

FIGURA 10.9 Fuente lineal coherente.

darias del principio de Huygens-Fresnel para una rendija larga cuyo ancho es mucho menor que λ , iluminada por ondas planas). Cada punto emite una ondita esférica que escribimos como

$$E = \left(\frac{\mathcal{E}_0}{r} \right) \text{sen}(\omega t - kr)$$

indicando explícitamente la dependencia de la amplitud con el inverso de r . La cantidad \mathcal{E}_0 se denomina **eficacia de la fuente**. La situación presente es diferente de aquélla representada en la figura 10.7, porque ahora las fuentes son muy débiles, su número, N , es desmesuradamente grande mientras que la separación entre ellas es sumamente pequeña. Un segmento diminuto pero finito Δy_i del conjunto contendrá $\Delta y_i(N/D)$ fuentes, donde D es la longitud total del conjunto. Supongamos entonces que el conjunto esté dividido en M de tales segmentos (es decir, i va de 1 a M). La contribución del segmento i a la intensidad del campo eléctrico en P es, por consiguiente,

$$E_i = \left(\frac{\mathcal{E}_0}{r_i} \right) \text{sen}(\omega t - kr_i) \left(\frac{N \Delta y_i}{D} \right)$$

siempre que Δy_i sea tan pequeña que la diferencia relativa de fase de los osciladores en su interior sea despreciable ($r_i = \text{constante}$) y sus campos se sumen constructivamente. Podemos hacer de manera que el conjunto se transforme en una fuente lineal continua (coherente) dejando que N se acerque al infinito. Esta descripción, además de ser bastante realista en

una escala macroscópica, permite el uso del cálculo infinitesimal para geometrías más complicadas. Ciertamente, al mismo tiempo que N tiende a infinito, las eficacias de fuente de los osciladores individuales tienen que disminuir hasta casi cero si la salida total debe conservarse finita. Podemos, por lo tanto, definir una constante \mathcal{E}_L como la *eficacia de fuente por unidad de longitud* de la composición, es decir,

$$\mathcal{E}_L \equiv \frac{1}{D} \lim_{N \rightarrow \infty} (\mathcal{E}_0 N) \quad (10.8)$$

El campo neto en P de todos los segmentos M es

$$E = \sum_{i=1}^M \frac{\mathcal{E}_L}{r_i} \text{sen}(\omega t - kr_i) \Delta y_i$$

Para una fuente lineal continua, Δy_i tiene que ser infinitesimal ($M \rightarrow \infty$), y la suma se transforma entonces en una integral definida

$$E = \mathcal{E}_L \int_{-D/2}^{+D/2} \frac{\text{sen}(\omega t - kr)}{r} dy \quad (10.9)$$

donde $r = r(y)$. La aproximación utilizada para evaluar la ecuación (10.9) debe depender de la posición de P con respecto al conjunto, marcando así la distinción entre la difracción de Fraunhofer y la de Fresnel. La fuente lineal óptica coherente no existe como entidad física, pero haremos buen uso de la misma como dispositivo matemático.

10.2 DIFRACCIÓN DE FRAUNHOFER

10.2.1 La rendija única

Volvamos a la figura 10.9 donde ahora el punto de observación está muy distante de la fuente lineal coherente y $R \gg D$. Bajo estas circunstancias $r(y)$ nunca se desvía sensiblemente de su valor medio R , de tal manera que la cantidad (\mathcal{E}_L/R) en P es esencialmente constante para todos los elementos dy . De la ecuación (10.9) se deduce que el campo en P , debido al segmento diferencial dy de la fuente, es

$$dE = \frac{\mathcal{E}_L}{R} \text{sen}(\omega t - kr) dy \quad (10.10)$$

donde $(\mathcal{E}_L/R) dy$ es la amplitud de la onda. Obsérvese que la fase es mucho más sensible a las variaciones en $r(y)$ que la

amplitud, así que tendremos que ser más cuidadosos al introducir aproximaciones en ella. Podemos desarrollar $r(y)$ exactamente de la misma manera que se hizo en el Problema (9.15), para que sea una función explícita de y , por lo tanto

$$r = R - y \operatorname{sen} \theta + (y^2/2R) \cos^2 \theta + \dots \quad (10.11)$$

donde θ se mide desde el plano xz . El tercer término puede ignorarse siempre que su contribución a la fase sea despreciable aun cuando $y = \pm D/2$; es decir, $(\pi D^2/4\lambda R) \cos^2 \theta$ tiene que ser despreciable. Esto será cierto para todos los valores de θ cuando R sea oportunamente grande. Ahora tenemos la **condición de Fraunhofer** donde la distancia r es lineal en y ; la distancia hasta el punto de observación y , por lo tanto la fase, pueden escribirse como función lineal de las variables de la abertura. Llevando a cabo una sustitución en la ecuación (10.10) e integrándola, llegamos a

$$E = \frac{\mathcal{E}_L}{R} \int_{-D/2}^{+D/2} \operatorname{sen} [\omega t - k(R - y \operatorname{sen} \theta)] dy \quad (10.12)$$

y finalmente

$$E = \frac{\mathcal{E}_L D}{R} \frac{\operatorname{sen}[(kD/2) \operatorname{sen} \theta]}{(kD/2) \operatorname{sen} \theta} \operatorname{sen}(\omega t - kR) \quad (10.13)$$

