



*Departamento
de Física
Juan José
Giambiagi*

Facultad de Ciencias
Exactas y Naturales
Universidad
de Buenos Aires

Laboratorio 2

Clase 10

**Difracción de una onda monocromática.
Regiones de Fresnel y Fraunhofer**

- ✓ En las dos clases pasadas hemos nos hemos introducido en la característica ondulatoria de la luz presentándola como una onda electromagnética.
- ✓ Nos dedicamos a analizar un laser como fuente de luz monocromática y coherente. En particular nos centramos en uno de Helio Neón que estamos utilizando desde entonces.
- ✓ También nos hemos familiarizado con el uso de fotodetectores.
- ✓ Hemos caracterizado la polarización del laser de He-Ne del laboratorio.
En el caso del laser de He-Ne de polarización *random*, lo hemos polarizado linealmente haciendo uso de polarizadores.

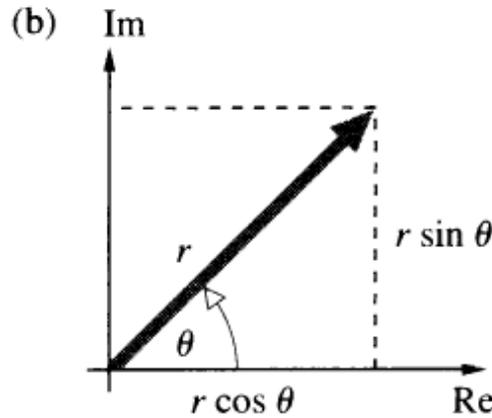
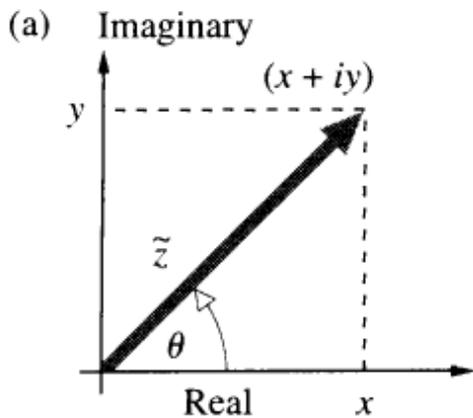
- ✓ Hoy continuaremos con el estudio de ondas luminosa y nos introduciremos en el **fenómeno de difracción**.
- ✓ Analizaremos la difracción considerando los cambios que se observan en la imagen generada por un objeto difractante cuando la observación se realiza bajo diferentes condiciones experimentales.
- ✓ Trabajaremos en las condiciones de campo cercano y lejano (Fresnel y Fraunhofer).
- ✓ Realizaremos una experiencia que permiten verificar los dos tipos de difracción :

Difracción por una rendija

Recordemos que al desarrollar los fenómenos ondulatorios muchas veces nos conviene utilizar la notación compleja en vez de las funciones armónicas que implican el uso de senos y cosenos.

La notación de Euler nos dice que $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ $i = \sqrt{-1}$.

Entonces \longrightarrow $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$



$$\tilde{z} = x + iy \quad \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$\tilde{z} = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\text{Re}(\tilde{z}) = r \cos \theta$$

$$\text{Im}(\tilde{z}) = r \sin \theta$$

En el caso de una onda armónica se utiliza la parte real de la representación compleja

$$\psi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varepsilon)$$

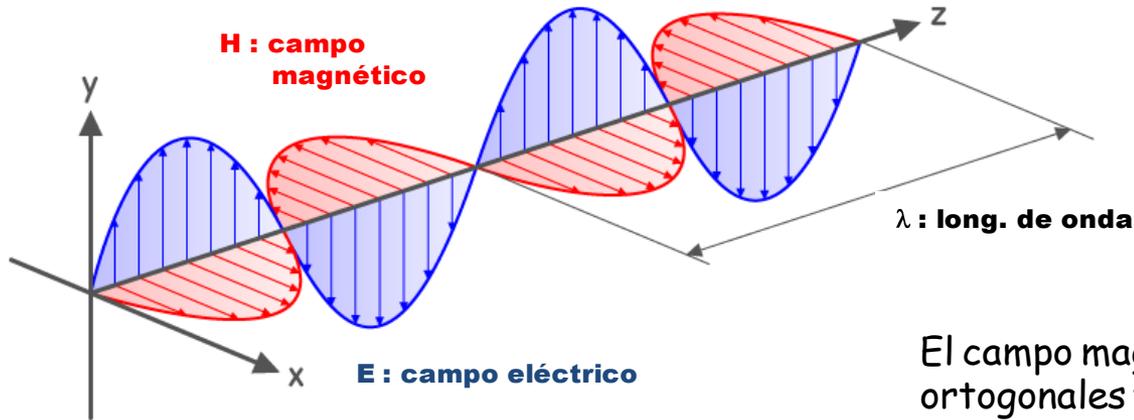
$$\psi(x, t) = \text{Re} [Ae^{i(\omega t - kx + \varepsilon)}]$$

La función de onda la podemos escribir \longrightarrow

$$\psi(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx + \varepsilon)} = Ae^{i\varphi}$$

Ondas Luminosas

- Luz \longrightarrow Ondas transversales



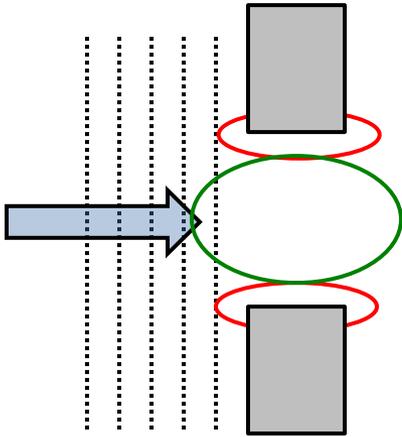
El campo magnético y el campo eléctrico son ortogonales y el plano que definen es perpendicular a la dirección de propagación.

Como lo hicimos en las clases previas analizaremos los fenómenos ópticos a partir del análisis del campo eléctrico E y su intensidad.

Teoría escalar de la difracción

Vamos a considerar el siguiente problema:

Una onda luminosa que se propaga libremente se encuentra con un obstáculo o máscara **que cambia su amplitud y/o fase por un factor bien determinado**



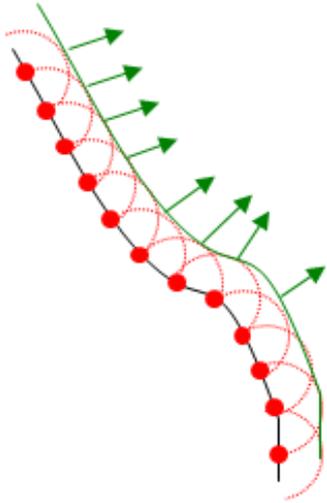
Un observador en un dado punto del espacio (o un conjunto de puntos de una pantalla) mide el campo de una onda producto de la superposición de la parte del campo incidente (no afectado por el obstáculo) y otros campos generados en los puntos del obstáculo.

Principio de Huygens

Si se conoce el frente de onda en un dado instante, se puede deducir el frente de onda en un momento posterior considerando cada punto del primero como una fuente de una nueva perturbación.

Esta nueva fuente es esférica que se propaga hacia adelante.

Posteriormente , las ondas esféricas habrán crecido hasta un cierto radio y el nuevo frente de ondas envuelve estas nuevas perturbaciones.



La amplitud y la fase de la onda electromagnética puede describirse adecuadamente por una variable escalar **y los efectos producidos por la polarización de ondas pueden despreciarse.**

Utilizamos la aproximación escalar para ignorar las polarizaciones y consideramos **la onda como una variable compleja única ψ** con **frecuencia angular ω** y el **vector de onda k_0**

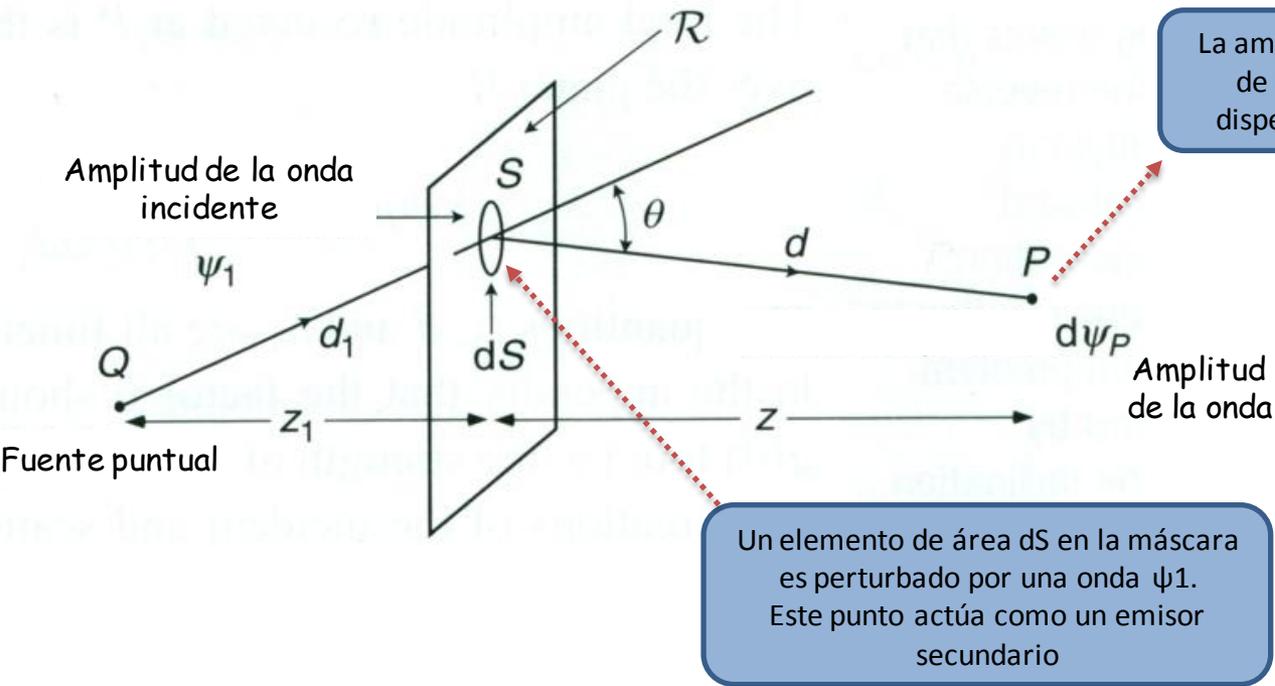
$$\left. \begin{aligned} k_0 &= \frac{2\pi}{\lambda} \\ c &= \lambda f = \lambda \frac{\omega}{2\pi} \end{aligned} \right\} k_0 = \frac{\omega}{c}$$

ψ representa un campo escalar complejo con su amplitud y fase

$$\psi(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx + \varepsilon)} = Ae^{i\varphi}$$

El factor de la onda dependiente del tiempo **$\exp(-i\omega t)$** no tiene importancia en este análisis ya que se incluye en todos los cálculos sin cambios. Lo vamos a omitir en el resto del análisis.

