Laboratorio 2

Ondas estacionarias en cuerdas

Ondas estacionarias

En el caso de una onda transversal en una cuerda que oscila en un plano, se puede describir como una onda unidimensional. Las ondas que se propagan en la dirección positiva del eje x definido a lo largo de la cuerda, se escriben como

$$y = A\cos(kx - \omega t + \varphi_0) \tag{1}$$

mientras que la que se propaga en el sentido negativo del eje x

$$y = A\cos(-kx - \omega t + \varphi_0) \tag{2}$$

siendo A la amplitud, k el número de onda, ω la frecuencia angular y φ_0 la fase inicial. El sentido de propagación puede comprobarse de la siguiente manera. En el primer caso (hacia $+x$) la fase que pasa por un punto x_1 en el instante t_1 pasará por otro punto x_2 en otro instante t_2 relacionados de la siguiente manera

$$kx_1 - \omega t_1 + \varphi_0 = kx_2 - \omega t_2 + \varphi_0$$

o sea

$$k(x_2 - x_1) = \omega(t_2 - t_1)$$

y usando $c_s = \frac{\omega}{k}$ se llega a

$$x_2 - x_1 = c_s(t_2 - t_1)$$

de donde sale que si $x_2 > x_1$ entonces $t_2 > t_1$ lo que dice que la perturbación llega primero a x_1 y después a x_2. Lo opuesto ocurre en el caso de las ondas que se propagan en el sentido opuesto, ya que se tiene

$$x_2 - x_1 = -c_s(t_2 - t_1)$$

es decir, pasa primero por x_2 y luego por x_1.

En general, se asume que la superposición de varias ondas produce una onda que es la suma de esas ondas. En ondas materiales hay un límite a este principio de superposición relacionado con las propiedades mecánicas del medio en el cual se propagan. Por ejemplo, el material puede romperse o deformarse cuando la amplitud de las ondas superan un cierto umbral.

Supongamos que en una cuerda hay ondas viajando en los dos sentidos. Para una dada frecuencia, y asumiendo que las dos amplitudes sean iguales, la perturbación total es

$$y = A(\cos(kx - \omega t + \varphi_+) + \cos(-kx - \omega t + \varphi_-)) \tag{3}$$

donde φ_+ es la fase inicial de la onda que se propaga hacia $+x$ y φ_- la de la onda que va en sentido contrario. Se definen φ y δ tales que

$$\varphi_+ = \varphi + \delta$$

$$\varphi_- = \varphi - \delta$$

con lo cual la perturbación se escribe como

$$y = A(\cos(kx + \delta - \omega t + \varphi) + \cos(-kx - \delta - \omega t + \varphi)) \tag{4}$$

o sea de la forma

$$y = A(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \tag{5}$$

siendo

$$\alpha = -\omega t + \varphi$$

$$\beta = kx + \delta$$

Usando que

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

se llega a

$$y = 2A\cos(kx + \delta)\cos(-\omega t + \varphi) \tag{6}$$

El primer coseno es una modulación espacial que indica la amplitud máxima en cada punto del espacio, mientras que el segundo es una variación temporal global. A la onda resultante de la suma de 2 ondas de igual frecuencia pero distinto sentido de propagación, representada en (6), se la denomina onda estacionaria ya que tiene nodos (puntos de amplitud 0) fijos en el espacio, que corresponden a las posiciones que cumplen

$$\cos(kx + \delta) = 0$$

En la planilla Excel adjunta se simula las ondas estacionarias, ver Apéndice.

Cuerda con extremos fijos

Supongamos que la cuerda está atada en dos puntos: $x = 0$ y $x = L$ esto implica que la amplitud en dichos puntos debe ser 0 en cualquier instante de tiempo, lo que significa que de acuerdo a (6)

$$\cos\delta = 0$$

$$\cos(kL + \delta) = 0$$

Esta última puede escribirse como

$$\cos(kL + \delta) = \cos(kL)\cos\delta - \sin(kL)\sin\delta$$

pero usando la primera (que también dice que $\sin\delta \neq 0$) se debe cumplir

$$\sin(kL) = 0$$

o sea que sólo hay ciertos números de onda que pueden aparecer en una cuerda cuyos extremos están sujetos y no pueden moverse. Estos números de onda deben cumplir

$$k_m L = m\pi$$

donde m es un número entero, y usando $k_m = 2\pi/\lambda_m$ se tiene

$$L = m\frac{\lambda_m}{2} \tag{7}$$

es decir que en L debe haber un número entero de medias longitudes de onda, ver Fig. 1.

El hecho de que sólo haya ciertas longitudes de onda que estén presentes en una cuerda significa también que las frecuencias, f, son limitadas ya que

$$\lambda f = c_s$$

siendo c_s la velocidad de propagación de las ondas mecánicas en la cuerda, por lo tanto, las frecuencias permitidas son

$$f_m = \frac{c_s}{\lambda_m} = m\frac{c_s}{2L}$$

La frecuencia cuando $m = 1$ se llama frecuencia fundamental

$$f_1 = \frac{c_s}{2L} \tag{8}$$

y las demás, llamadas armónicos, son múltiplos enteros de ésta

$$f_m = mf_1 \tag{9}$$

Ver planilla Excel adjunta donde se simula las ondas estacionarias, ver Apéndice.

Velocidad de propagación

Como se conoce la longitud de la cuerda, L, midiendo la frecuencia fundamental se puede obtener la velocidad de propagación en la cuerda a partir de (8).

Por otro lado, la velocidad de propagación de una onda en una cuerda depende de la tensión, T, y de la densidad de masa por unidad de longitud, μ, de la cuerda

$$c_s = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \tag{10}$$

por lo tanto, las frecuencias de los modos de vibración de una cuerda de longitud fija con sus extremos atados, dependerá de la tensión a la que esté sometida y de la densidad lineal de masa de la cuerda.