Para simplificar las cosas, pongamos que

$$\beta \equiv (kD/2) \operatorname{sen} \theta \quad (10.14)$$

de tal modo que

$$E = \frac{\mathcal{E}_L D}{R} \left(\frac{\operatorname{sen} \beta}{\beta} \right) \operatorname{sen}(\omega t - kR) \quad (10.15)$$

La cantidad que puede medirse rápidamente es la irradiancia (olvidando las constantes) $I(\theta) = \langle E^2 \rangle_T$ o

$$I(\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{E}_L D}{R} \right)^2 \left(\frac{\operatorname{sen} \beta}{\beta} \right)^2 \quad (10.16)$$

donde $\langle \operatorname{sen}^2(\omega t - kR) \rangle_T = \frac{1}{2}$. Cuando $\theta = 0$, $\operatorname{sen} \beta/\beta = 1$ y $I(\theta) = I(0)$, lo que corresponde al *máximo principal*. La irradiancia procedente de una fuente lineal coherente idealizada en la aproximación de Fraunhofer es entonces

$$I(\theta) = I(0) \left(\frac{\operatorname{sen} \beta}{\beta} \right)^2 \quad (10.17)$$

o, usando la *función sinc* (véase Tabla I del Apéndice),

$$I(\theta) = I(0) \operatorname{sinc}^2 \beta$$

Hay simetría alrededor del eje y , siendo esta expresión válida para la medida de θ en cualquier plano que contenga a ese eje. Obsérvese que ya que $\beta = (\pi D/\lambda) \operatorname{sen} \theta$, when $D \gg \lambda$, la irradiancia disminuye muy rápido conforme θ se desvía de cero. Esto se debe al hecho de que β se hace muy grande para valores grandes de la longitud D (alrededor de 1 cm cuando se usa luz). La fase de la fuente lineal equivale, por medio de la ecuación (10.15), a la de una fuente puntual localizada en el centro del conjunto, a una distancia R de P . Finalmente, una fuente lineal coherente relativamente larga ($D \gg \lambda$) puede visualizarse como un emisor puntual simple que radia fundamentalmente hacia delante, $\theta = 0$; dicho de otra forma, su emisión se asemeja a una onda circular en el plano xz . Por el contrario, obsérvese que si $\lambda \gg D$, β es pequeña, $\operatorname{sen} \beta \approx \beta$, e $I(\theta) \approx I(0)$. La irradiancia es entonces constante para todo θ y la fuente lineal se asemeja a una fuente puntual que emite ondas esféricas.

Podemos ahora pasar a considerar el problema de la difracción de Fraunhofer por una rendija o un agujero rectangular estrecho alargado (figura 10.10). El ancho de una abertura de este tipo puede ser de varios cientos de λ y su longitud medir unos pocos centímetros. El procedimiento usual a seguir en el análisis es dividir la rendija en una serie de tiras diferenciales largas (dz por ℓ), paralelas al eje y , como se muestra en la figura 10.11. Inmediatamente reconocemos, sin embargo, que cada una de tales tiras es una fuente lineal coherente larga, pudiendo por consiguiente reemplazarse por un punto emisor en el eje z . En efecto, cada uno de dichos emisores radia una onda circular en ($y = 0$ o) el plano xz . Esto es efectivamente lógico ya que la rendija es larga y los frentes de onda emergentes no están prácticamente obstruidos en la dirección de la rendija. Por consiguiente, habrá muy poca difracción paralela a los bordes de la rendija. El problema, como tal, se ha reducido al de encontrar el campo en el plano xz debido a un número infinito de fuentes puntuales que se extienden a través del ancho de la rendija a lo largo del eje z . Sólo necesitamos evaluar la integral de la contribución dE de cada elemento dz en la aproximación de Fraunhofer pero, una vez más, esto equivale a una fuente lineal coherente de tal manera que la solución completa para la rendija es, como hemos visto,

$$I(\theta) = I(0) \left(\frac{\operatorname{sen} \beta}{\beta} \right)^2 \quad [10.17]$$

