ (aproximación paraxial)

- $1/r$ varía lento comparado con la fase: en denominador $r \sim d$
- En la exponencial compleja: la función varía muy rápido por $k = 2\pi/\lambda$ hacemos Taylor orden 2

$$r = (d^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2)^{\frac{1}{2}} \approx d \left(1 + \frac{(x - x')^2}{2d^2} + \frac{(y - y')^2}{2d^2} \right)$$

$$U(x, y) = -\frac{i}{\lambda d} e^{ikd} \iint_A U(x', y') e^{\frac{ik}{2d} ((x-x')^2 + (y-y')^2)} dx' dy'$$

Óptica de Fourier, Campo en el foco de una lente

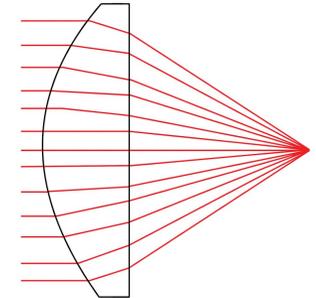


$$U(x, y) = -\frac{i}{\lambda d} e^{ikd} e^{\frac{ik}{2d}(x^2+y^2)} \iint_A U(x', y') e^{\frac{ik}{2d}(x'^2+y'^2)} e^{-\frac{ik}{d}(xx'+yy')} dx' dy'$$

Observaciones importantes

1) El campo en el punto P

$$U(x, y) \sim \mathcal{F}_{\lambda d} \left\{ U(x', y') e^{\frac{ik}{2d}(x'^2+y'^2)} \right\} = G \left\{ \frac{x}{\lambda d}, \frac{y}{\lambda d} \right\}$$



2) La función de transmisión para una lente esférica convergente es $T_f = e^{-\frac{ik}{2f}(x'^2+y'^2)}$. Si introduzco una lente en el Sistema

$$U(x', y') \rightarrow U(x', y') T_f$$

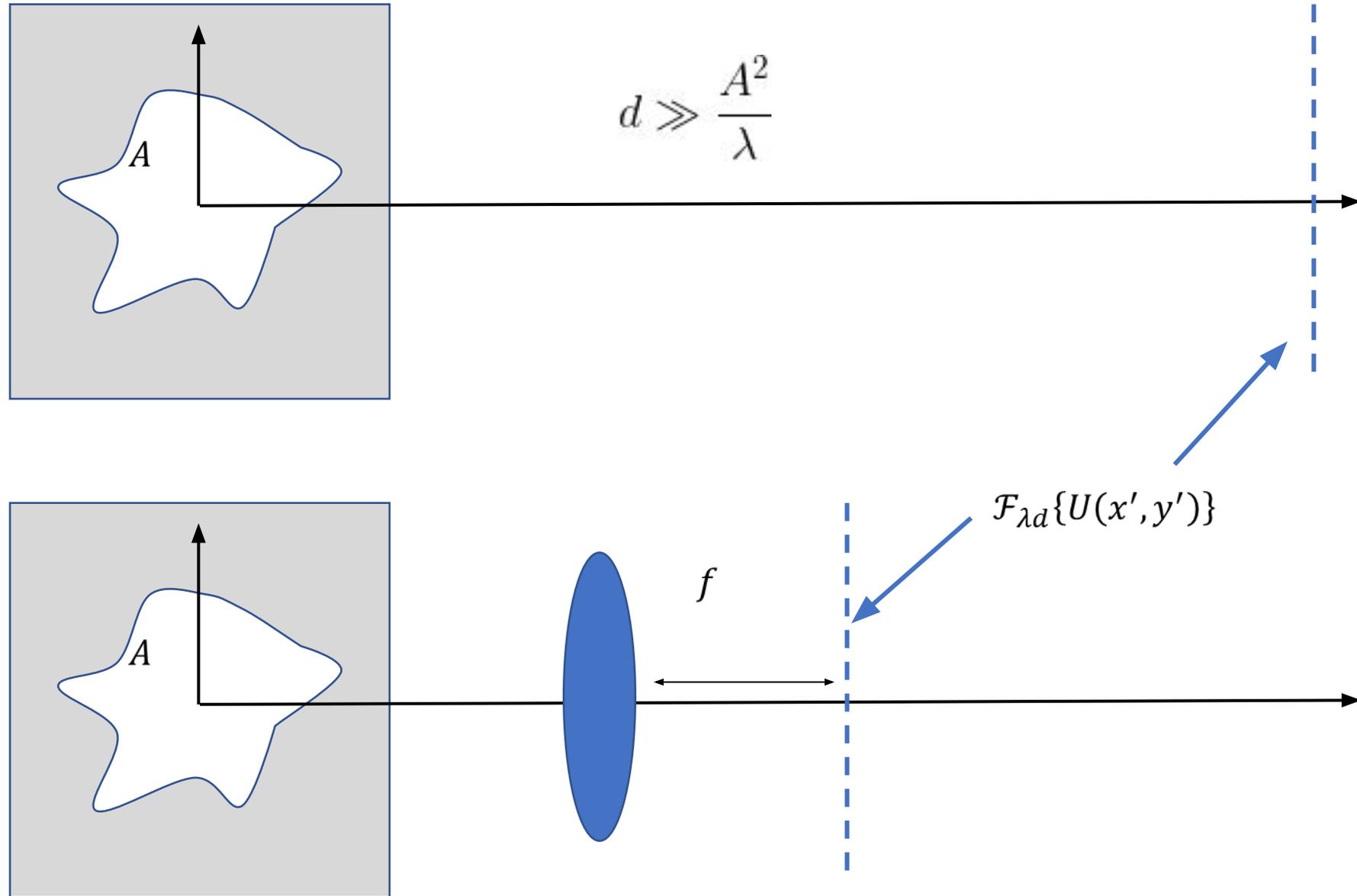
$$U(x, y) \sim \mathcal{F}_{\lambda d} \left\{ U(x', y') e^{\frac{ik}{2d}(x'^2+y'^2)} e^{-\frac{ik}{2f}(x'^2+y'^2)} \right\} \Big|_{d=f} = \mathcal{F}_{\lambda d} \{ U(x', y') \}$$

3) Aproximación de Fraunhofer $e^{\frac{ik}{2d}(x'^2+y'^2)} \rightarrow 1$, $d \gg \frac{k}{2}(x'^2+y'^2) \sim \frac{A^2 k}{2}$

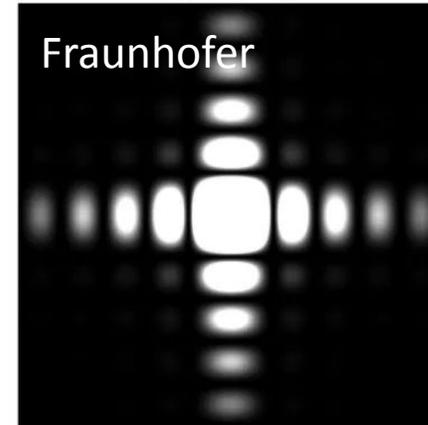
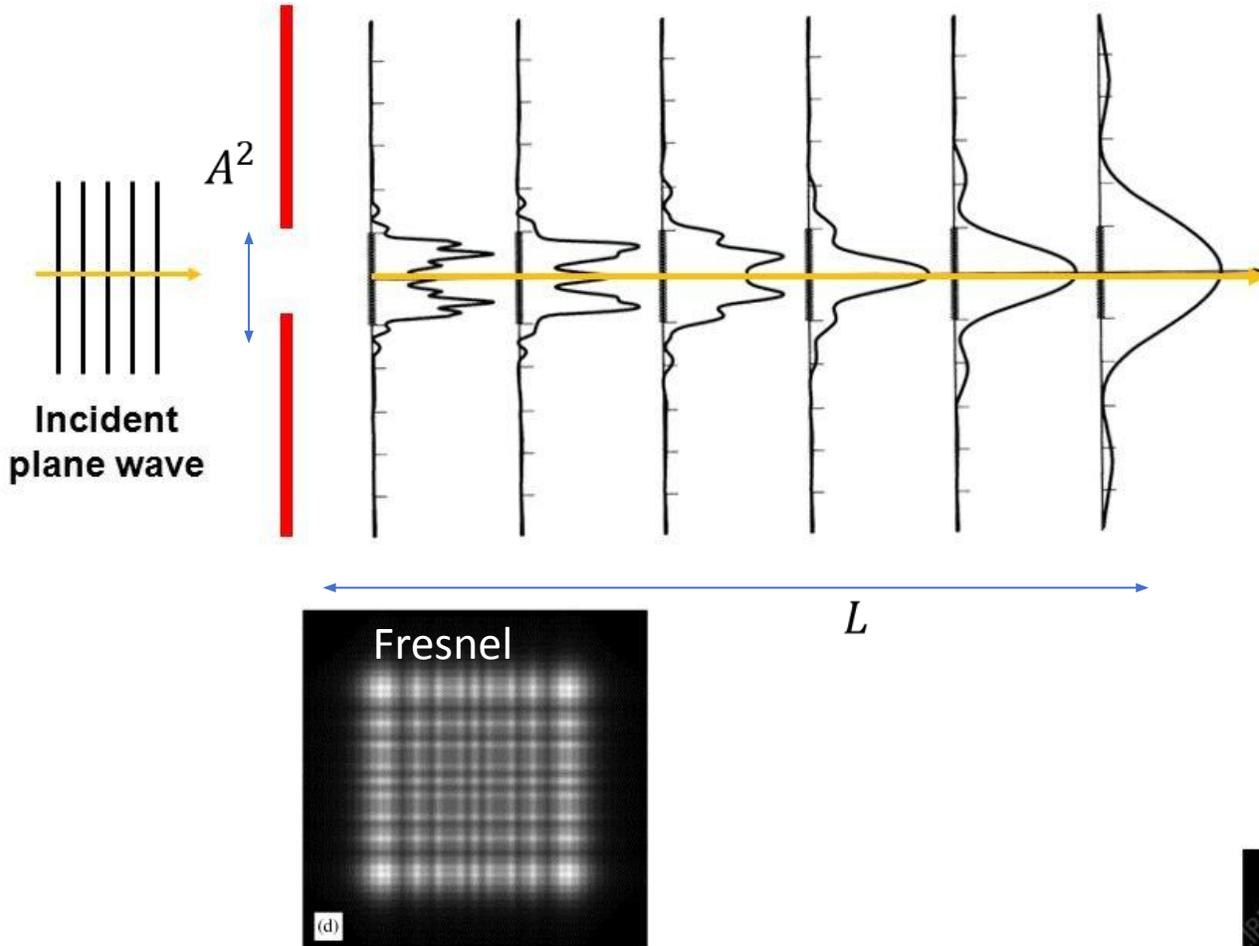
$$d \gg \frac{A^2}{\lambda}$$