Una manera de ver la relación de la velocidad de propagación con la densidad de masa es atando por un extremo 2 cuerdas de distinta densidad de masa y los otros extremos se fijan como en el caso de una sola cuerda, como se muestra en la Fig. 2. Ajustando adecuadamente las longitudes de las cuerdas se encuentra que, a una dada frecuencia, hay un nodo en el punto de unión y media longitud de onda a cada lado del nodo (Fig. 2).

Sea L_1 y L_2 las longitudes de las cuerdas, de acuerdo a (8) se cumple

$$f = \frac{c_{s1}}{2L_1}$$

$$f = \frac{c_{s2}}{2L_2}$$

siendo f la frecuencia de oscilación que es la misma para las 2 cuerdas, por lo tanto

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{c_{s1}}{c_{s2}}$$

y, teniendo en cuenta (10), se llega a

$$\frac{L_1}{L_2} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \qquad (11)$$

Se propone verificar esta relación en el laboratorio.

Suma de ondas

Hasta ahora se vio que en una cuerda de extremos fijos sometida a una vibración forzada muestra la existencia de frecuencias discretas de oscilación (modos normales) entonces, la pregunta es qué pasa con las otras frecuencias que pueden ser forzadas pero no se propagan.

En el caso de una onda que se propaga en un sentido (que llamaremos "progresiva") y llega a un extremo fijo, se producirá un rebote, es decir, se generará una onda que se propaga en el sentido opuesto (que llamaremos "regresiva") de tal manera que la suma de la onda progresiva con la regresiva en ese punto fijo es siempre 0 en todo instante de tiempo. Y así también, cuando la onda regresiva llega al otro extremo, volverá a producirse un rebote generando una nueva onda progresiva que se superpone con la progresiva original.

En general, debido al tiempo de viaje, la nueva onda progresiva no estará en fase con la original. Y así, con los sucesivos rebotes, se generará una secuencia de ondas con una diferencia de fase, $\Delta\varphi$, fija e igual entre dos ondas sucesivas, es decir, se tiene el caso de varias ondas de igual amplitud pero distinta fase, de la forma

$$y_i = A\cos(kx - \omega t + \varphi_0 + i\Delta\varphi)$$

de manera que la perturbación total progresiva será la suma de todas ellas

$$y_{total} = A\sum \cos(kx - \omega t + \varphi_0 + i\Delta\varphi)$$

En un dado x, t cada una de estas ondas tiene una fase distinta, llamando

$$\varphi_{x,t} = kx - \omega t + \varphi_0$$

queda

$$y_i = A\cos(\varphi_{x,t} + i\Delta\varphi)$$

En el caso particular que la diferencia de fase sea

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{N}$$

donde N es entero, y usando que

$$\sum_{i=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N} i\right) = 0 \qquad (12)$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} \sin\left(\frac{2\pi}{N} i\right) = 0 \qquad (13)$$

se llega a

$$y_{total} = 0$$

en cualquier punto para todo t.

Pensando la fase como un vector, en la Fig. 3 se muestra la interpretación de estas igualdades. En general, aunque las fases no estén equiespaciadas en 2π, la suma de ondas con desfasaje constante tiende a 0 con una suficiente cantidad de ondas. También tiende a 0 en el caso que las fases de ondas sucesivas sean aleatorias. La única manera que la suma de numerosas ondas no sea 0 es que la diferencia de fase entre ondas consecutivas sea 0.

Esto significa, por ejemplo, que la segunda onda progresiva quede en fase con la primera y esto se logra sólo para algunas relaciones entre la longitud de onda y el largo de la cuerda, que son, precisamente las condiciones bajo las cuales aparecen los modos normales como se ha visto más arriba. Lo mismo sucede para las ondas regresivas. Esto explica por qué cuando la frecuencia no corresponde a un modo normal, los sucesivos rebotes en los extremos hacen que la superposición de esas ondas se anulen entre sí. En la planilla Excel adjunta se puede ver el resultado de la suma de ondas, ver Apéndice.

Desarrollo de la práctica

Como se ha visto, una onda estacionaria se forma por la interferencia de dos ondas de la misma naturaleza con igual amplitud y frecuencia que avanzan en sentido opuesto a través de un medio. Una cuerda con sus extremos fijos presenta modos normales de oscilación que se caracterizan por tener nodos (puntos que no vibran, es decir, permanecen inmóviles) distribuidos uniformemente a lo largo de la cuerda.

El objetivo de la práctica es el estudio de estos modos normales y la medición de la velocidad de propagación, que luego se compara con el modelo teórico. En la Fig. 4 se muestra la configuración experimental para el estudio de ondas estacionarias en cuerdas cuyos extremos están fijos. La idea principal es medir las frecuencias del modo fundamental, (8), y sus armónicos, (9), con lo cual es posible determinar la velocidad de propagación para compararla con el modelo teórico (10).

Se trabaja con extremos fijos, lo que es equivalente a pedir que no haya desplazamiento en las posiciones $x = 0$ y $x = L$, siendo L la longitud de la cuerda. La amplitud de la oscilación para otros puntos de la cuerda depende de su posición, no así la frecuencia ni la tensión (es la misma en toda la cuerda ya que tiene masa despreciable).

La experiencia se repite para distintas cuerdas con distinta densidad lineal y distintas tensiones aplicadas para observar como varia la frecuencia de los modos normales y la velocidad de propagación en función de dichas variables.

Teniendo en cuenta que una cuerda se pone en vibración, las oscilaciones se amortiguan y se reducen gradualmente con el tiempo debido a la disipación de energía, hay que trabajar con una oscilación forzada, que se logra mediante un parlante modificado ("wave driver"), Fig. 5, ubicado convenientemente en alguna posición de la cuerda.