Supongamos tener una fuente puntual monocromática que ilumina un elemento R



La amplitud observada en el punto P surge de la luz emitida desde un punto Q y dispersada por una máscara de plano R.

Un elemento de área dS en la máscara es perturbado por una onda ψ_1 . Este punto actúa como un emisor secundario

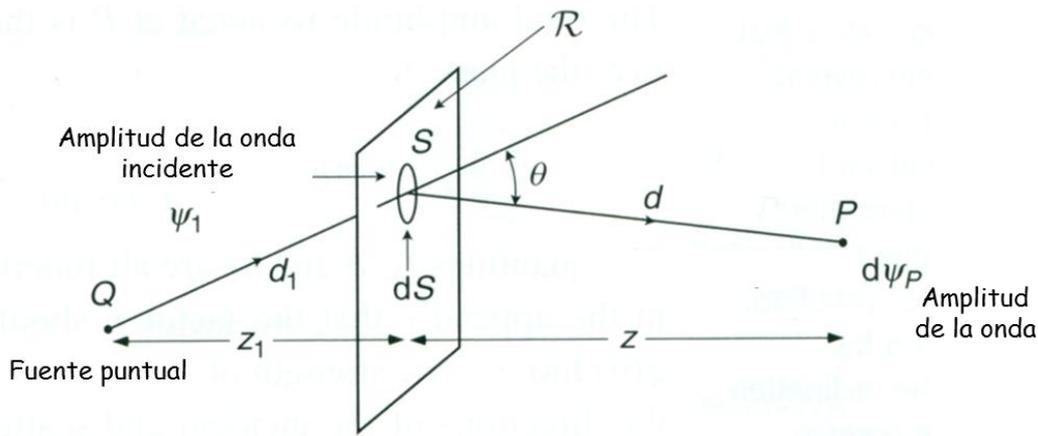
La intensidad de este emisor secundario será

$$b f_s y_1 dS$$

Intensidad de re-emisión \leftarrow

\leftarrow Función de transmisión

$\left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ para un obstáculo opaco} \\ 1 \text{ para transparente} \\ \text{Valores intermedios para el resto} \end{array} \right.$



La coherencia (fase) de la reemisión es importante.
 Debe estar exactamente relacionado con la perturbación original ψ_1 ; de lo contrario, el efecto de difracción cambiará con el tiempo.

Si consideramos la onda emitida desde la fuente puntual Q como esférica de intensidad a_Q

$$y_1 = \frac{a_Q}{d_1} \exp(j k_0 d_1) \quad k_0 = 2\pi/\lambda$$

Factor de fase

El área dS actúa como emisor secundario de intensidad

$$b a_s = b f_s y_1 dS$$

Entonces la contribución en el punto P es

$$d\psi_P = b f_s \psi_1 d^{-1} \exp(j k_0 d) dS$$

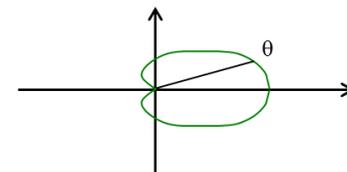
$$= b f_s a_Q (d d_1)^{-1} \exp(j k_0 (d + d_1)) dS$$

La amplitud total en el punto P se obtiene integrando sobre todo el plano R

$$\psi_P = b a_Q \iint_R f_s (d d_1)^{-1} \exp(j k_0 (d + d_1)) dS$$

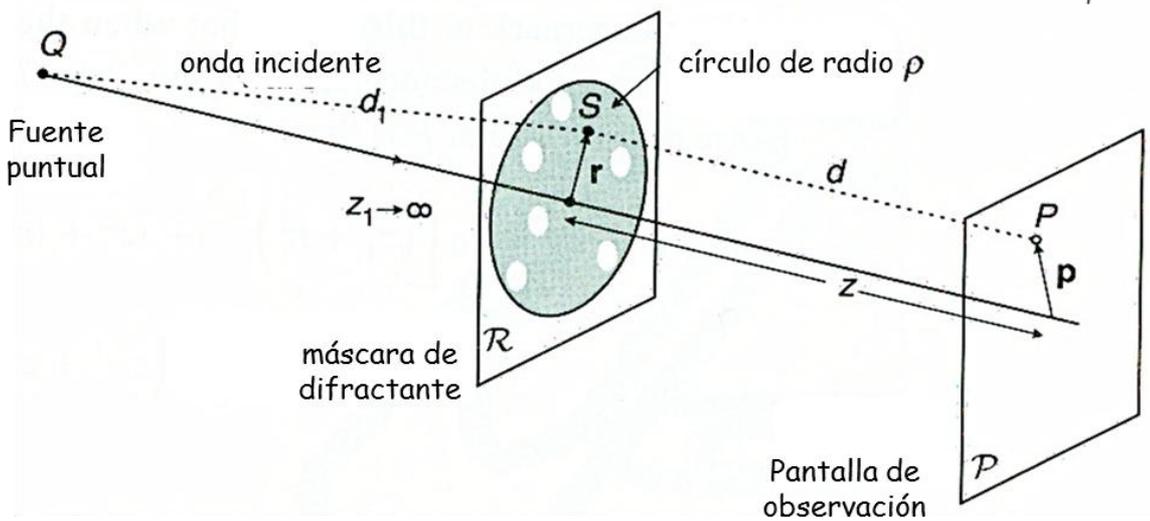
b depende del ángulo θ
 Cuando $b = 1$ en la dirección hacia adelante
 $b = 0$ en la dirección hacia atrás

Aproximación paraxial



Teoría escalar de la difracción : aproximación paraxial

$$\psi_P = b a_Q \iint_R f_s(d d_1)^{-1} \exp(j k_0 (d + d_1)) dS$$



Consideremos un sistema iluminado por una onda plana.

Q está lejos del objeto difractante y aumentamos su intensidad para mantener la proporción $\frac{a_Q}{d_1} = A$ constante

Suponemos que la máscara de difracción coincide con un frente de onda plano de la onda incidente.

La amplitud en la pantalla de observación se convierte en

$$\psi_P = b a_Q \iint_R f_s(d d_1)^{-1} \exp(j k_0 (d + d_1)) dS \longrightarrow \psi_P = b A \exp(j k_0 z_1) \iint_R \frac{f(r)}{d} \exp(j k_0 d) d^2 r$$

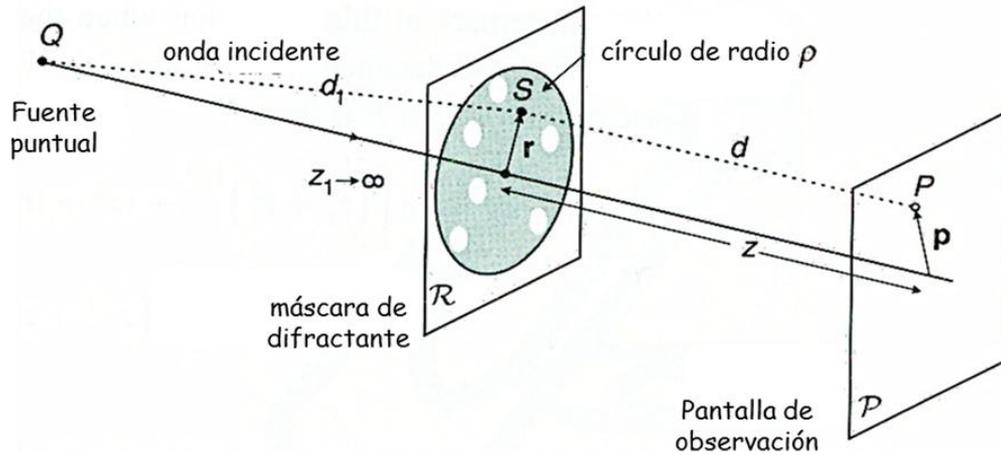
Se cambia la posición de S por r y por tanto f_s se reemplaza por $f(r)$

Q está muy lejos de la máscara \longrightarrow

se espera que la iluminación sea una onda plana y el factor de fase

$$\exp(jk_0 z_1)$$

puede ser absorbido por el término A

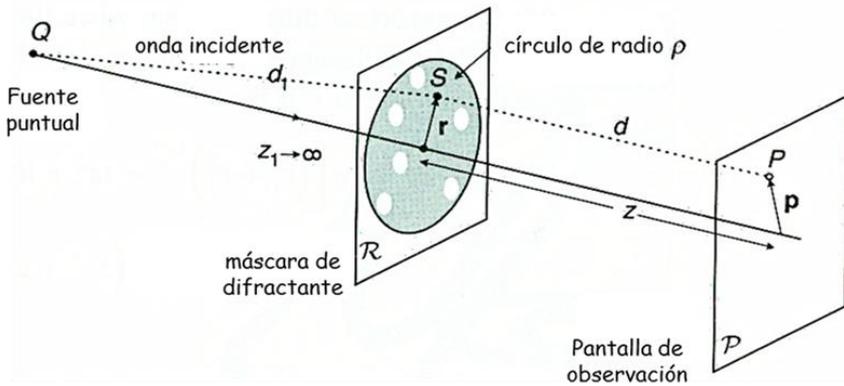


La intensidad es $I = |\psi|^2 = \psi \psi^*$

con
$$\psi = b A \iint_R \frac{f(r)}{d} \exp(jk_0 d) d^2 r$$

Efectos de difracción

- Fresnel** (campo cercano).
El factor de fase $k_0 d$ tiene terminos no lineales mayores de $\pi/2$
- Fraunhofer** (campo lejano).
El factor de fase $k_0 d$ varía linealmente con r .