$$U(x, y) \sim \mathcal{F}_{\lambda d} \{ U(x', y') \}$$

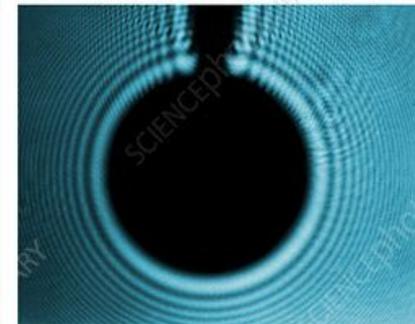
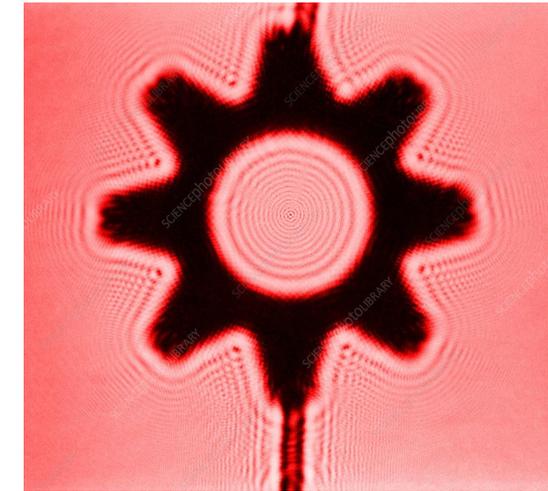
Difracción de Fraunhofer y transformada de Fourier