con tal que

$$\beta = (kb/2) \operatorname{sen} \theta \quad (10.18)$$

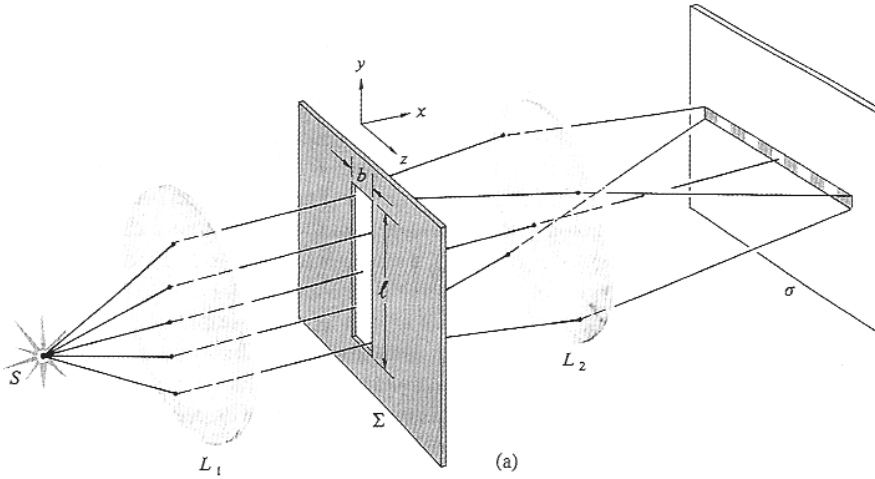
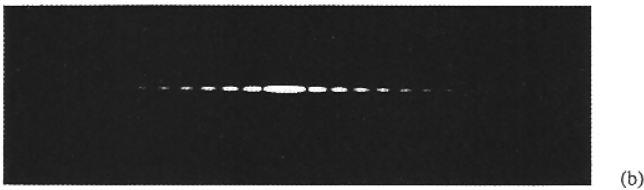


FIGURA 10.10 (a) Difracción de Fraunhofer producida por una sola rendija. (b) Distribución de difracción de una sola rendija vertical en iluminación con fuente puntual.



y θ se mida desde el plano xy (véase problema 10.3). Obsérvese que aquí la fuente lineal es corta, $D = b$, β no es grande y aunque la irradiancia disminuya rápidamente se observarán unos máximos subsidiarios de orden superior. Los extremos de $I(\theta)$ se dan para valores de β que hacen que $dI/d\beta$ sea cero, esto es

$$\frac{dI}{d\beta} = I(0) \frac{2 \operatorname{sen} \beta (\beta \cos \beta - \operatorname{sen} \beta)}{\beta^3} = 0 \quad (10.19)$$

La irradiancia tiene mínimos iguales a cero cuando $\operatorname{sen} \beta = 0$, de donde

$$\beta = \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots \quad (10.20)$$

De la ecuación (10.19) se deduce también que cuando

$$\begin{aligned} \beta \cos \beta - \operatorname{sen} \beta &= 0 \\ \tan \beta &= \beta \end{aligned} \quad (10.21)$$

Las soluciones de esta ecuación trascendente pueden obtenerse gráficamente como se muestra en la figura 10.12. Los pun-

tos de intersección de las curvas $f_1(\beta) = \tan \beta$ con la línea recta $f_2(\beta) = \beta$ son comunes a ambas, satisfaciendo así la ecuación (10.21). Solamente uno de tales extremos existe entre mínimos adyacentes [ecuación (10.20)] de tal manera que $I(\theta)$ debe tener máximos subsidiarios de estos valores de β (es decir, $\pm 1,4303\pi, \pm 2,4590\pi, \pm 3,4707\pi, \dots$).

Hay una manera especialmente sencilla de entender lo que está pasando aquí, ayudándose con la figura 10.13. Supongamos que todos los puntos de la abertura emitan rayos en cualquier dirección en el plano xz . La luz que sigue propagándose directamente hacia adelante en la figura 10.13a es el rayo no difractado, todos los rayos llegan a la pantalla de visualización en fase, formando un punto central luminoso. Si la pantalla no está verdaderamente en el infinito, los rayos que convergen hacia ella no son exactamente paralelos pero si ella está en el infinito o mejor aún, colocando una lente, los rayos equivalen a los de la figura. La figura 10.13b muestra el grupo específico de rayos que salen con un ángulo θ_1 donde la diferencia de longitud de camino entre los rayos desde la parte superior a la inferior, $b \operatorname{sen} \theta_1$, se hace equivaler a una longitud de onda. Un rayo desde la mitad de la rendija se retrasará en $\frac{1}{2}\lambda$ detrás