Para establecer límites cuantitativos para ambos regímenes, podemos definir un círculo de radio ρ que incluye todas las regiones de transmisión de la máscara.

Ahora ampliamos el término de fase como

$$k_0 d = k_0 \left(z^2 + |r - p|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Consideramos r y p pequeños frente a z \longrightarrow $k_0 d \cong k_0 z + \frac{1}{2} k_0 z^{-1} (r^2 - 2r \cdot p + p^2) + \dots$

$k_0(z + \frac{1}{2}p^2/z)$ término constante

$k_0 r \cdot p / z$ término lineal en r

$\frac{1}{2} k_0 r^2 / z$ término cuadrático en r

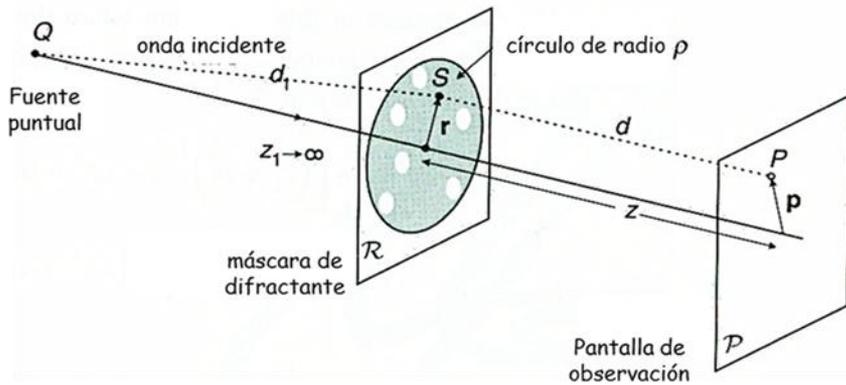
El mayor valor de r que aporta es ρ \longrightarrow $\frac{1}{2} k_0 \rho^2 / z$ Mayor valor del termino cuadrático de la fase

El límite para los regímenes de **Fresnel** o **Fraunhofer** se establece según el tamaño de la fase cuadrática en comparación con $\pi/2$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} k_0 \frac{\rho^2}{z} \geq \frac{\pi}{2} \rightarrow \rho^2 \geq \lambda z \\ \frac{1}{2} k_0 \frac{\rho^2}{z} \ll \frac{\pi}{2} \rightarrow \rho^2 \ll \lambda z \end{array} \right.$$

Difracción de Fresnel
(difracción de campo cercano)

Difracción de Fraunhofer
(difracción de campo lejano)



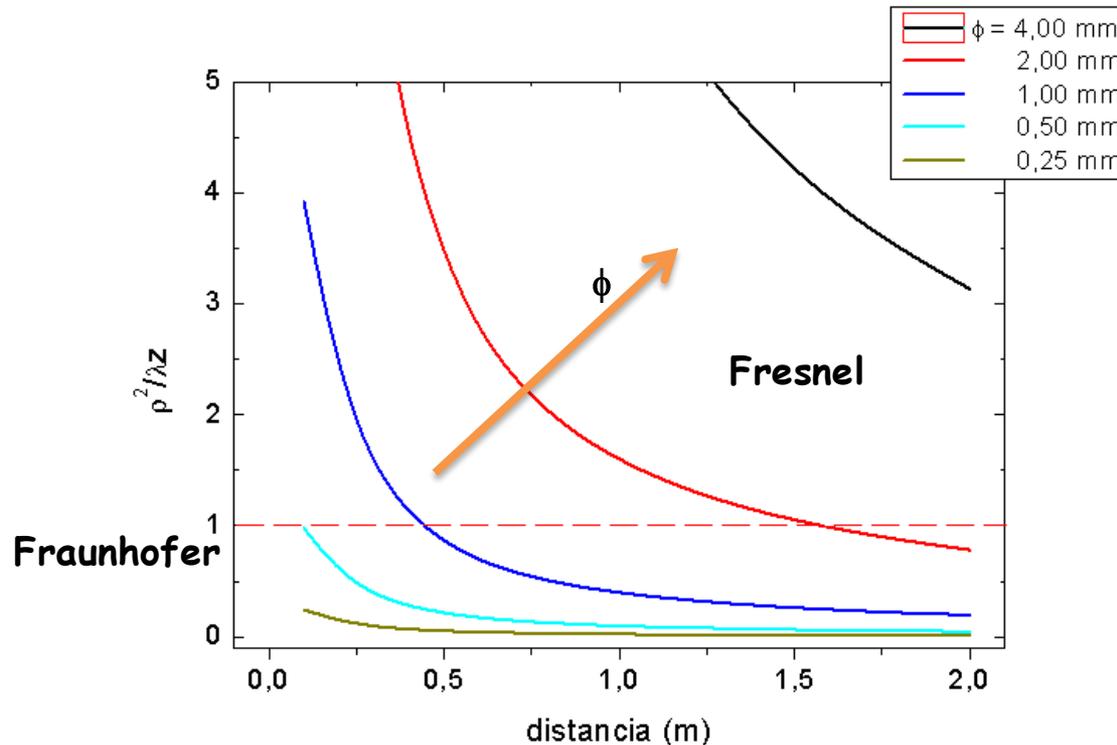
$$\frac{1}{2} k_o \frac{\rho^2}{z} \geq \frac{\pi}{2} \rightarrow \rho^2 \geq \lambda z$$

Difracción de Fresnel
(difracción de campo cercano)

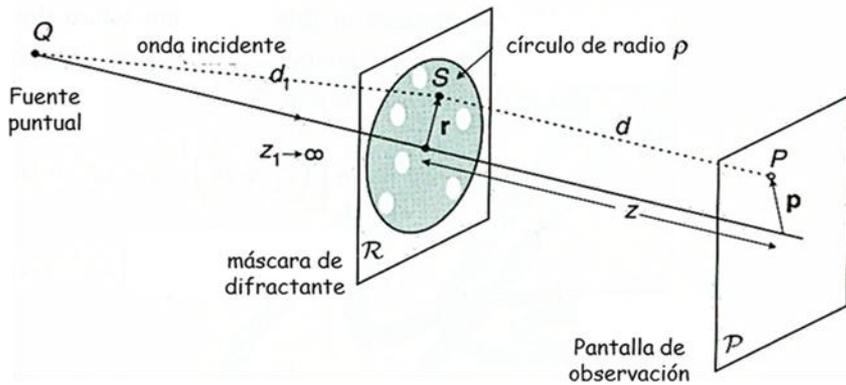
$$\frac{1}{2} k_o \frac{\rho^2}{z} \ll \frac{\pi}{2} \rightarrow \rho^2 \ll \lambda z$$

Difracción de Fraunhofer
(difracción de campo lejano)

Por ej., con una apertura circular de 2 mm de diámetro, iluminado con $\lambda = 500 \text{ nm}$, se observa difracción de Fresnel a distancia menores de 2 m



Estimación para distintos diámetros de apertura (ϕ) con $\lambda = 638 \text{ nm}$



$$\frac{1}{2} k_0 \frac{\rho^2}{z} \geq \frac{\pi}{2} \rightarrow \rho^2 \geq \lambda z$$

Difracción de Fresnel
(difracción de campo cercano)

$$\frac{1}{2} k_0 \frac{\rho^2}{z} \ll \frac{\pi}{2} \rightarrow \rho^2 \ll \lambda z$$

Difracción de Fraunhofer
(difracción de campo lejano)

Si la máscara está iluminada por una fuente puntual a una distancia z_1 , las ecuaciones se modifican como

$$k_0(d_1 + d) = k_0 \left(\sqrt{z_1^2 + r^2} + \sqrt{z^2 + |r - p|^2} \right) \cong k_0(z + z_1) + \frac{k_0 r^2}{2} (z^{-1} + z_1^{-1}) + \frac{k_0 p^2}{2z} - \frac{k_0}{z} r \cdot p + \dots$$

Las condiciones de **Fresnel** y **Fraunhofer** se transforman en

Fresnel $r^2 \geq \frac{\lambda}{(z^{-1} + z_1^{-1})}$

Fraunhofer $r^2 \ll \frac{\lambda}{(z^{-1} + z_1^{-1})}$

Hoy realizaremos la experiencia de **Difracción por una rendija**.

La idea es explorar el diagrama de difracción en condiciones de Fraunhofer (campo lejano) y Fresnel (campo cercano).

Según el **principio de Huygens-Fresnel**, cada punto sin obstrucción de un frente de ondas, en un instante de tiempo determinado, actúa como una fuente emisora esférica secundaria con la misma frecuencia que el frente primario.