Procedimiento experimental

Se dispone de una cuerda sujeta en ambos extremos. Un extremo a un pie fijo sobre la superficie de trabajo y otro apoyado sobre una polea fija al borde del soporte y atado a un porta-pesas, Fig. 4. De esta manera, que mantiene ambos extremos fijos, se varia la tensión de la cuerda cambiando la masa sostenida por el porta-pesas (el peso de éste debe ser adicionado a la pesa que soporta para calcular correctamente la tensión sobre la cuerda). Apenas apoyado por debajo de la cuerda se coloca un parlante mecánico que oscila a una frecuencia y amplitud regulada. Se observa el esquema en la Fig. 4.

En primer lugar se conecta el generador de funciones al osciloscopio, para registrar la frecuencia emitida por el generador. Con el objetivo de amplificar la señal, se conecta el amplificador cuya salida alimenta a un parlante que actúa como fuerza externa a la cuerda, introduciendo pequeños desplazamientos de forma sinusoidal. El porta-pesas con distintas masas tiene como objetivo variar la tensión de la cuerda. En la Fig. 6 se observa el osciloscopio y el generador de funciones usados en esta experiencia.

A continuación se miden las frecuencias de los modos normales. Esto se logra variando la frecuencia de oscilación del parlante hasta ver progresivamente las distintas resonancias, en las cuales se podrá observar claramente el primero modo, con sólo un máximo de amplitud situado en el centro de la cuerda, como se muestra en la Fig. 7, o de otros modos, ver Fig. 8. La obtención de la frecuencia del modo fundamental es importante debido a que las frecuencias de los siguientes modos serán múltiplos de ésta, según se vio en (9).

Se miden las primeras 6 frecuencias normales, o hasta donde se puedan apreciar, para distintas tensiones en una cuerda y se repite esto para otras cuerdas de distinta densidad lineal (la densidad lineal de las cuerdas se calcula midiendo el largo de la cuerda con una cinta métrica y su peso en una balanza de precisión). Los datos de las cuerdas y las masas empleadas se guardan en una planilla o archivo.

Con los valores obtenidos se calcula la velocidad de propagación para cada juego de cuerda y tensión y se los compara con el valor del modelo teórico (10).

Resumiendo, para la obtención de datos experimentales se siguen los siguientes pasos

1. Medir la densidad lineal de la cuerda
2. Para una dada carga, obtener la frecuencia de 5 modos normales de la cuerda
3. Con la relación de dispersión, calcular la velocidad de propagación.
4. Comparar con la velocidad de propagación del modelo.
5. Repetir para 5 cargas diferentes
6. Repetir para otra cuerda con distinta densidad lineal.

En el Apéndice se describe la planilla de datos obtenidos que se usan para calcular la velocidad de propagación y su comparación con el modelo teórico. En todos los casos, discutir las incertezas en las mediciones y posibles efectos no considerados.

Apéndice

Hay dos planillas relacionadas que contienen datos experimentales y algunos ejemplos numéricos de ondas estacionarias y de superposición de ondas en general.

A) La planilla *ejemplo_cuerda.xls* contiene varias hojas:

(1) *DatosExperimentales*. Contiene valores de mediciones de modos normales en cuerdas con extremos fijos y para distintos valores de tensión. De éstas hay que obtener la velocidad de propagación y su comparación con el modelo teórico, (10).

(2) *DatosCalculo*. Contiene un conjunto de valores de densidad de masa por unidad de longitud de cuerdas y distintas masas que se cuelgan para tener distintas tensiones. Los valores resultantes de velocidad de propagación se usan para simulaciones en las 2 hojas siguientes.

(3) *Cuerda*. Se puede ver la suma de ondas "progresivas" y "regresivas" que forman ondas estacionarias en cuerdas con

extremos fijos. Se pueden encontrar los modos normales en función de la frecuencia, (8) y (9).

(4) *Suma*. Se simula la suma de ondas que se propagan en el mismo sentido y están desfasadas uniformemente, que permiten entender las relaciones (12) y (13).

(5) *Guitarra*. Como ejemplo de cuerdas con extremos fijos, se muestra las frecuencias de las 6 cuerdas de una guitarra eléctrica. Se puede calcular la tensión para cada una de ellas, y la velocidad de propagación. En la columnas L y sucesivas, hay que completar la posición de los trastes teniendo en cuenta que cada uno de ellos aumenta la frecuencia por un semitono, ver Fig. 9. El cociente en frecuencias, r, de 2 semitonos consecutivos es

$$r = 2^{1/12}$$

de manera que la relación en frecuencias entre una octava y la anterior es 2 (contiene 12 semitonos).

B) La planilla *Datos cuerda.xlsx* contiene 2 hojas

(1) *Cuerda inhomogénea*. Están los datos de la experiencia mostrada en la Fig. 2. Es decir, el caso de dos cuerdas de distinta longitud unidas entre sí y cuyos otros extremos libres están fijos. A una dada frecuencia existe un nodo en el punto de unión de las cuerdas, que permite verificar la relación (11).

(2) *Cuerda homogénea*. Corresponde a mediciones realizadas con la configuración mostrada en la clase de laboratorio, que es ligeramente diferente a la mostrada en la Fig. 4, cuyos datos están en la otra planilla. Sin embargo, el análisis es similar basado en las relaciones (7), (8) y (9).