Aproximaciones de Fresnel y Fraunhofer

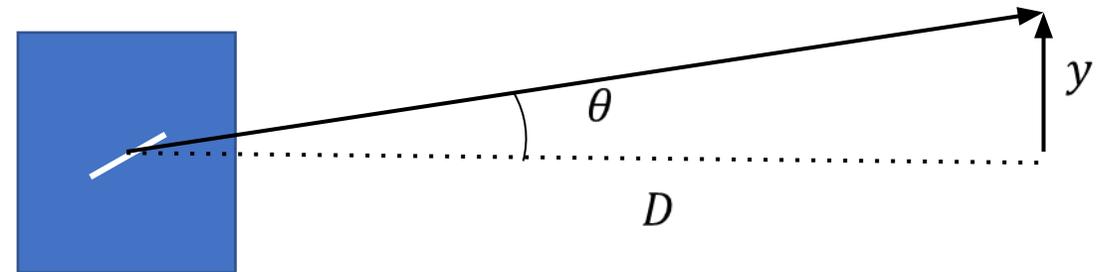


$$\frac{A^2}{\lambda} \ll L$$





Difracción por una rendija



$$I(y) = I_0 \frac{\sin^2(\delta)}{\delta^2}$$

$$\delta = \pi a \frac{\sin(\theta)}{\lambda} = \frac{\pi a y}{\lambda D}$$

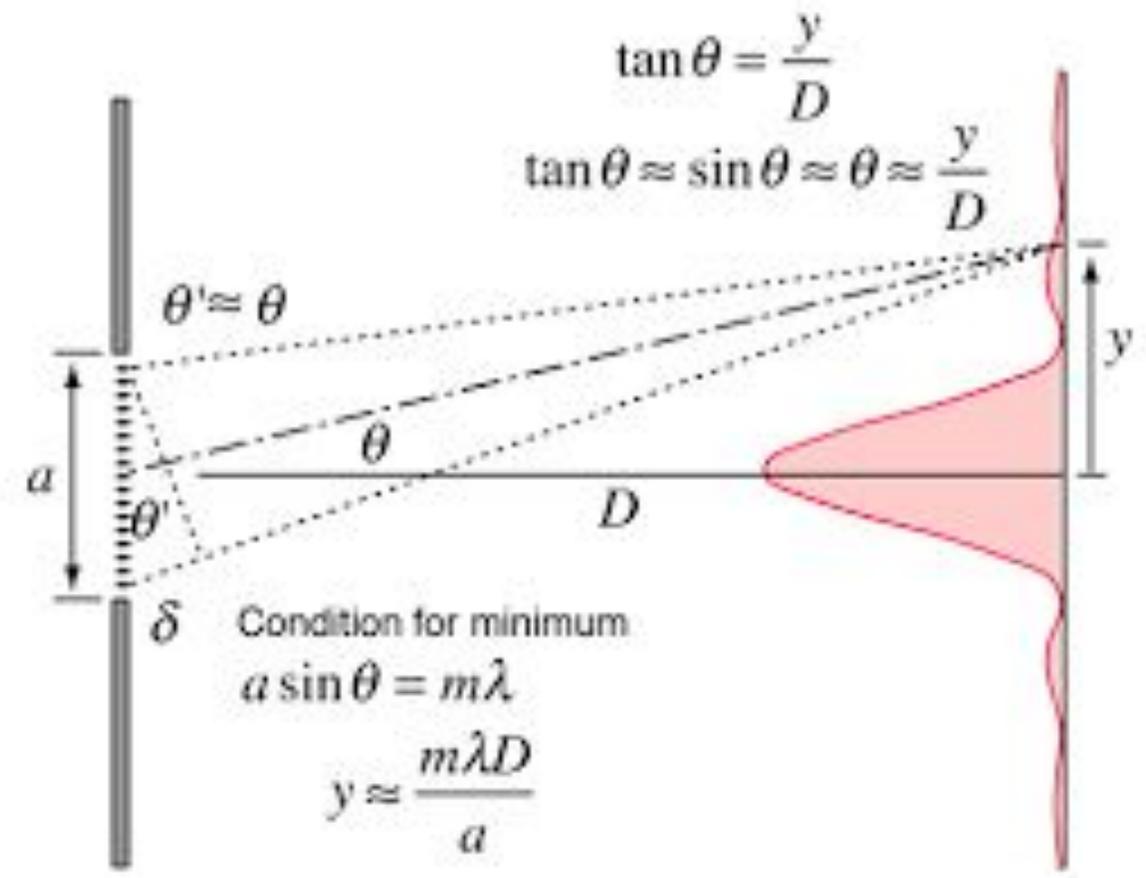
Mínimos

$$\delta = n\pi$$

$$\sin(\theta) = \frac{n \lambda}{a}$$

Ancho del máximo central

$$\frac{2D\lambda}{a}$$

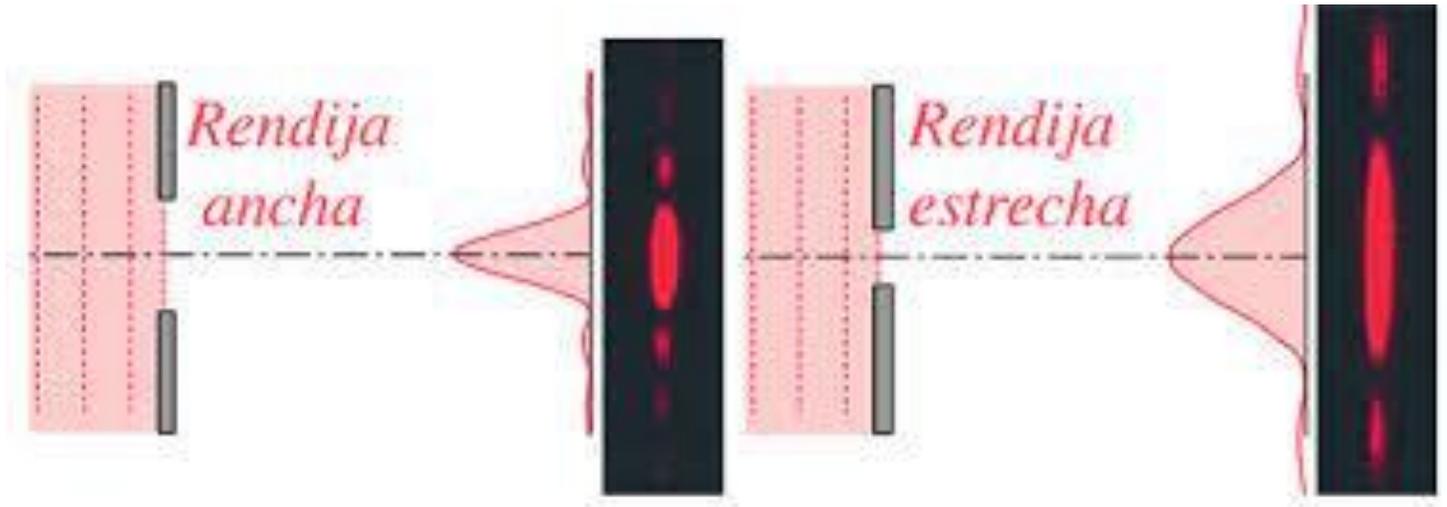


Propiedades Generales 1: cuanto más chico el objeto, más extendida la figura de difracción



Ancho del máximo central

$$\frac{2D\lambda}{a}$$



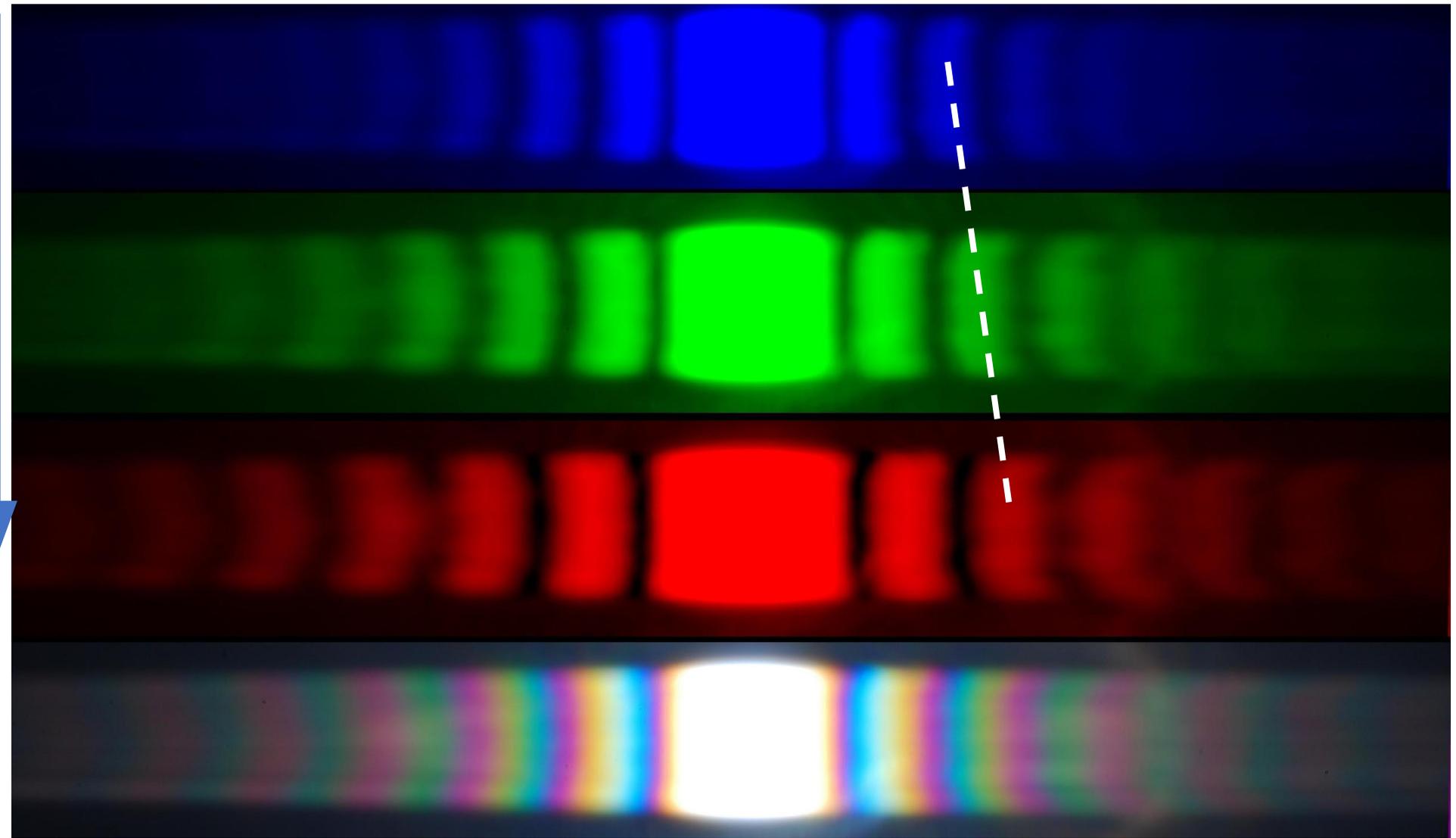
1. Propiedades Generales 2: cuanto más grande λ , más extendida la figura de difracción