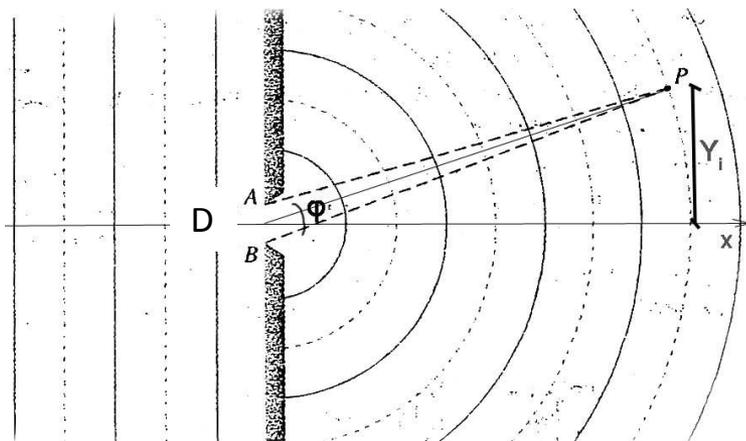


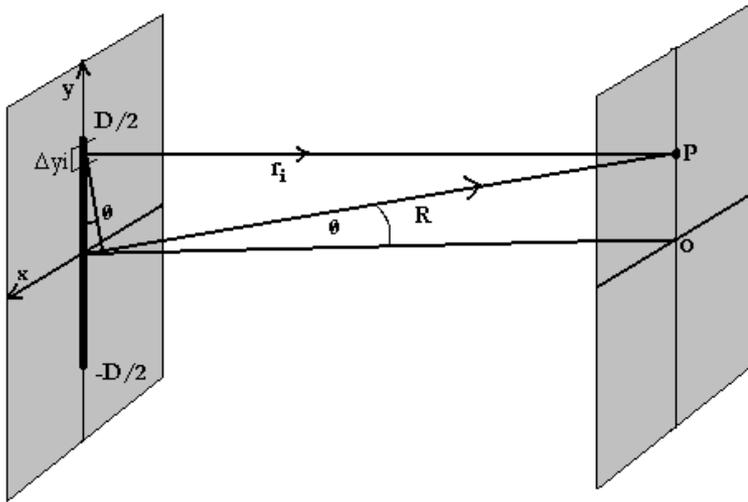
La amplitud en un punto lejano a estas fuentes secundarias es la superposición de las amplitudes de las mismas.



Las condiciones de difracción de **Fraunhofer** :

Un frente de onda primario plano incidente sobre la abertura, y un punto P de superposición de los frentes secundarios lo suficientemente alejado para considerar dichos frentes planos





Partimos de una fuente continua lineal coherente (es decir un continuo finito de ondas secundarias coherentes para una rendija larga).

Cada fuente secundaria del continuo emite una onda esférica cuyo campo eléctrico se puede escribir

$$E = \left(\frac{\varepsilon_0}{r} \right) \text{sen } \omega t - kr$$

ε_0 = eficacia de la fuente

r = distancia del elemento Δy de la rendija hacia la pantalla de observación.

N = número de fuentes

$\Delta y_i \frac{N}{D}$ Número de fuentes en el segmento Δy_i

M = Número de segmentos Δy_i

$$E_i = \left(\frac{N \Delta y_i}{D} \right) \left(\frac{\varepsilon_0}{r_i} \right) \text{sen}(\omega t - kr_i)$$

Contribución del segmento i-esimo a la intensidad del campo eléctrico

$$\varepsilon_L = \frac{1}{D} \lim_{N \rightarrow \infty} (\varepsilon_0 N)$$

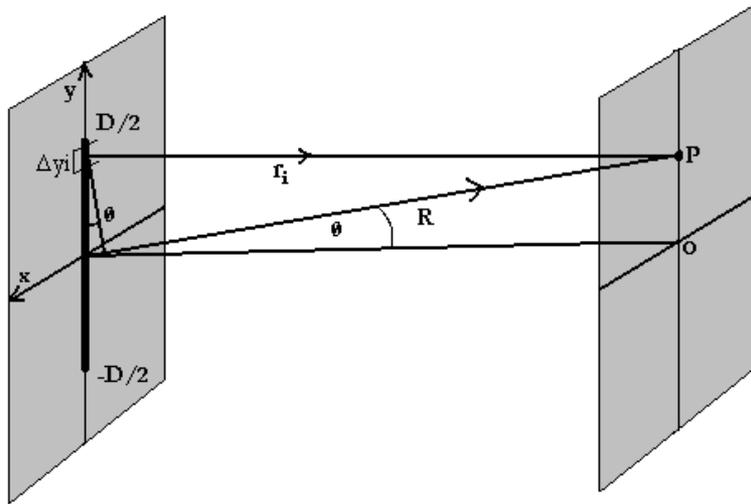
eficacia de la fuente por unidad de longitud

$$E = \sum_{i=1}^M \frac{\varepsilon_L}{r_i} \text{sen}(\omega t - kr_i) \Delta y_i$$

Campo eléctrico neto en P

Imponiendo la condición de fuente continua ($\Delta y_i \rightarrow 0, M \rightarrow \infty$) la suma se convierte en la integral:

$$E = \sum_{i=1}^M \frac{\varepsilon_L}{r_i} \text{sen}(\omega t - kr_i) \Delta y_i \quad \longrightarrow \quad E = \varepsilon_L \int_{-D/2}^{+D/2} \frac{\text{sen}(\omega t - kr)}{r} dy \quad r = r \ y$$



P está muy lejos de la rendija (fuente lineal coherente):

$R \gg D \longrightarrow r(y)$ nunca se desvía mucho de su valor medio R

$$dE = \frac{\varepsilon_L}{R} \text{sen}(\omega t - kr) dy \quad \text{Contribución del segmento } \Delta y \text{ al campo eléctrico en P}$$

La fase es mucho más sensible a la variaciones de $r(y)$ que la amplitud

$$r = R - y \sin \theta + \cancel{y^2 / 2R \cos^2 \theta + \dots}$$

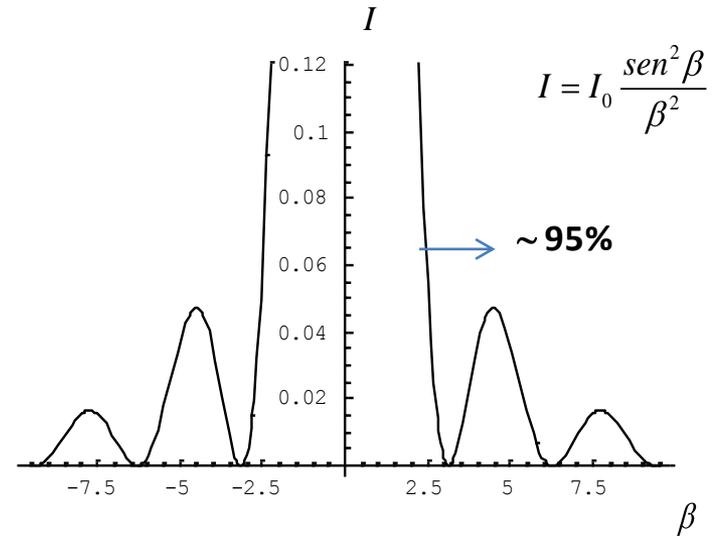
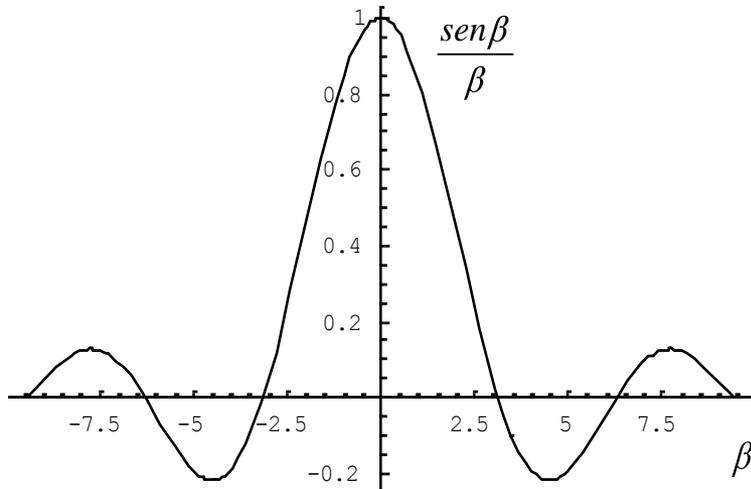
$$r \approx R - y \sin \theta$$

Resolviendo la integral

$$E = \frac{\varepsilon_L}{R} \int_{-D/2}^{+D/2} \text{sen}[\omega t - k(R - y \sin \theta)] dy \quad \longrightarrow \quad E = \frac{\varepsilon_L D}{R} \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) \text{sen } \omega t - kR \quad \beta = \frac{kD}{2} \sin \theta$$

Entonces la irradiancia es $I(\theta) = \langle E^2 \rangle$

$$I = I_o \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \quad I_o = \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_L D}{R} \right)^2$$



$$\frac{dI}{d\beta} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{dI}{d\beta} = I_0 \frac{2 \sin \beta (\beta \cos \beta - \sin \beta)}{\beta^3} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi \\ \beta = \tan \beta \end{array} \right.$$

$$\beta_{\theta} = \frac{kD}{2} \sin \theta$$

De la posición de máximos y mínimos se obtiene θ y luego conociendo β y λ se puede evaluar el ancho de la ranura.