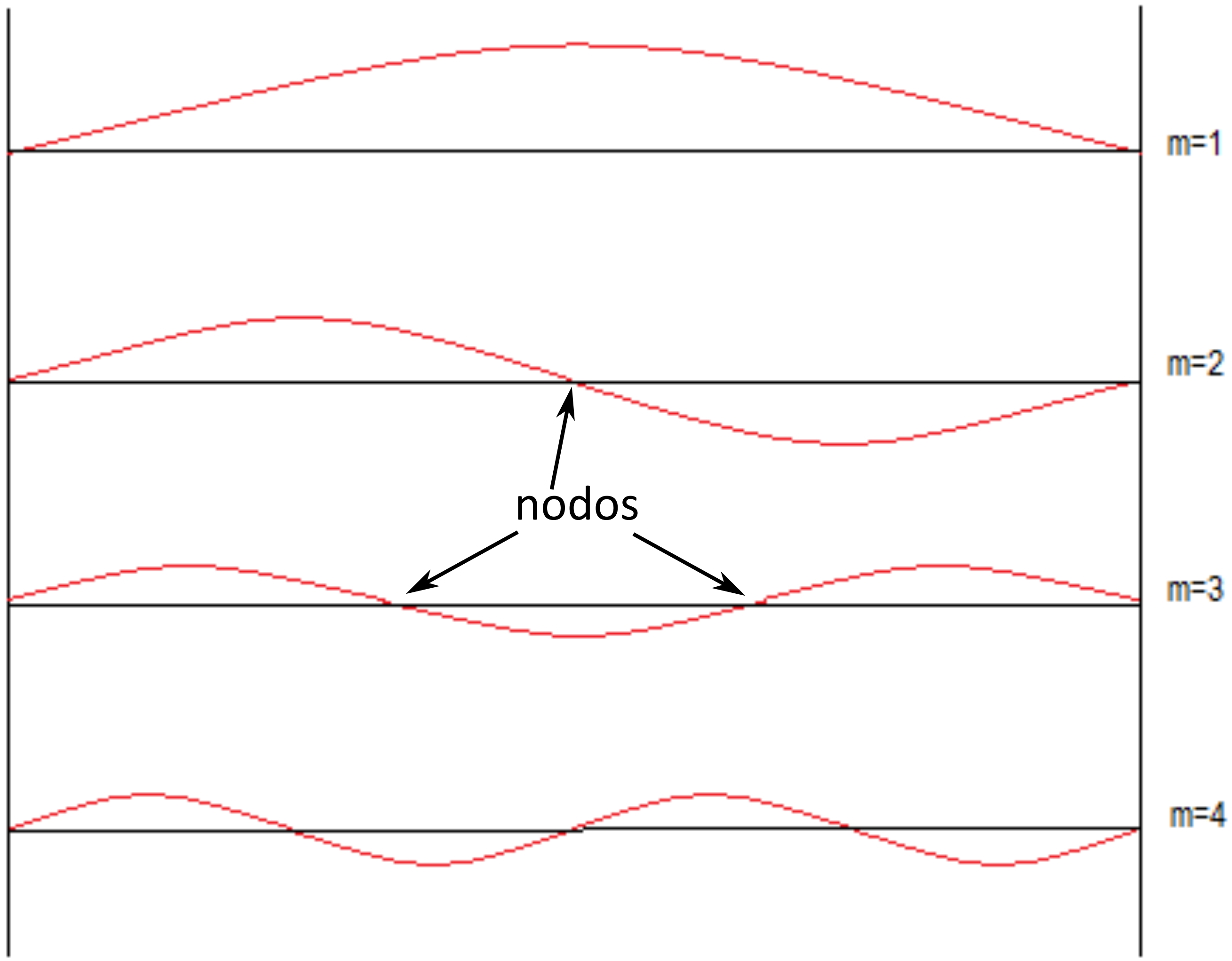

Figura 1. Esquema de los modos normales de una cuerda con los extremos fijos vibrando a distintas frecuencias. En el modo fundamental (m = 1) la longitud de onda es 2 veces la longitud de la cuerda, L. En los demás modos (denominados armónicos) la longitud de onda es $\lambda = 2mL$ siendo m un número entero, de manera que las frecuencias son múltiplos enteros de la frecuencia del modo fundamental.