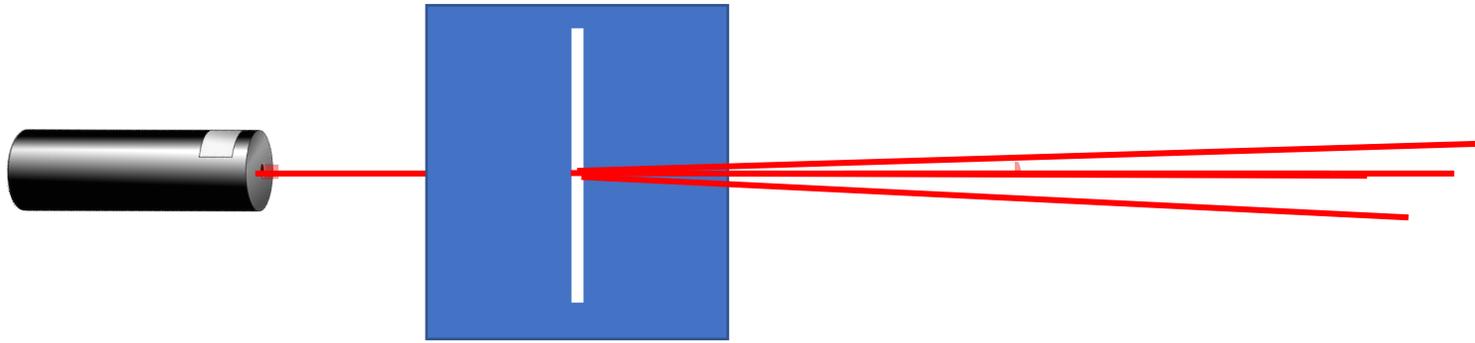
λ aumenta

Ancho del máximo central

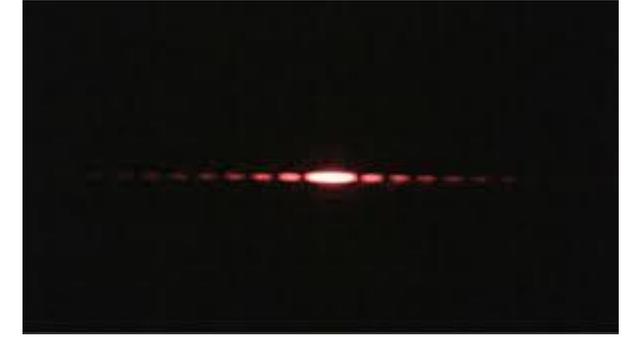
$$\frac{2D\lambda}{a}$$



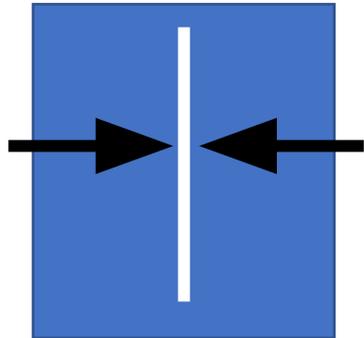
Experimento: Difracción en campo lejano



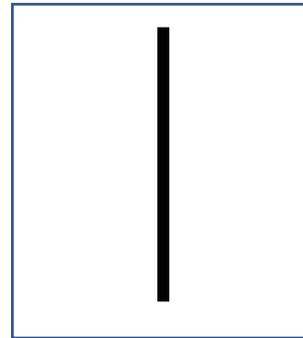
Pantalla



Rendija ancho variable



Alambre ancho incógnita



Fotodiodo



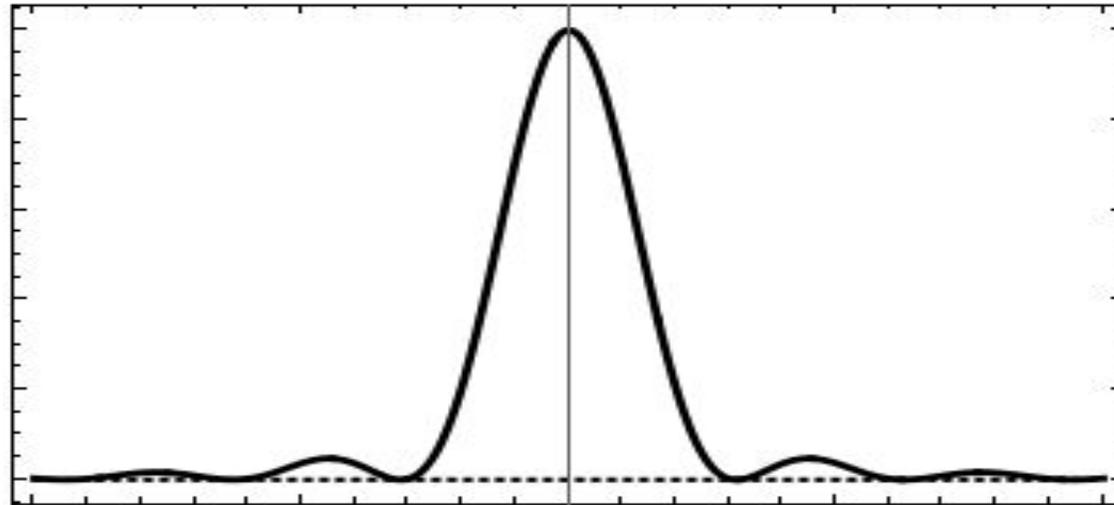
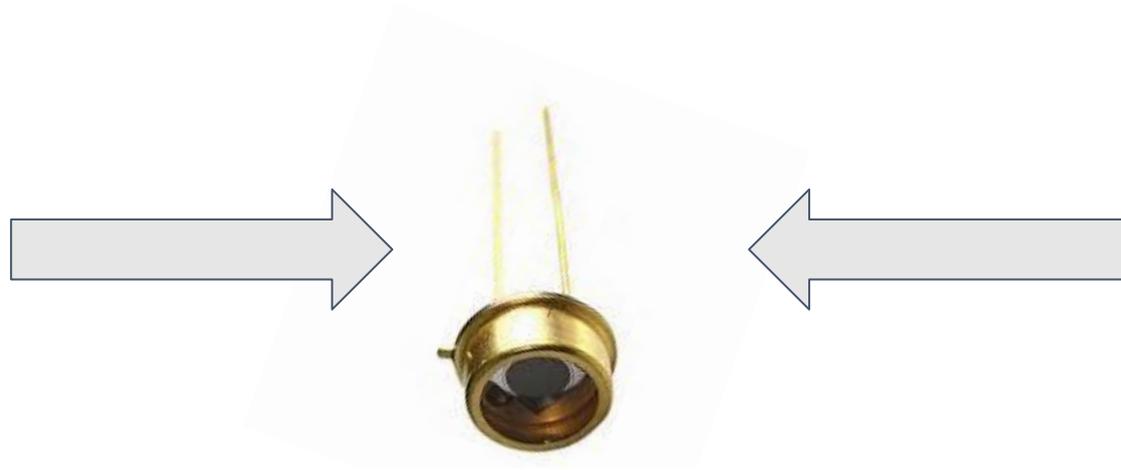
Espectrómetro



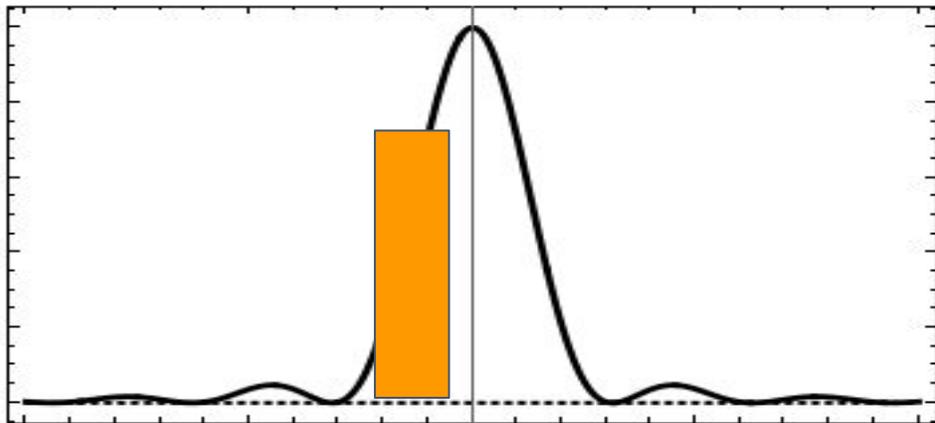
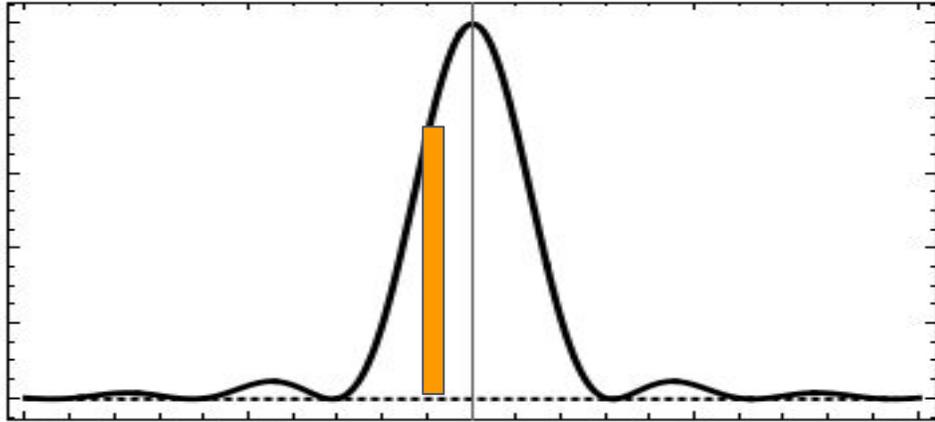
Que quisiéramos responder con estos experimentos:

- ¿Cómo uso la difracción para medir tamaños de objetos muy pequeños?
- ¿Cuáles son las ventajas de usar difracción y de donde surgen dichas ventajas?
- ¿Cómo se relacionan las figuras de difracción en máscaras complementarias?