Materiales para la experiencia

Light Sensor

(Order Code LS-BTA)



Specifications

Resolution:

13-bit (with SensorDAQ)

0–600 lux:	0.1 lux
0–6000 lux:	1 lux
0–150000 lux:	25 lux

12-bit (with LabQuest 2, LabQuest, LabQuest Mini, LabPro, Go! Link, EasyLink, TI-Nspire Lab Cradle, ULI, or Serial Box Interface)

0–600 lux:	0.2 lux
0–6000 lux:	2 lux
0–150000 lux:	50 lux

10-bit (with CBL 2)

0–600 lux:	0.8 lux
0–6000 lux:	8 lux
0–150000 lux:	200 lux

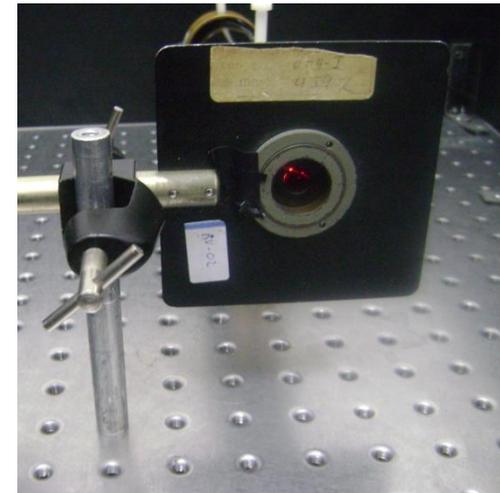
Stored calibration values

0–600 lux	slope:	154 lux/V
	intercept:	0 lux
0–6000 lux	slope:	1692 lux/V
	intercept:	0 lux
0–150000 lux	slope:	38424 lux/V
	intercept:	0 lux

Láser He-Ne Melles Griot 02-LHP-111

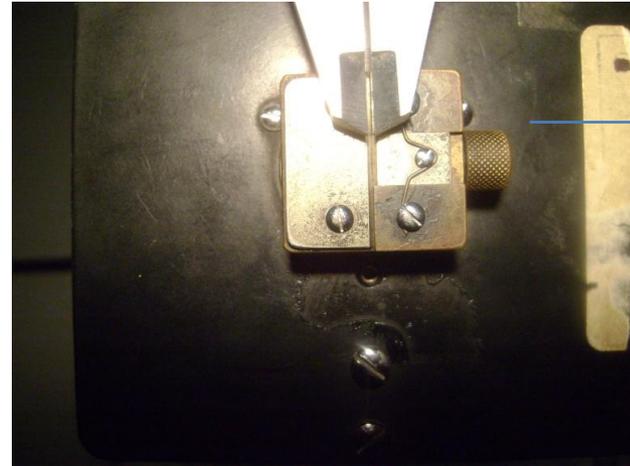
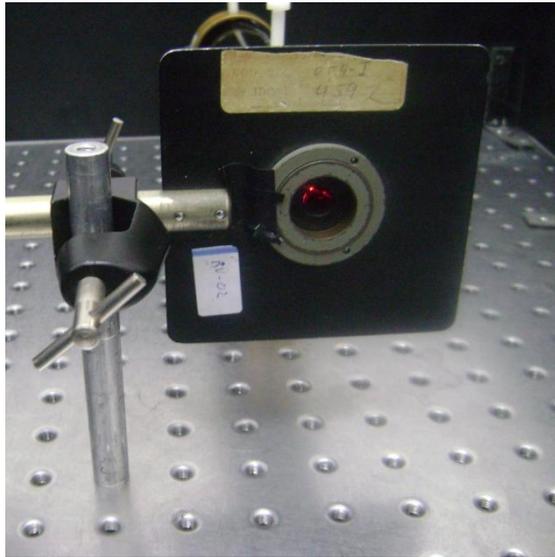