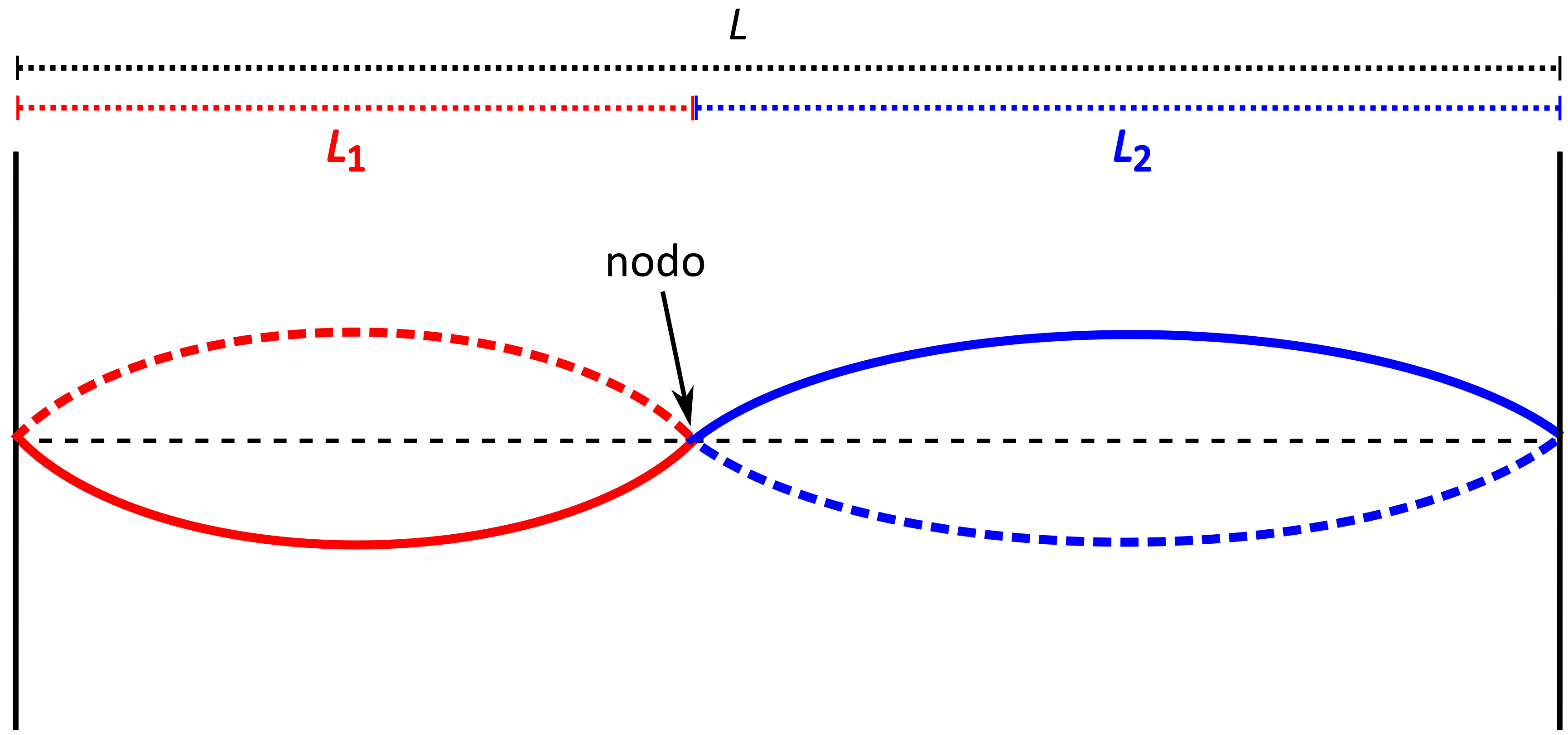

Figura 2. Dos cuerdas de distinta longitud y densidad lineal de masa (representadas en rojo y azul) están unidas entre si, y los otros extremos se mantienen fijos. Se encuentra que a una dada frecuencia existe un modo normal tal que el punto de unión es un nodo y hay media longitud a cada lado de éste. La relación entre las longitudes, L_1 y L_2, es función de la relación de la densidad lineal de masa de las cuerdas (ver texto).