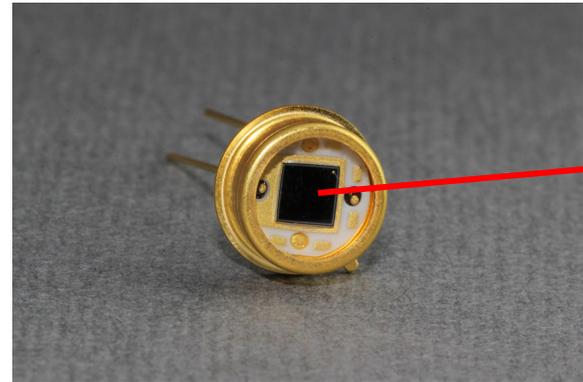
Experimento 1: caracterizar la figura de difracción (rendija)



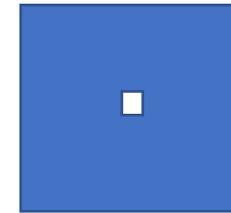
Medición de intensidad con resolución espacial



Idealmente buscaríamos medir la intensidad en y_0
Con un detector cuya respuesta sea una delta de Dirac



Área sensible



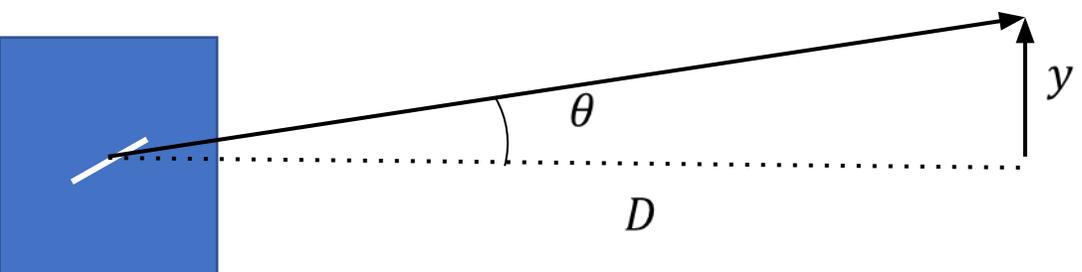
$$V \propto \int_A I(x, y) dx dy$$

Conviene achicar el área, pero...
cuanto más menor es la intensidad detectada

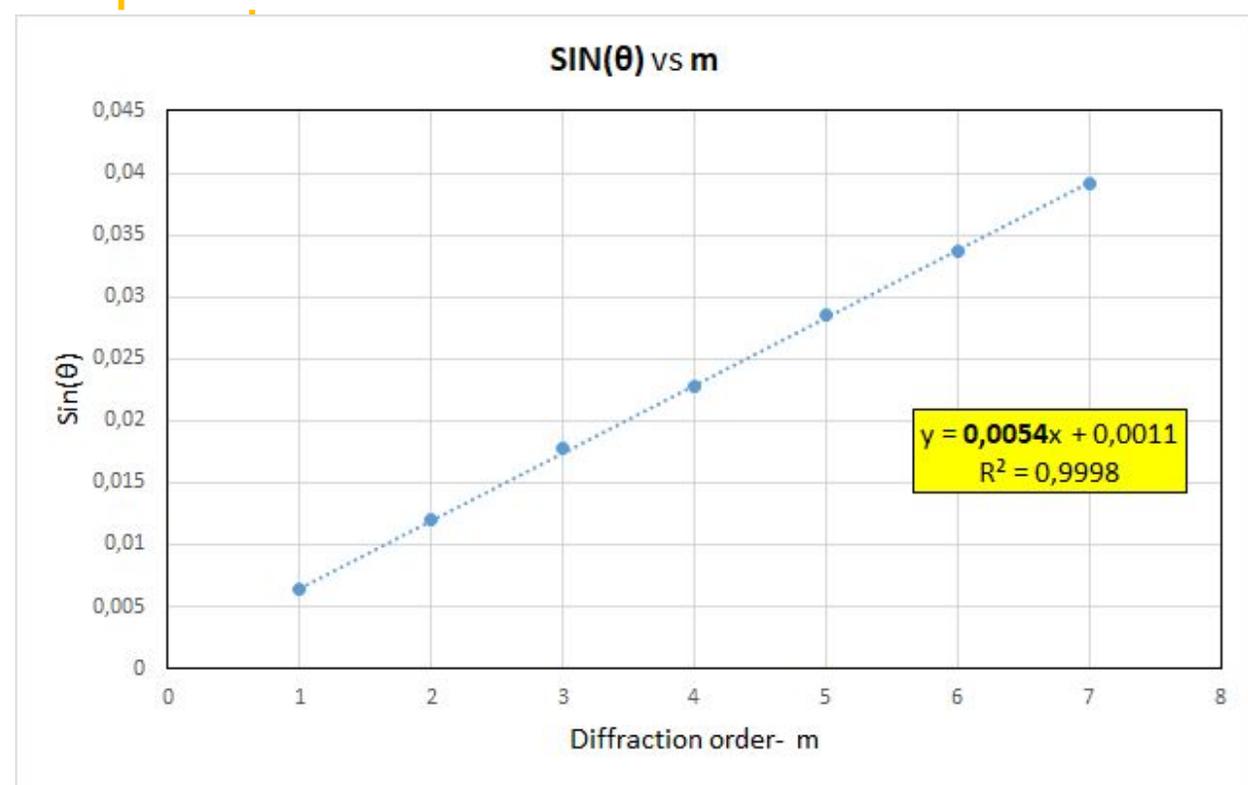


¿Como puedo hallar el tamaño de la rendija?

En una pantalla (papel) en la pared:



$$\sin(\theta) = \frac{y}{D} = \frac{n\lambda}{a}$$





Difracción de (otros) objetos simples

Fuente de luz?

Principio de Babinet

Difracción + interferencia? por qué no?

Aproximación de Fraunhofer? o lente?

Difracción de Fresnel?



Experiencia 2: máscaras complementarias

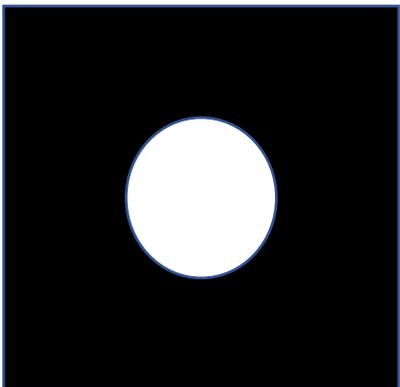


¿Como se comparan las figuras de difracción producida a partir de dos objetos complementarios? ¿Cuáles son sus similitudes y sus diferencias?



¿Que otras preguntas de la ciencia me permitía responder saberlo?

Ej: ¿si conozco la figura de difracción de un agujero circular, puedo conocer la de una célula? ¿Y medir su tamaño?



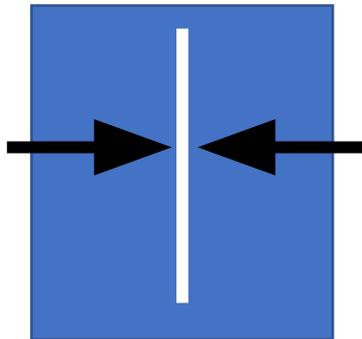
Experiencia 2: máscaras complementarias



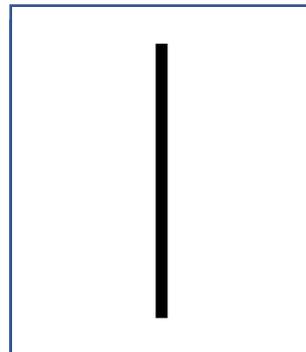
¿Como se comparan las figuras de difracción producida a partir de dos objetos complementarios? ¿Cuáles son sus similitudes y sus diferencias?



Rendija ancho variable

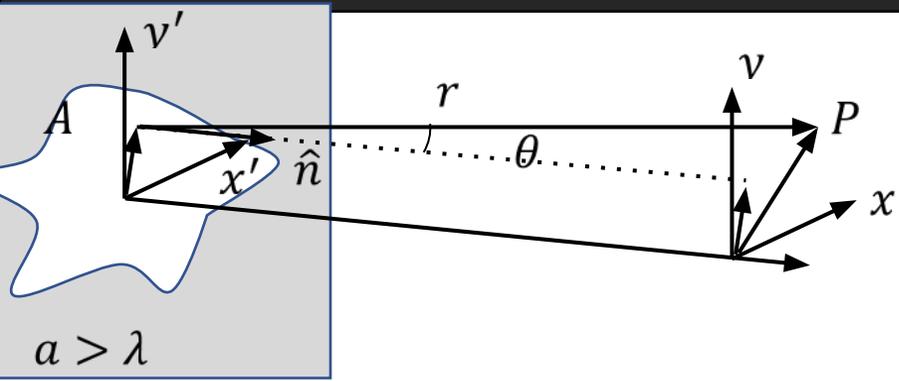


Alambre ancho incógnita



- Observando en una pantalla comparar cualitativamente las diferencias y similitudes de las figuras de interferencia
- Si son iguales, ¿para que ancho de ranura?
- Medir el diámetro del alambre con el microscopio y compararlo con el valor obtenido empleando difracción en la ranura.