632,8 nm

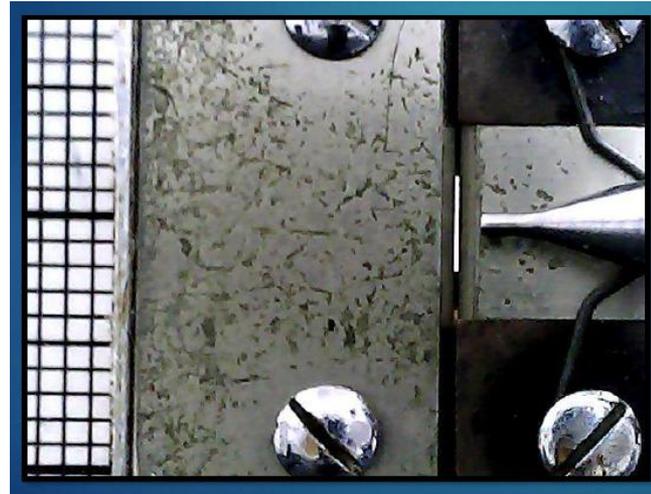


Rendija de ancho variable

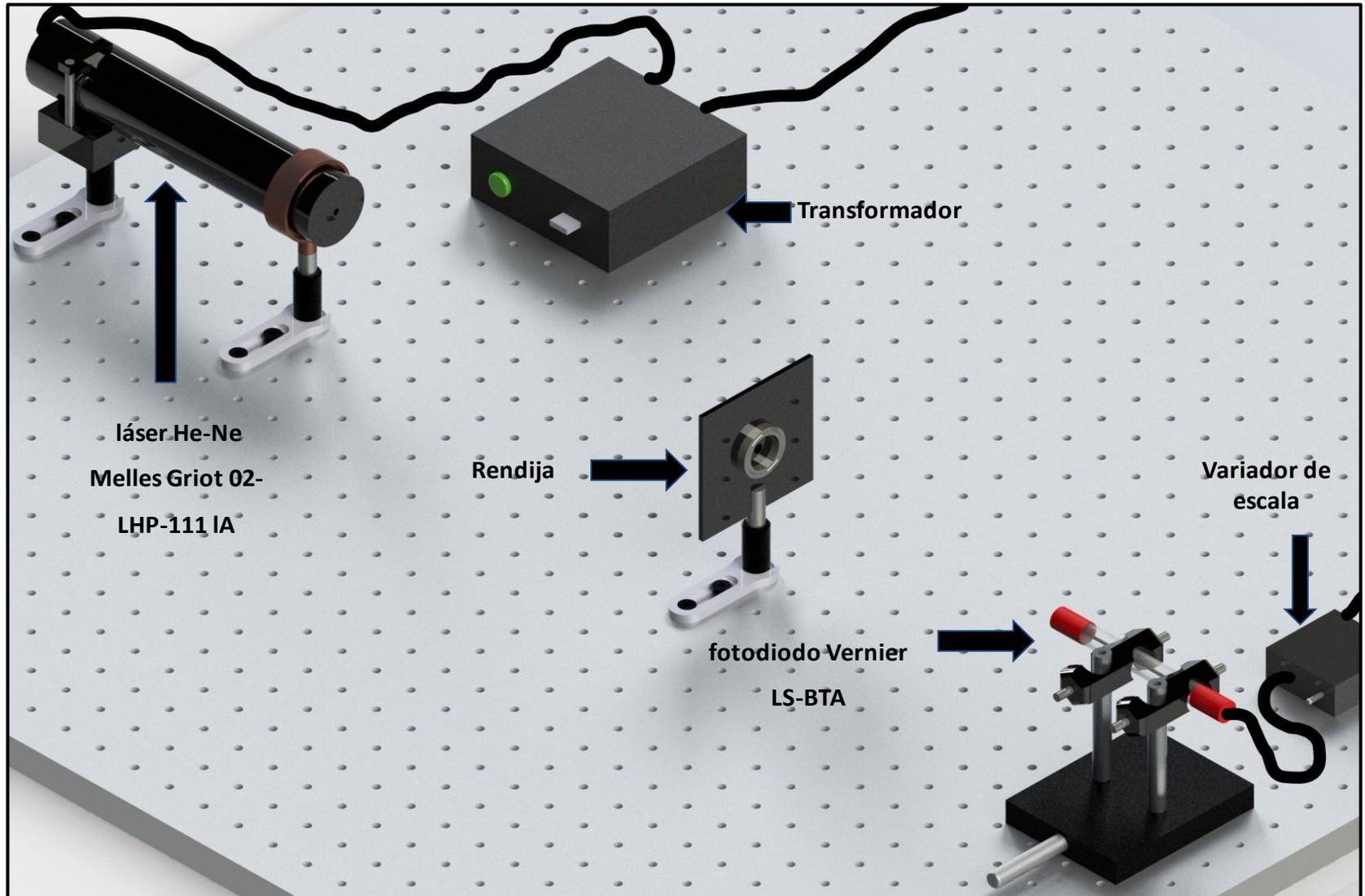
Rendija de ancho variable



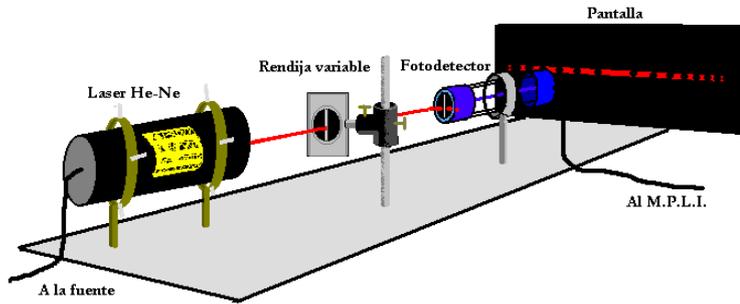
Tornillo micrométrico



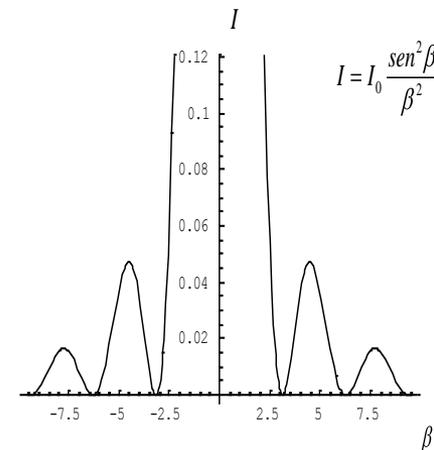
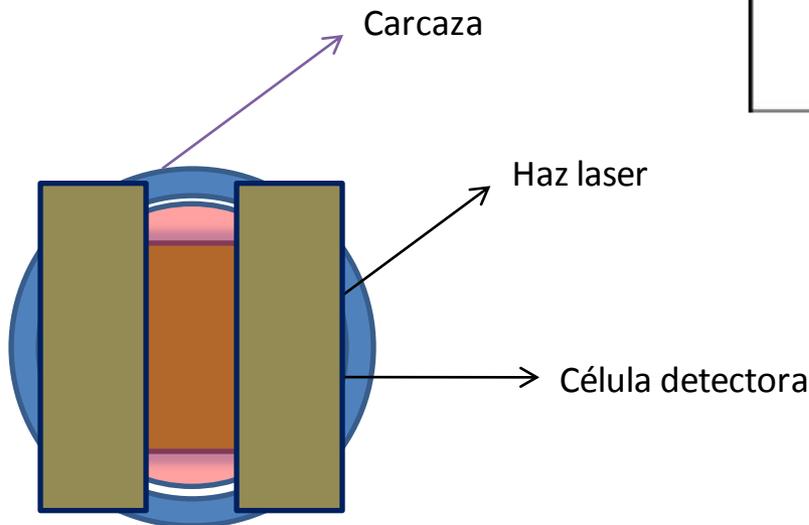
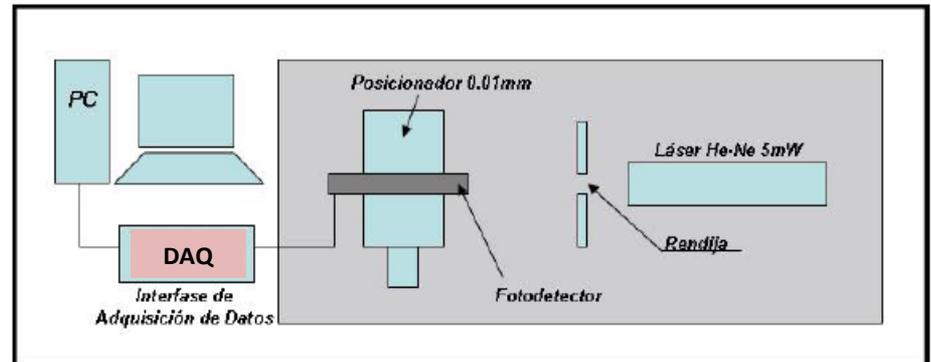
Difracción de rendija



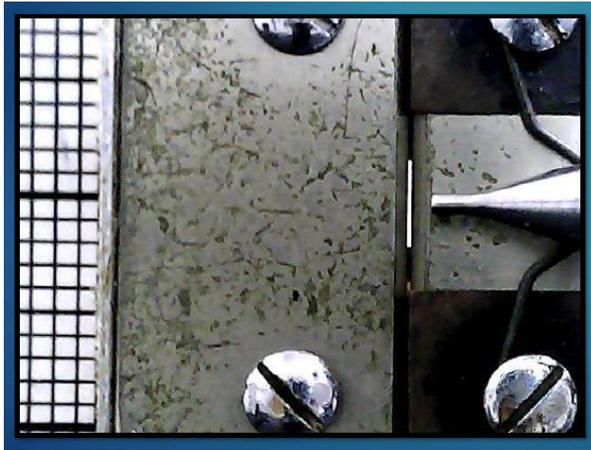
Montaje experimental



- Colocar el fotosensor en un posicionador.
- Estrechar la sección de medición del fotosensor.
- Montar el conjunto laser-ranura-fotosensor en la mesa óptica.
- Alinear el sistema y variar el ancho de la ranura hasta observar una figura de difracción en una pantalla (ubicada en lugar del fotosensor)
- Registrar la señal de intensidad luminosa con el fotosensor conectado al SensorDAQ.

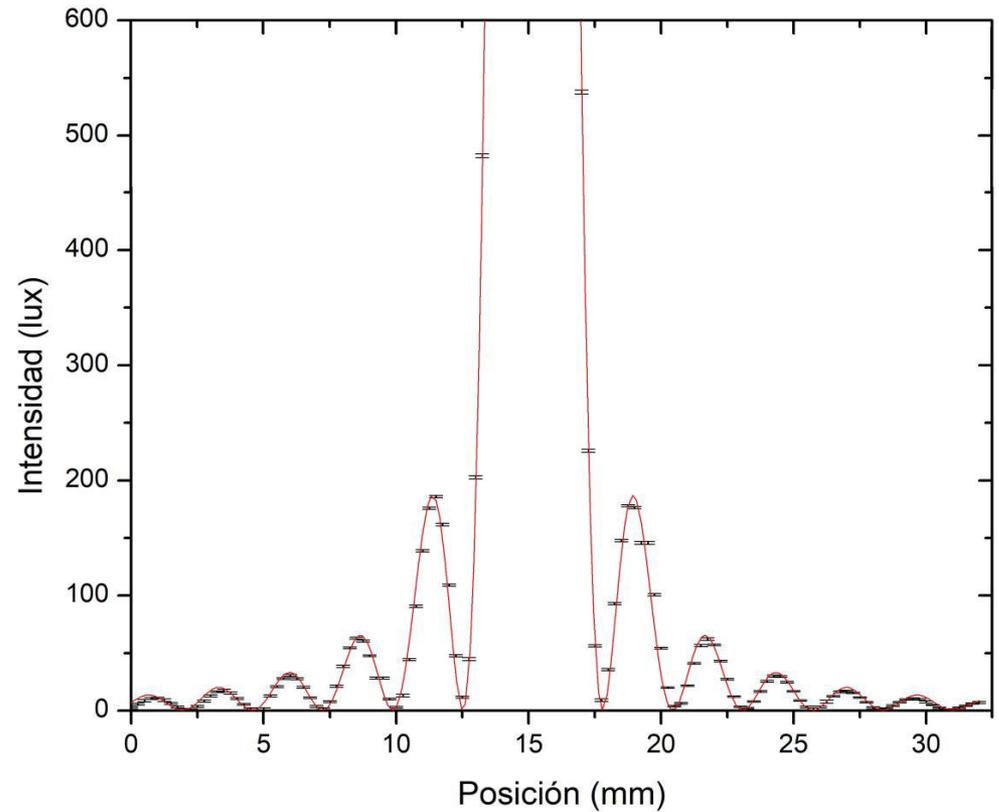


Detalle rendija

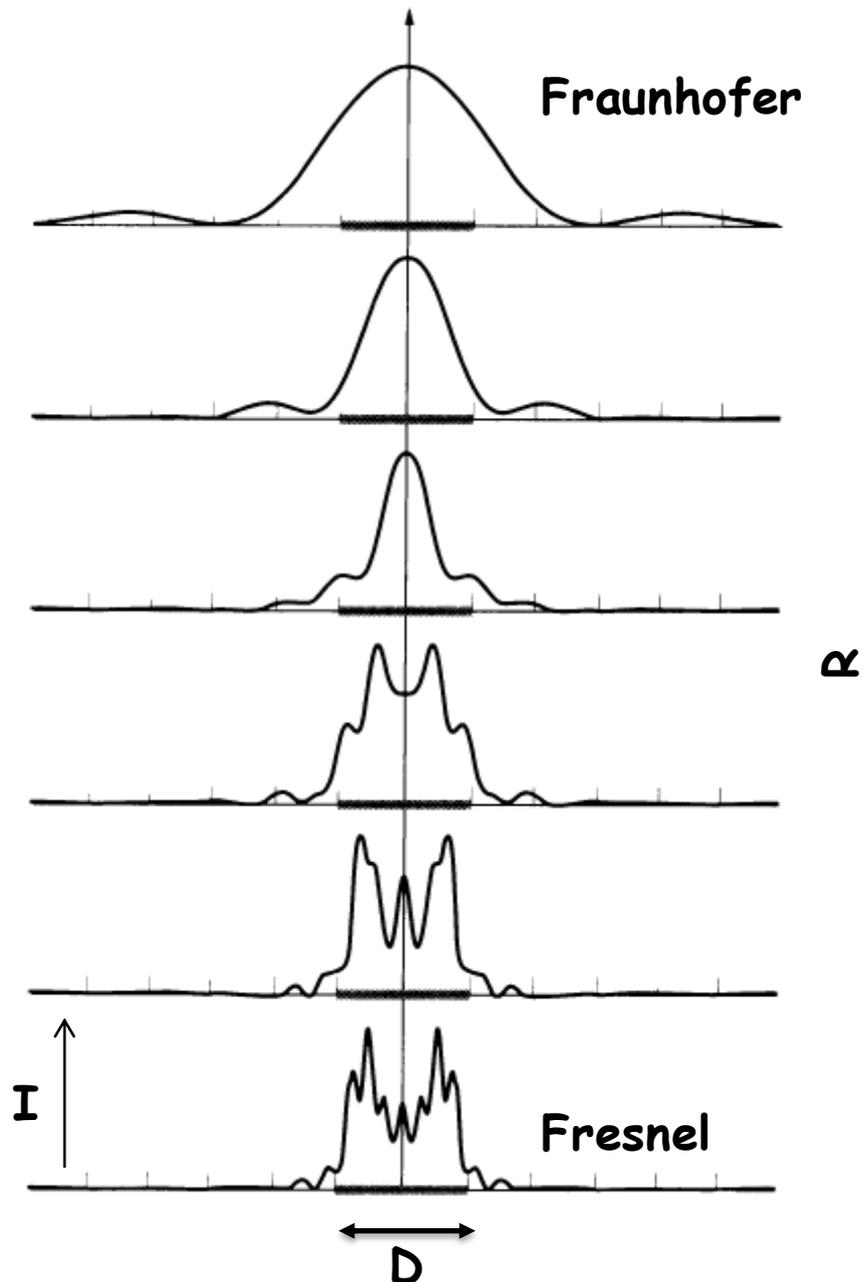


Medición $b = (180 \pm 10) \mu\text{m}$

Ejemplo de mediciones



- $R^2 = 0,98$
- $b = (184 \pm 2) \mu\text{m}$



Aumentando la distancia R entre la rendija y la pantalla de observación (*) (plano del fotodetector) podemos pasar de la difracción de **Fresnel** a **Fraunhofer**.