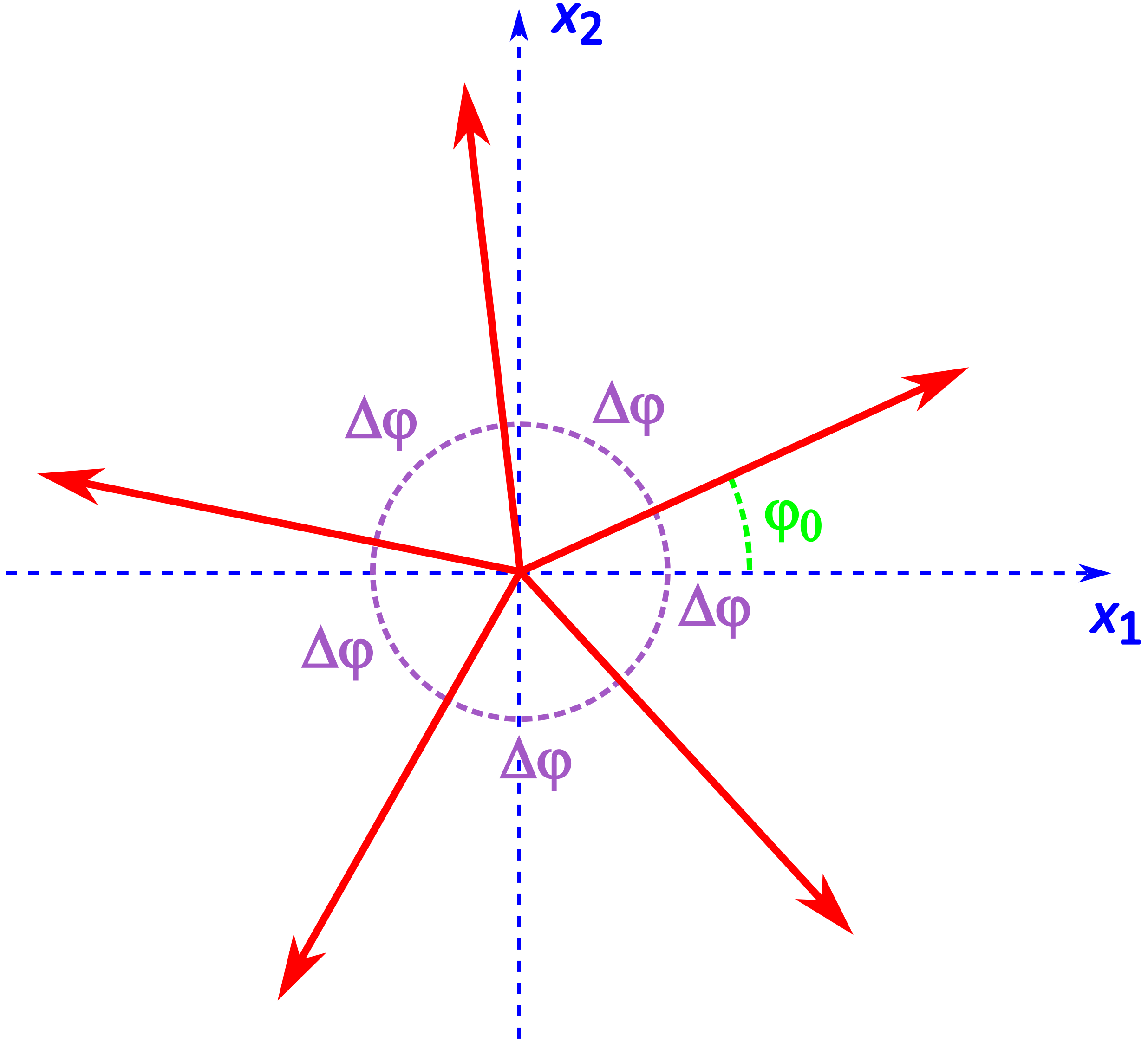

Figura 3. Asociando la fase con el ángulo de un vector respecto a un eje, la suma de ondas con igual amplitud puede interpretarse como la suma de los vectores correspondientes. Si las fases están equiespaciadas en 2π (o en general un múltiplo entero de éste), entonces la suma de los vectores es 0 al igual que la suma de los cosenos y senos de las fases. Aquí se muestra el caso $\Delta\varphi = 2\pi/5$. Notar que este resultado no depende del ángulo (fase) φ_0 respecto al eje x_1.

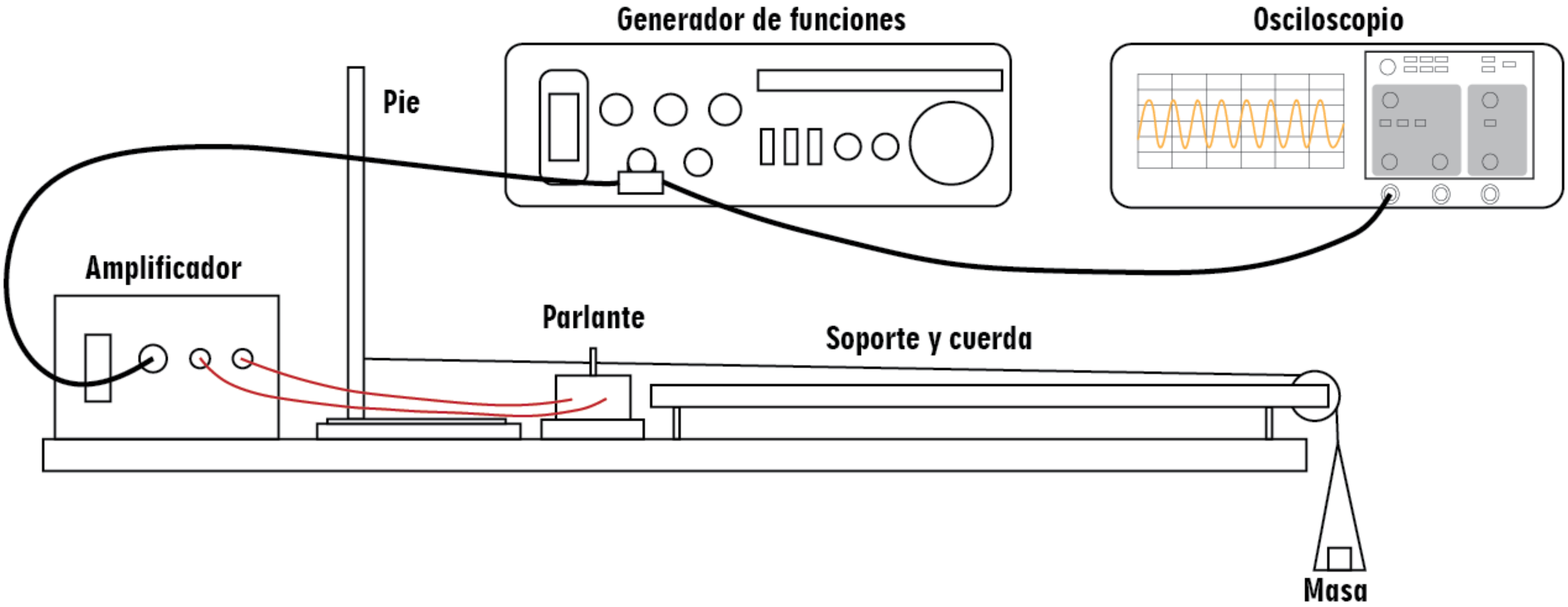

Figura 4. Esquema del experimento para el estudio de los modos normales de vibración de una cuerda con los extremos fijos. La señal sinusoidal producida por un generador de señales se amplifica y se alimenta al "wave driver" (básicamente un parlante con un vástago en el eje) cuyo vástago se ubica inmediatamente por debajo de la cuerda, de manera que ésta no se apoye en el vástago, pero cuyo movimiento vertical la pone en vibración. Mediante masas adecuadas ubicadas en una bandeja, se puede variar la tensión de la cuerda. El experimento se repite para distintos juegos de masas y cuerdas.

Figura 5. Wave driver para forzar el movimiento de la cuerda. Es básicamente un parlante que posee un vástago en el eje, que al oscilar a la frecuencia del amplificador que lo alimenta, produce un movimiento en la cuerda de la misma frecuencia.