Principio de Babinet



$$U(P) = -\frac{i}{\lambda} \iint_A U(P') \frac{e^{ikr}}{r} \frac{1}{2} [\cos(\hat{n}, \hat{r}) + 1] dS' = \iint_A U(P') f(r) dS'$$

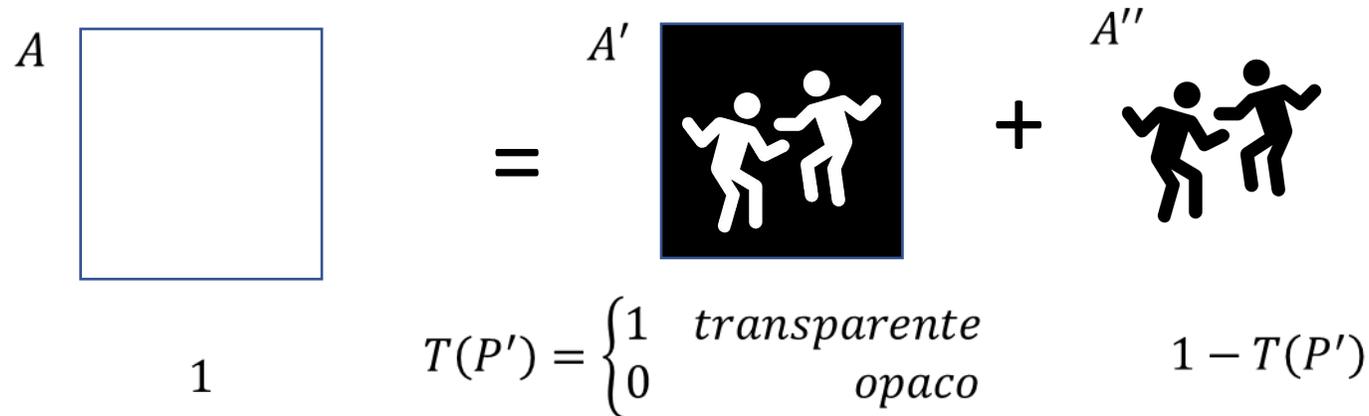
$$A' \text{ (black square)} + A'' \text{ (wave pattern)} = A \text{ (white square)}$$

$$T(P') = \begin{cases} 1 & \text{transparente} \\ 0 & \text{opaco} \end{cases} \quad 1 - T(P') \quad 1$$

$$U(P) = \iint_A U(P') f(r) dS' = \iint_A U(P') [1 - T(P')] f(r) dS' + \iint_A U(P') T(P') f(r) dS'$$

$$U(P) = \iint_A U(P') f(r) dS' = \iint_{A'} U(P') f(r) dS' + \iint_{A''} U(P') f(r) dS'$$

Principio de Babinet



$$U(P) = \iint_A U(P') f(r) dS' = \iint_{A'} U(P') f(r) dS' + \iint_{A''} U(P') f(r) dS'$$

En la aproximación de Fraunhofer

$$\mathcal{F}_{\lambda d}\{U_A(x', y')\} = \mathcal{F}_{\lambda d}\{U_{A'}(x', y')\} + \mathcal{F}_{\lambda d}\{U_{A''}(x', y')\}$$

(estrogena yum ères eup onis nòicnuñ el erlos o ,resal le ebicni ebnoh ne ovls) 0 = {('v, 'x)_A U }_{\lambda d} \mathcal{F}, ebnsrg etnemertneifus A 6169

Las intensidades de ambas figuras de difracción son idénticas = {('v, 'x)_A U }_{\lambda d} \mathcal{F}