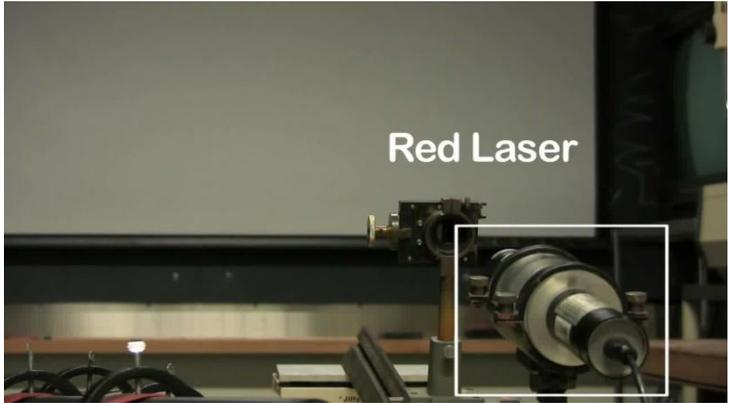
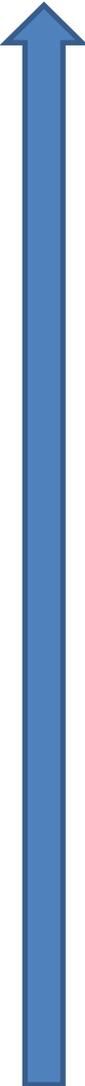
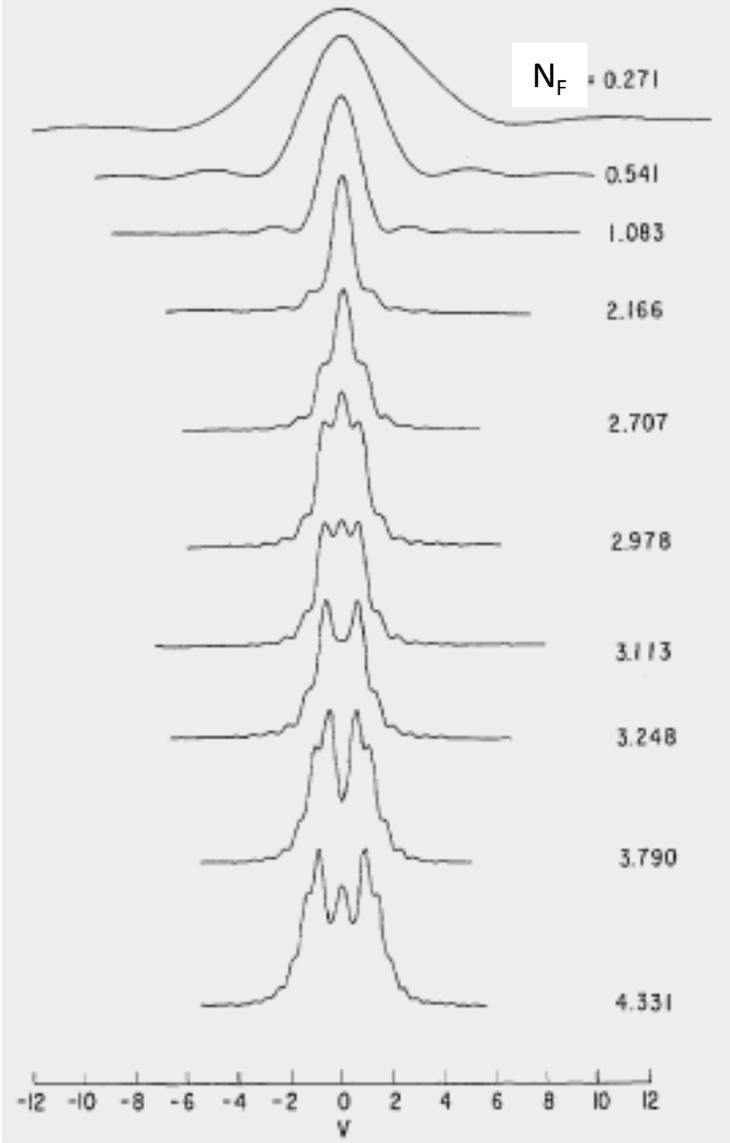
$$N_F = D^2/R\lambda \quad \text{Número de Fresnel}$$

- **Difracción de Fraunhofer** $N_F \ll 1$
- **Difracción de Fresnel** $N_F \geq 1$

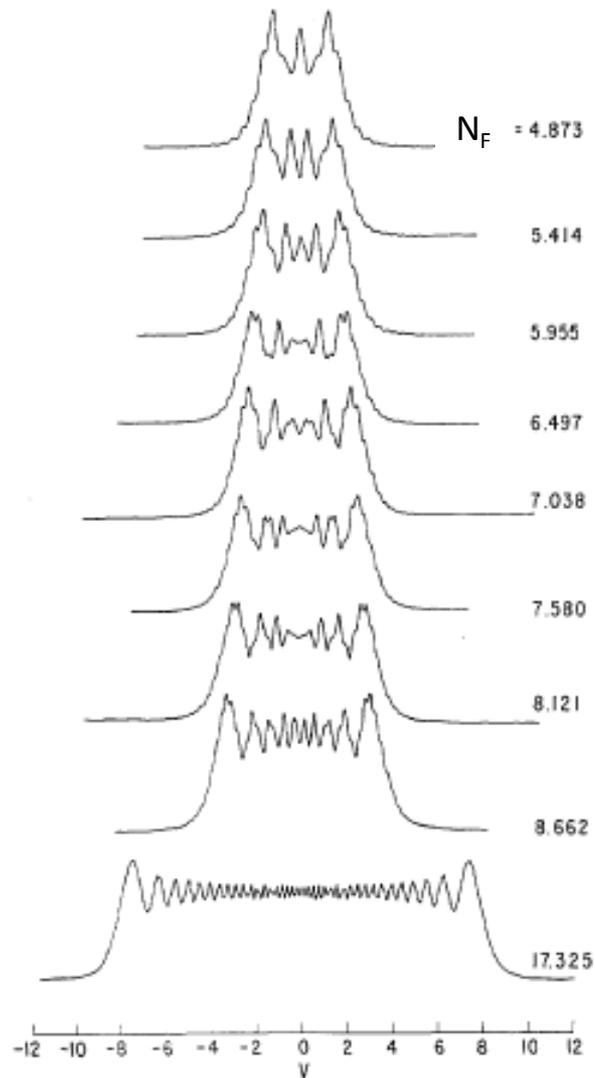
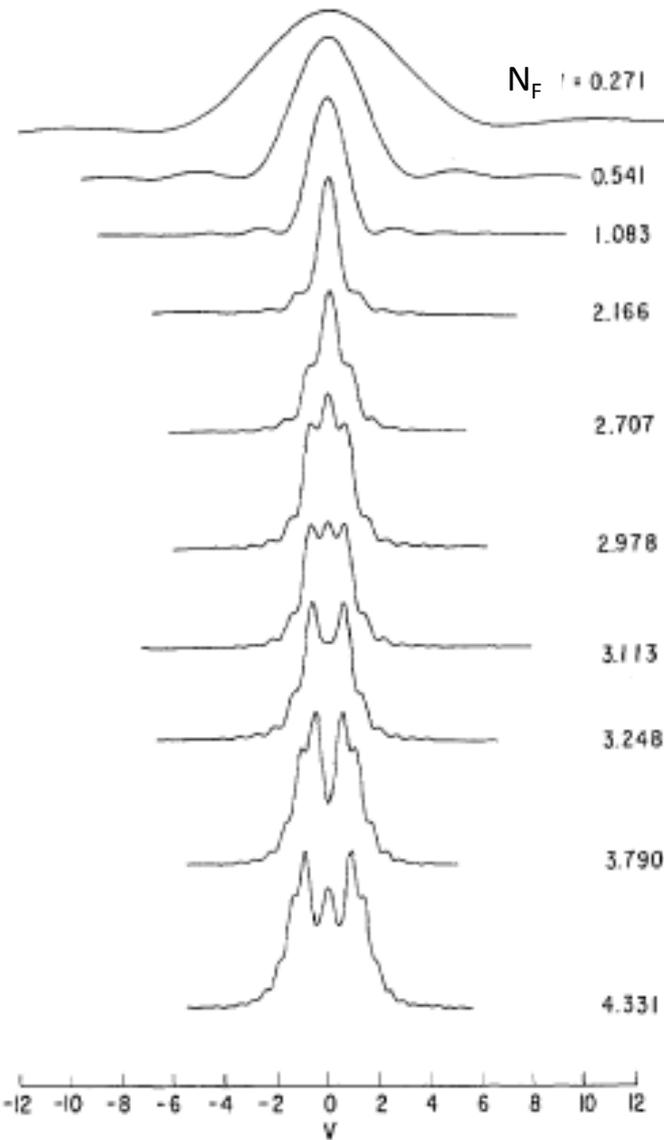
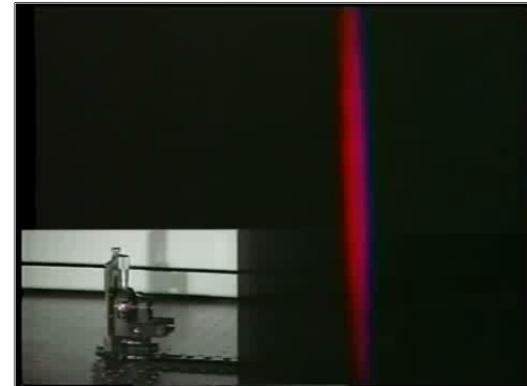
1. Buscar un ancho de rendija y obtener el perfil de intensidades para difracción de Fraunhofer.
2. Estimar N_F .
3. Desplazar el detector a la mitad de la distancia original entre rendija detector.
4. Estimar N_F . Verificar si se sigue cumpliendo condiciones de campo lejano, midiendo el perfil de difracción.