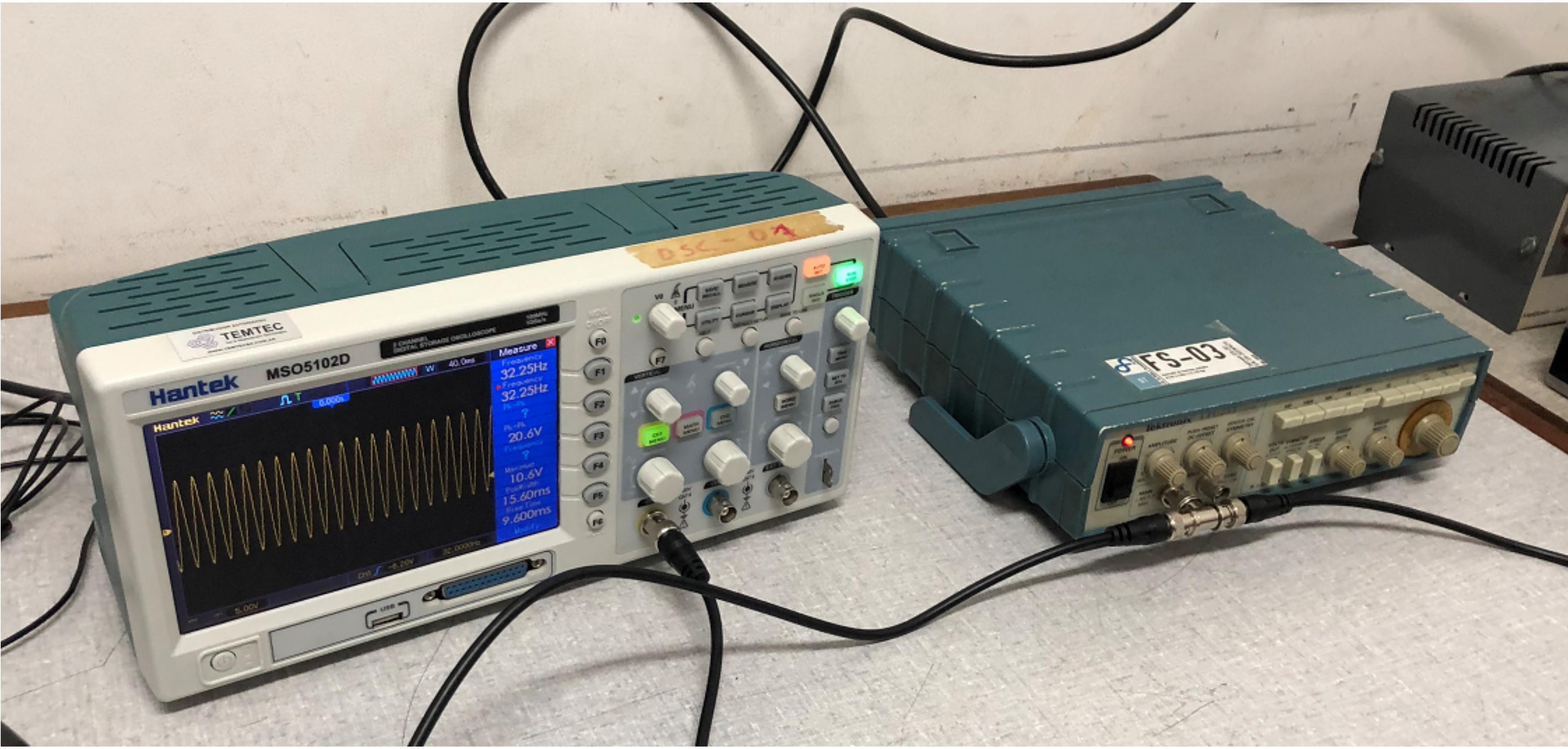

Figura 6. Generador de señales y osciloscopio utilizados para las mediciones de los modos normales en cuerdas.

Figura 7. Fotografía con el detalle de una cuerda vibrando en el modo fundamental, ya que en el largo de la cuerda entra sólo media longitud de onda. Hacia el extremo más lejano, se observa el "wave driver" y su vástago blanco. En primer plano un juego de pesas que se usa para variar la tensión de la cuerda.