Medición de intensidad con resolución espacial

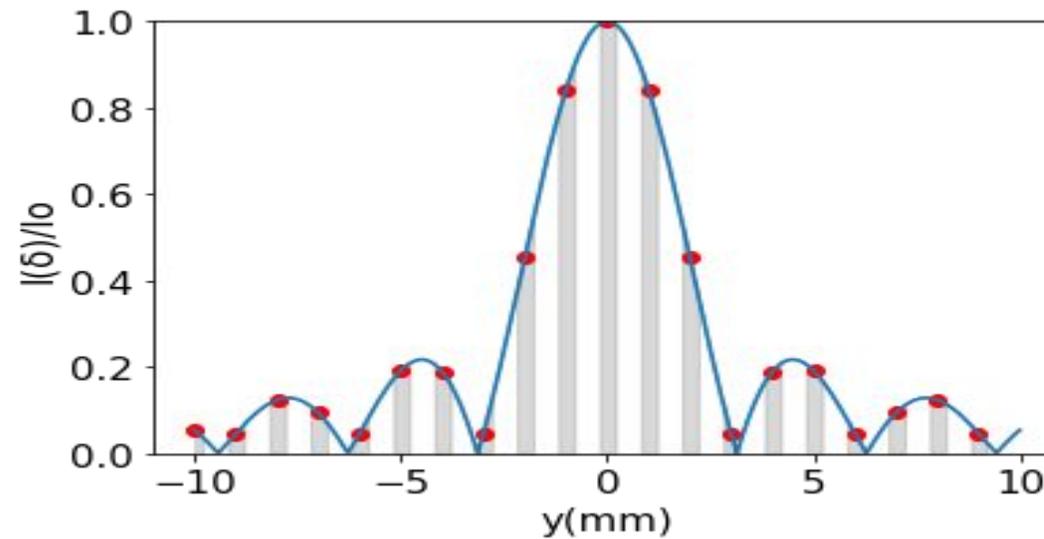
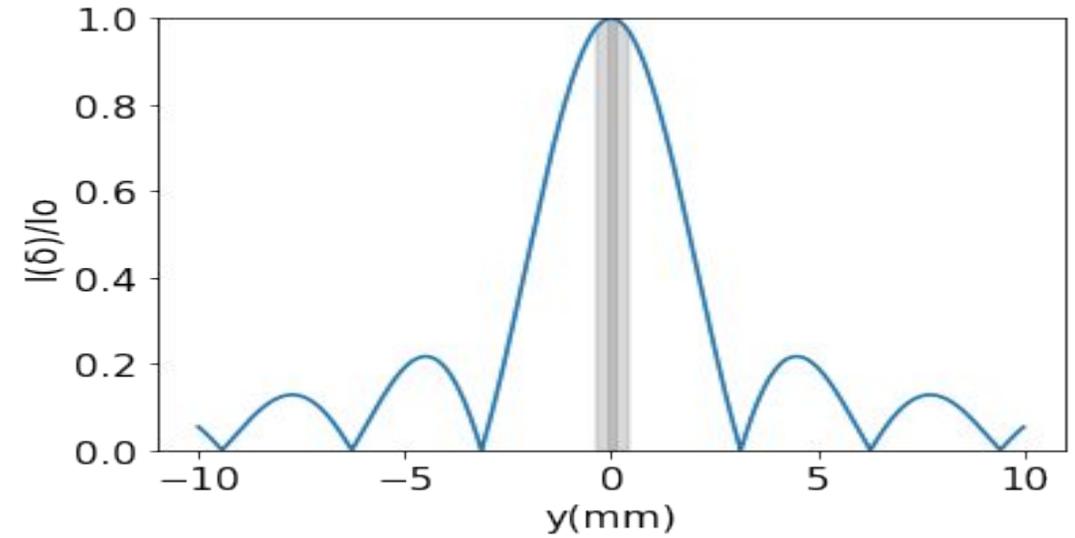
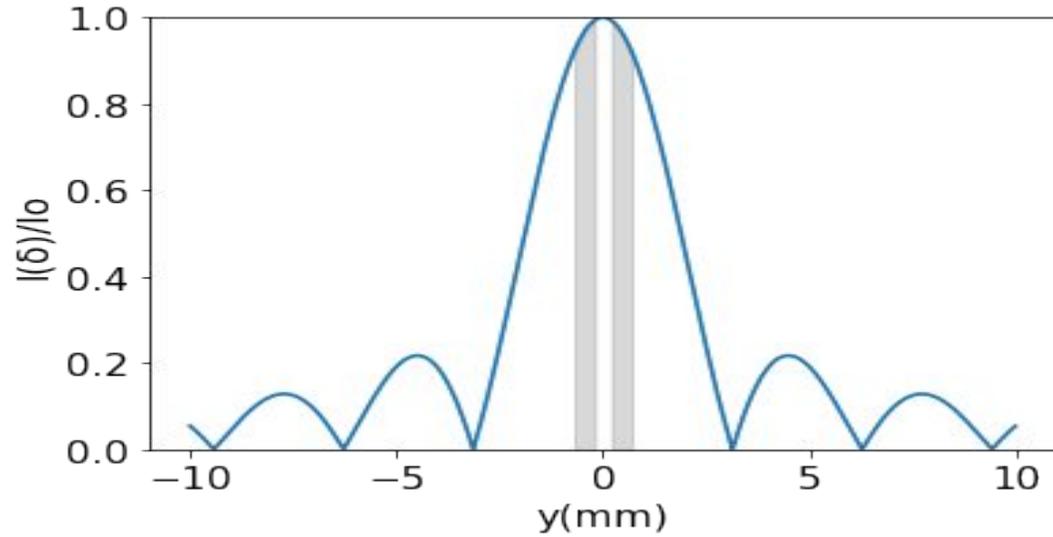
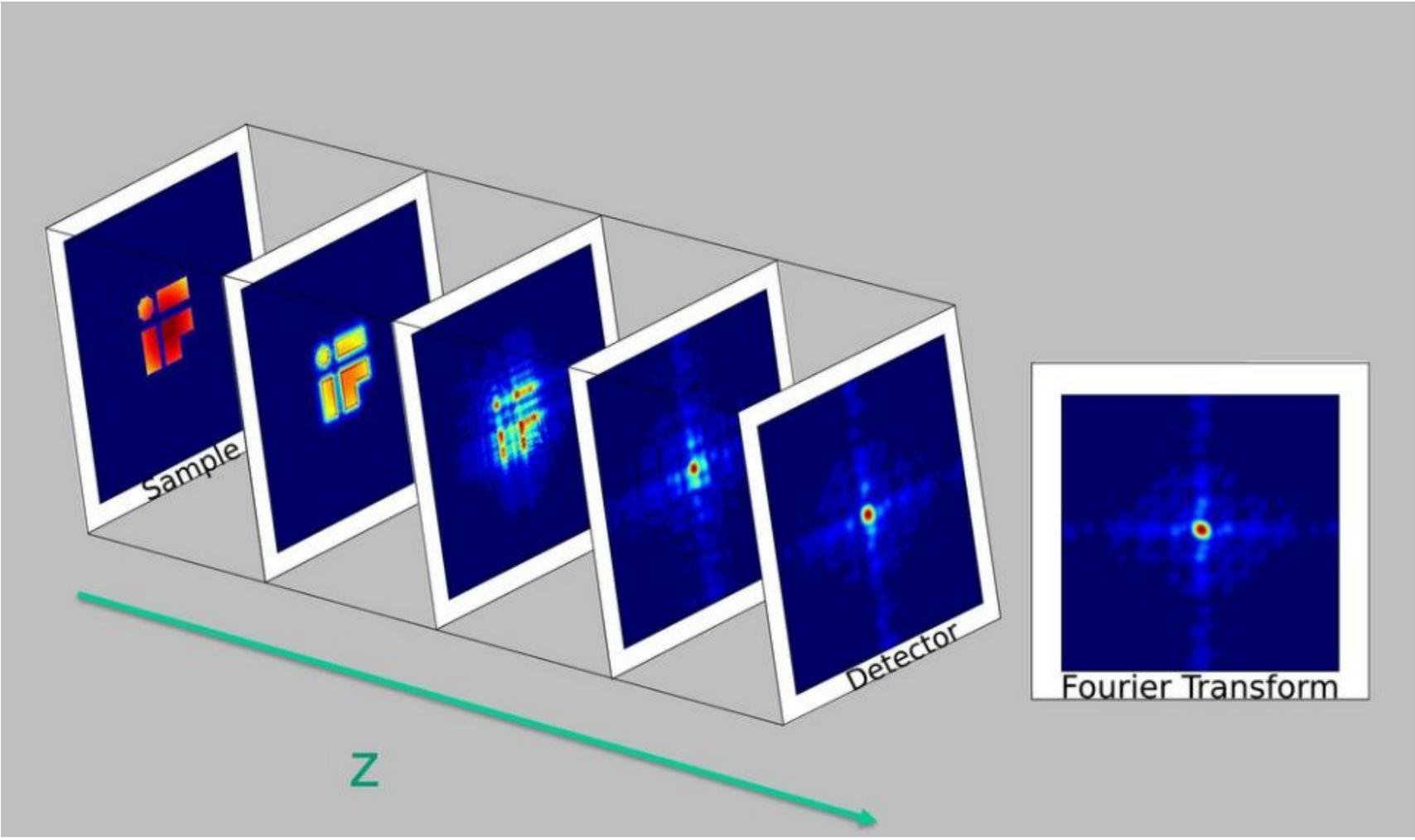
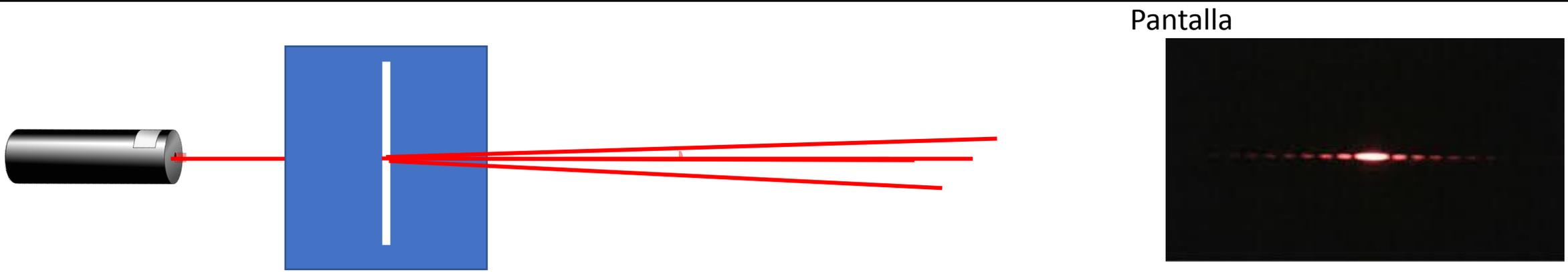


Figura de difracción en la aproximación de Fraunhofer y transformada de Fourier





Experimento: Difracción en campo lejano

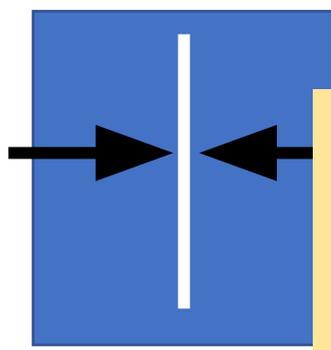


Rendija ancho variable

Alambre ancho incógnita

Fotodiodo

Espectrómetro



Búsqueda: “laser diffraction particles”

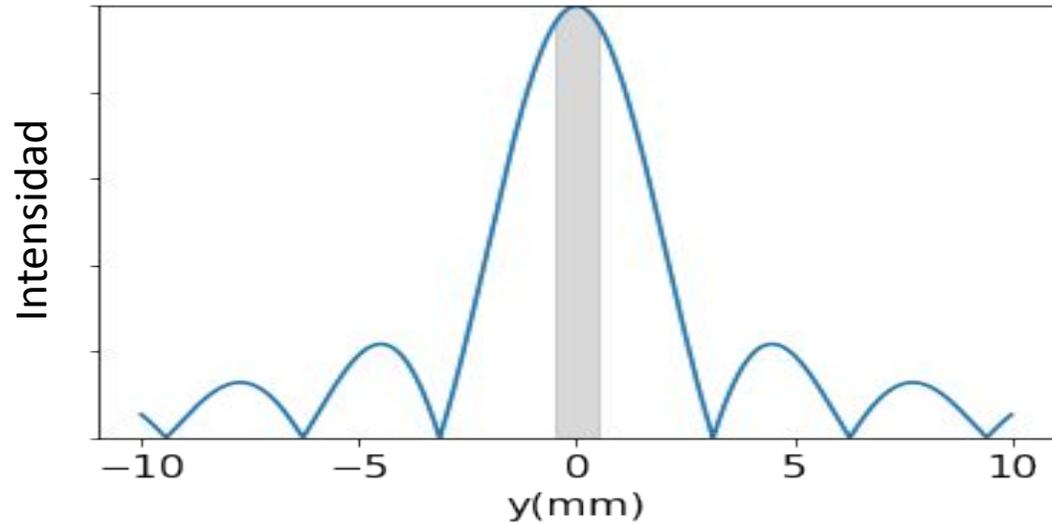
- Aplicaciones para medir partículas de cientos de nanómetros a algunos micrones
- Medicina “drug delivery”
- Tamaños de gotas (sprays pulmonares o nasales)

<https://www.sciencedirect.com/topics/biochemistry-genetics-and-molecular-biology/laser-diffraction>

Que quisiéramos responder con estos experimentos.