(*) ¿Cómo cambiaría la disposición experimental ?

Difracción de Fraunhofer



Difracción de Fresnel



Presentación de Informe

- Resumen
- Breve introducción teórica
- Montaje de la experiencia (equipamiento)
- Mediciones de diagrama de difracción de la rendija
 - Campo lejano.
 - Campo cercano.
- Discusión . Ajustes al modelo , obtención del ancho de ranura, cálculo de errores.
- Conclusiones, propuestas
- Bibliografía

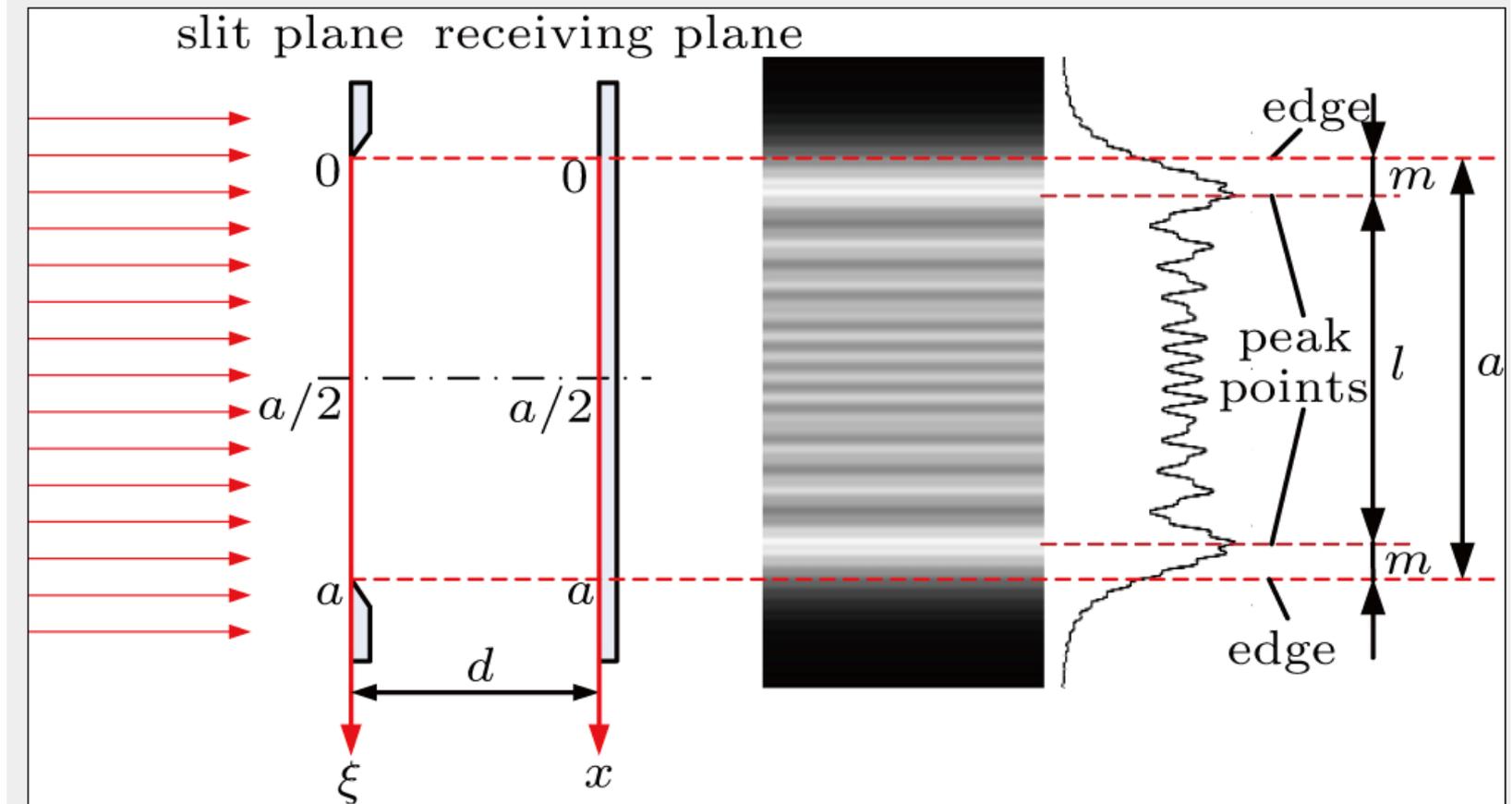
Bibliografia

Optics, E.Hecht, Adison Wesley, 4th.Editio, Sn Francisco (2002).

Optic Physics,A. Lipson, G.S.Lipson, H.Lipson, Cambridge University Press, (2010).

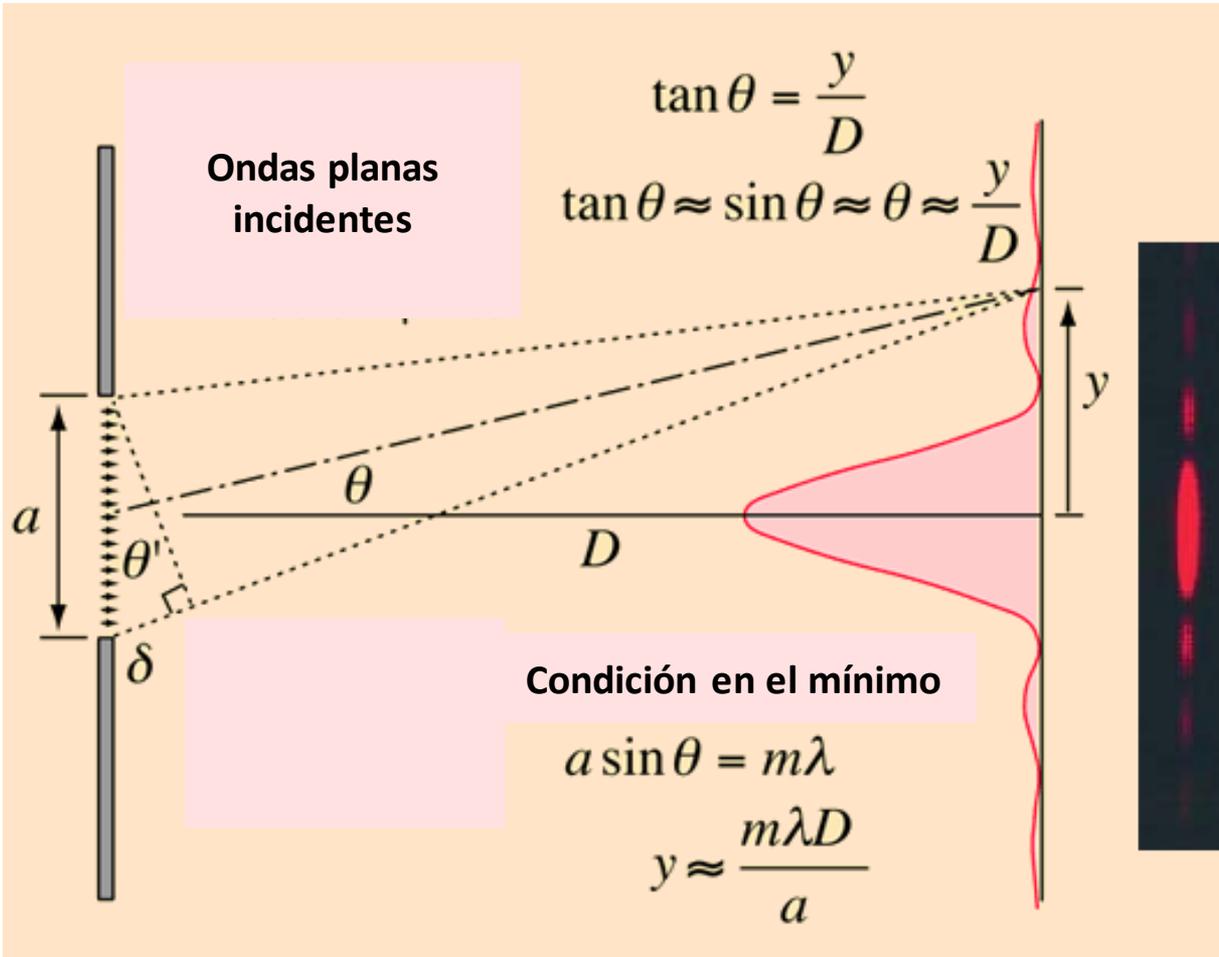
Berkeley Physics Course: Waves, F. S. Crawford, Jr, McGraw-Hill, (1971).

F. S.Harris JR., M.S.Tavenner y R.L. Mitchell, ***Single-Slit Fresnel Diffraction Patterns: Comparison of Experimental and Theoretical Results***, *Journal of the Optical Soc. America* 59 (1969) 29



Difracción de Fresnel

Difracción de Fraunhofer



Difracción de rendija