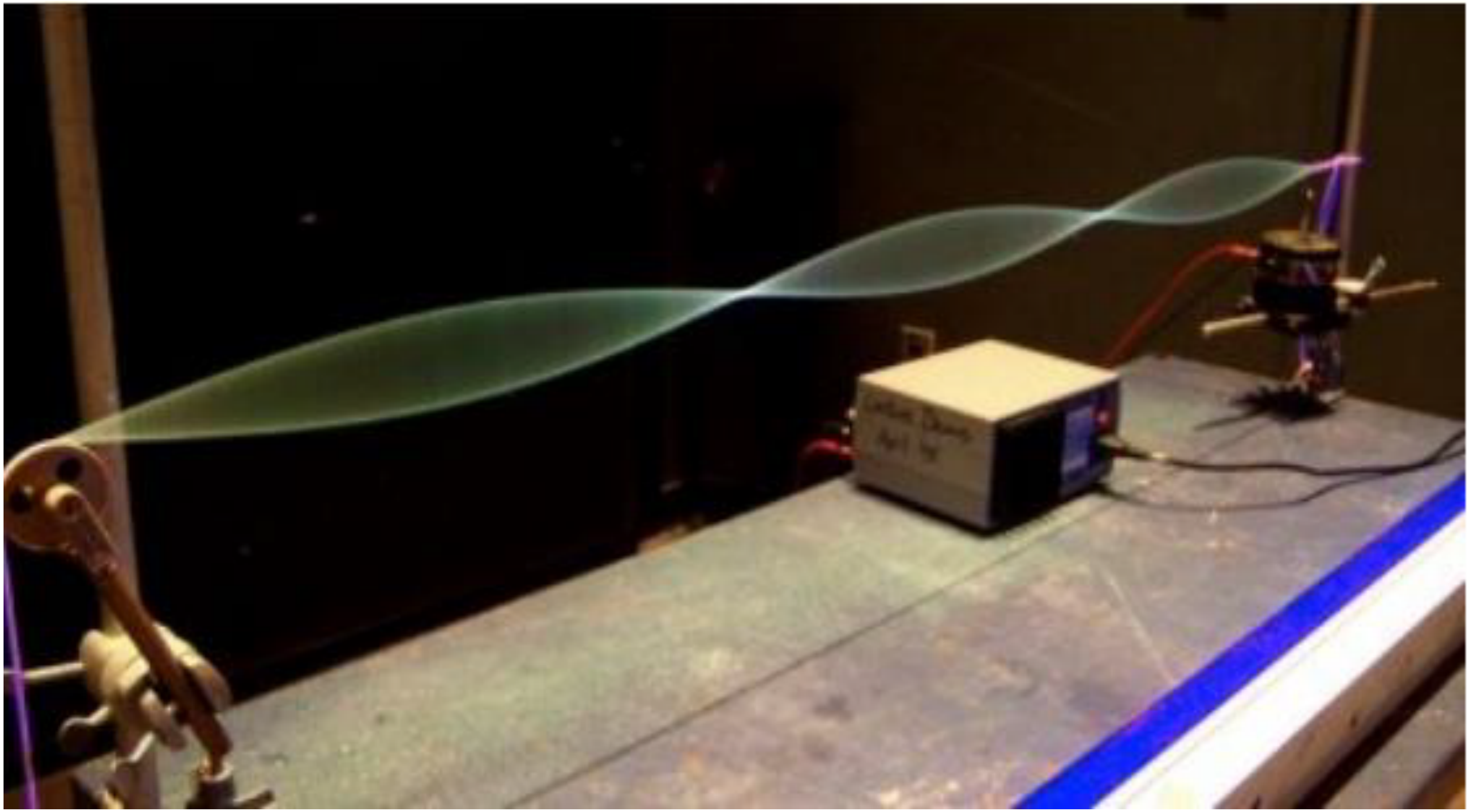

Figura 8. Fotografía con el detalle de una cuerda vibrando en el segundo armónico, ya que en el largo de la cuerda entran 3 medias longitudes de onda. Hacia el extremo más lejano, se observa el "wave driver" y en primer plano la polea de la cual cuelgan las pesas.

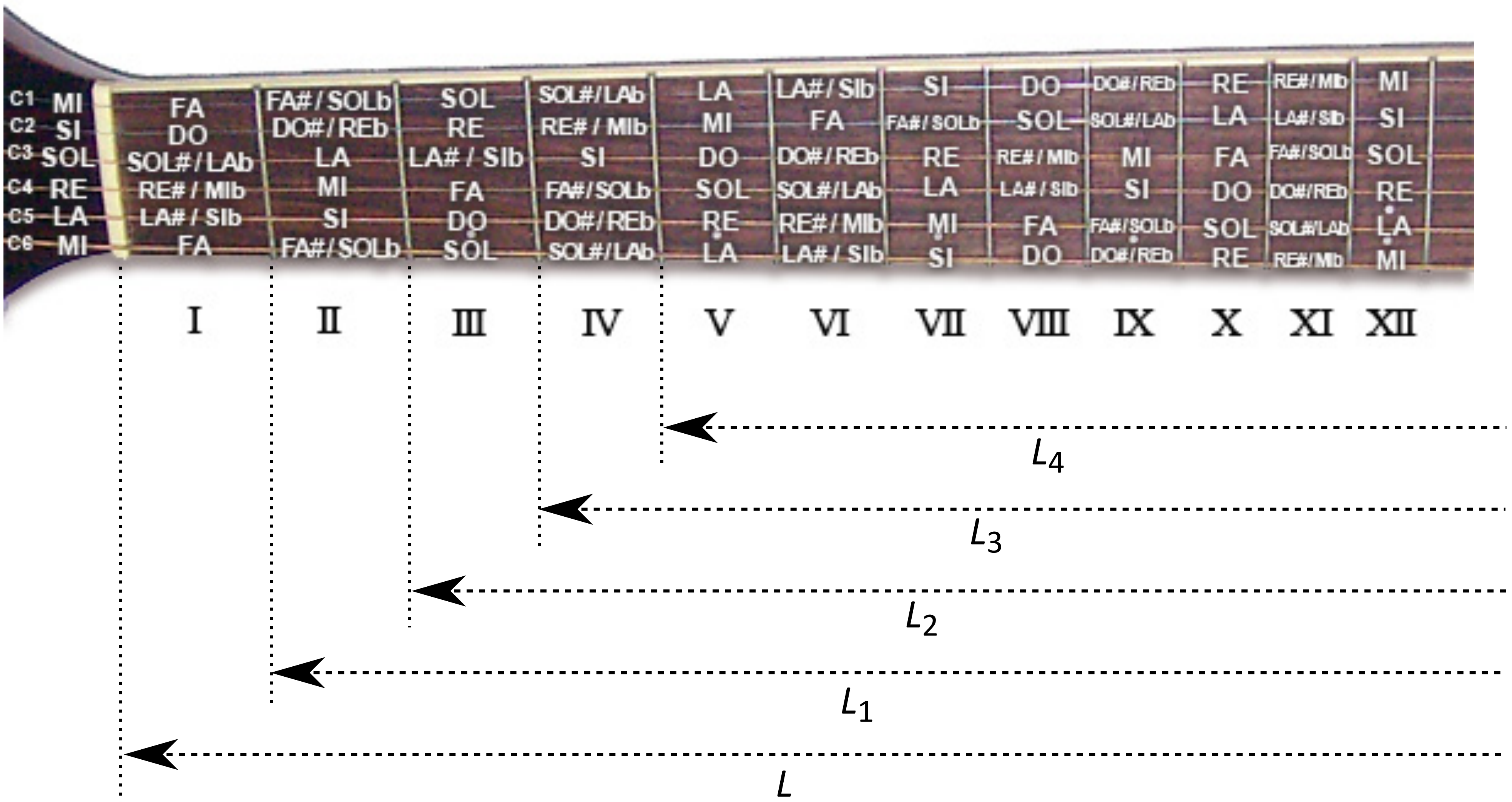

Figura 9. Trastes de una guitarra, con las notas correspondientes a cada cuerda (la más fina es la primera y se muestra arriba de todo). La posición de cada traste es tal que se aumenta la frecuencia en un semitono.