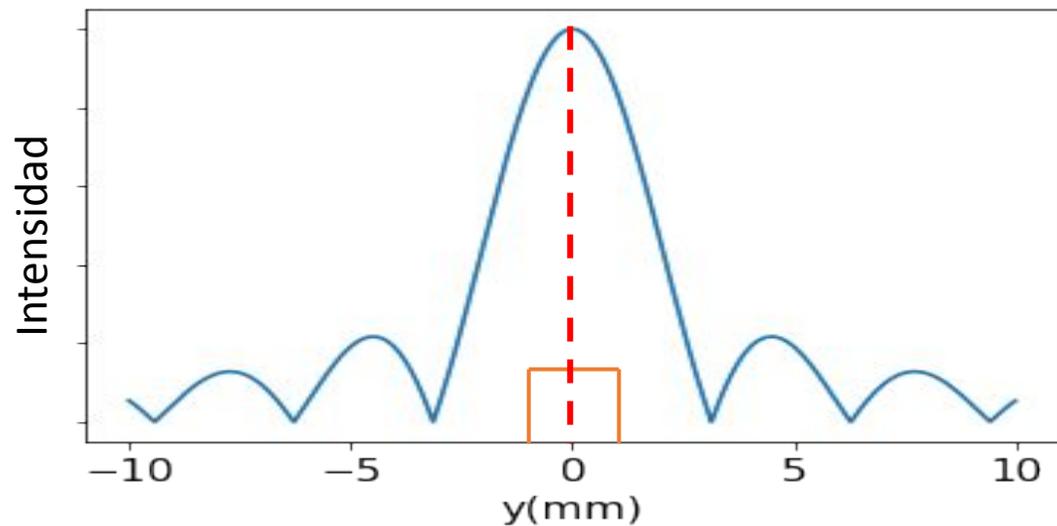
- ¿Cómo uso la difracción para medir tamaños de objetos muy pequeños?
- ¿Cuáles son las ventajas de usar difracción y de donde surgen dichas ventajas?
- ¿Cómo se relacionan las figuras de difracción en máscaras complementarias?

La medición como convolución con la respuesta del instrumento de medición

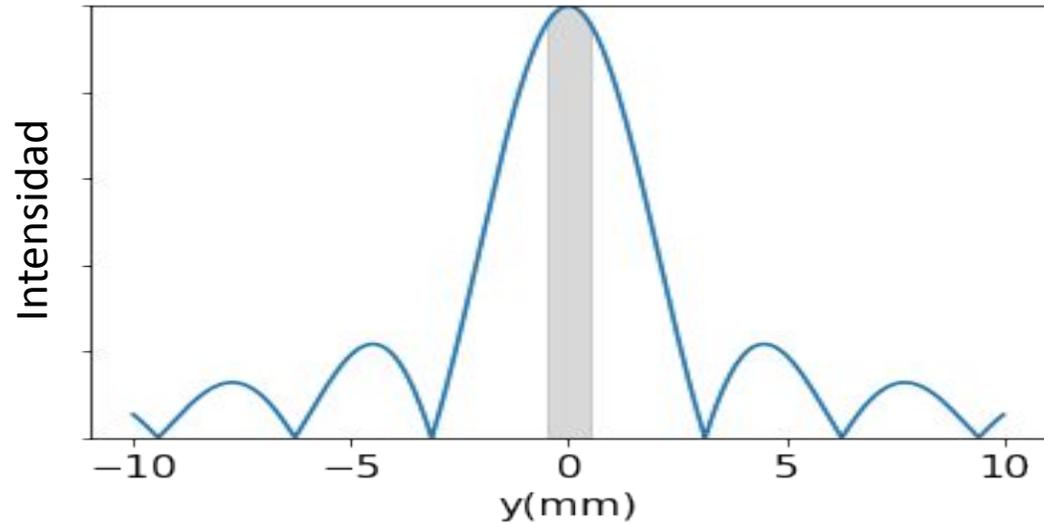


$$V \propto F(0) = \int_{-a/2}^{+a/2} I(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} I(y) R(y) dy$$

$$R(y) = \begin{cases} 1 & |y| < a/2 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

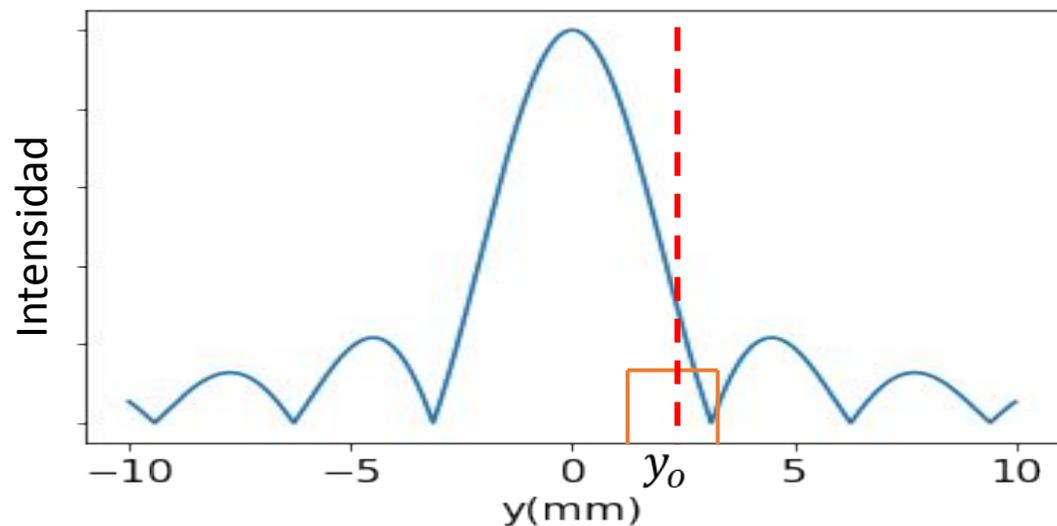


La medición como convolución con la respuesta del instrumento de medición



$$V \propto F(0) = \int_{-a/2}^{+a/2} I(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} I(y) R(y) dy$$

$$R(y) = \begin{cases} 1 & |y| < a/2 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

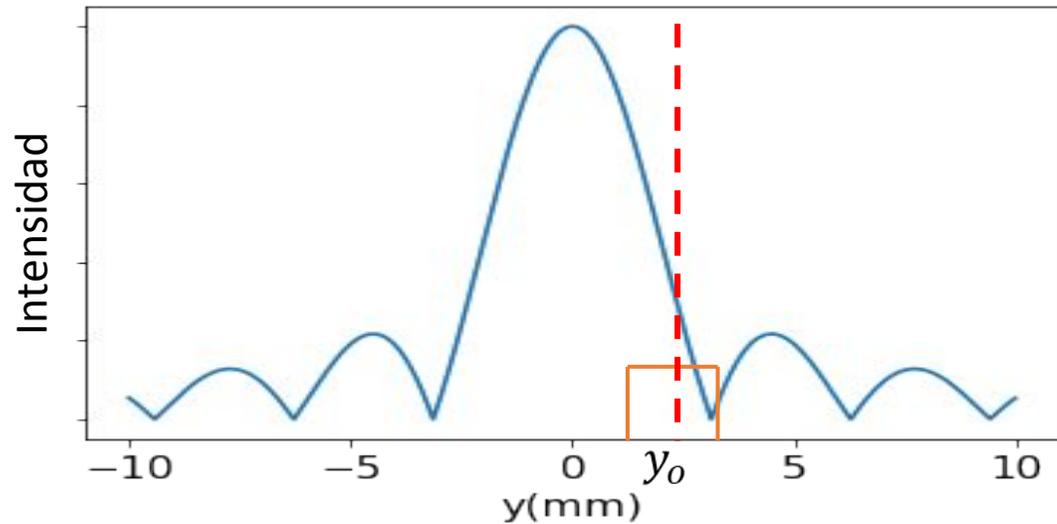


$$V \propto F(y_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(y) R(y - y_0) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} I(y) R(y - y_0) dy = I * R$$

Por lo general simétrica

$$R(y - y_0) = R(y_0 - y)$$

La medición como convolución con la respuesta del instrumento de medición



$$R(y) = \begin{cases} 1 & |y| < a/2 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$V \propto F(y_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(y) R(y - y_0) dy = I * R$$

Observaciones:

- Cuanto más parecida es la respuesta a una delta de Dirac ($R(y) = \delta(y)$), más fiel es la medición

$$F(y_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(y) \delta(y - y_0) dy = I(y_0)$$

- **Si conozco la respuesta del instrumento de medición**, existen formas de “deconvolucionar” la respuesta. Una de ellas:
Si $F = I * R \rightarrow$ por la propiedad de la transformada de Fourier

$$\mathcal{F}\{F\} = \mathcal{F}\{I\}\mathcal{F}\{R\} \rightarrow \mathcal{F}\{I\} = \frac{\mathcal{F}\{F\}}{\mathcal{F}\{R\}} \rightarrow I = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{F}\{F\}}{\mathcal{F}\{R\}} \right\}$$