Labo 2, 1er cuatrimestre 2021

Modelo alternativo para el par emisor-receptor

Consideremos que el emisor es un oscilador amortiguado de frecuencia natural ω_{01}con un coeficiente de amortiguación γ_1 y que está forzado por el voltaje periódico que se le aplica, lo cual produce una oscilación x_1. Esta oscilación produce una perturbación en el aire que viaja y excita al receptor, al que también consideramos como un oscilador amortiguado de frecuencia natural ω_{02} y amortiguación γ_2 que está forzado por la perturbación del aire que produjo x_1. Consideremos que la propagación en el aire no produjo deformaciones en el espectro de manera que el forzante del segundo oscilador es el propio x_1.

Vamos a trabajar en el plano complejo y después al final tomamos el módulo (y la fase). Es decir que las perturbaciones armónicas las escribimos como $e^{i\omega t} = cos\, \omega t + i\, sin\, \omega t$. Entonces la ecuación diferencial para el emisor será:

$$\ddot{x}_1 + \gamma_1 \dot{x}_1 + \omega_{01}^2 x_1 = Ae^{i\omega t} \qquad (1)$$

Si proponemos una solución del tipo $Be^{i\omega t}$ podemos sacar enseguida sacar la solución particular de la ecuación (1) como:

$$-\omega^2 B + i\omega\gamma_1 B + \omega_{01}^2 B = A$$

$$B(\omega) = \frac{A}{(\omega_{01}^2 - \omega^2) + i\omega\gamma_1} \qquad (2)$$

Entonces

$$x_1(\omega) = \frac{Ae^{i\omega t}}{(\omega_{01}^2 - \omega^2) + i\omega\gamma_1} \qquad (3)$$

Para el que tendríamos que sacar el módulo si queremos solo resolver el emisor. Pero no lo hagamos y continuemos resolviendo el receptor considerando a (3) como forzante.

$$\ddot{x}_2 + \gamma_2 \dot{x}_2 + \omega_{02}^2 x_2 = B(\omega)e^{i\omega t} \qquad (4)$$

Como la ecuación diferencial es lineal la solución será simplemente la suma de las soluciones para todas las frecuencias. Podríamos poner:

$$x_2(t) = \int x_2(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega \qquad (5)$$

Para obtener la función temporal de x_2, pero se ve claramente de (5) que trabajar con $x_2(\omega)$ es equivalente (porque estamos trabajando con la transformada de Fourier, y esto lo pueden hacer para cualquier función arbitraria). Así que sigamos con nuestra ecuación (4) que tendrá como solución:

$$x_2(\omega) = \frac{Ae^{i\omega t}}{[(\omega_{01}^2 - \omega^2) + i\omega\gamma_1]\,[(\omega_{02}^2 - \omega^2) + i\omega\gamma_2]} \qquad (6)$$

Ahora solo hay que trabajar la ecuación (6) para encontrar el módulo de x_2 que será el resultado que buscamos. Con álgebra sencilla aunque un poco larga se puede llegar al siguiente resultado:

$$|x_2(\omega)| = sqrt(\,A \cdot \frac{\left[(\omega_{01}^2-\omega^2)(\omega_{02}^2-\omega^2)-\omega^2\gamma_1\gamma_2\right]^2+\left[(\omega_{02}^2-\omega^2)\omega\gamma_1+(\omega_{01}^2-\omega^2)\omega\gamma_2\right]^2}{\left[(\omega_{01}^2-\omega^2)^2+(\omega\gamma_1)^2\right]^2\cdot\left[(\omega_{02}^2-\omega^2)^2+(\omega\gamma_2)^2\right]^2}) \quad (7)$$

Que si los osciladores son iguales, es decir $\omega_{01} = \omega_{02} \equiv \omega_0$ y $\gamma_1 = \gamma_2 \equiv \gamma$, la expresión (7) se reduce a:

$$|x_2(\omega)| = A \cdot \frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega\gamma)^2} \quad (8)$$

Ahora con la ecuación (7) puede intentar ajustar los datos experimentales, y si queda muy complicado, con la ecuación (8)

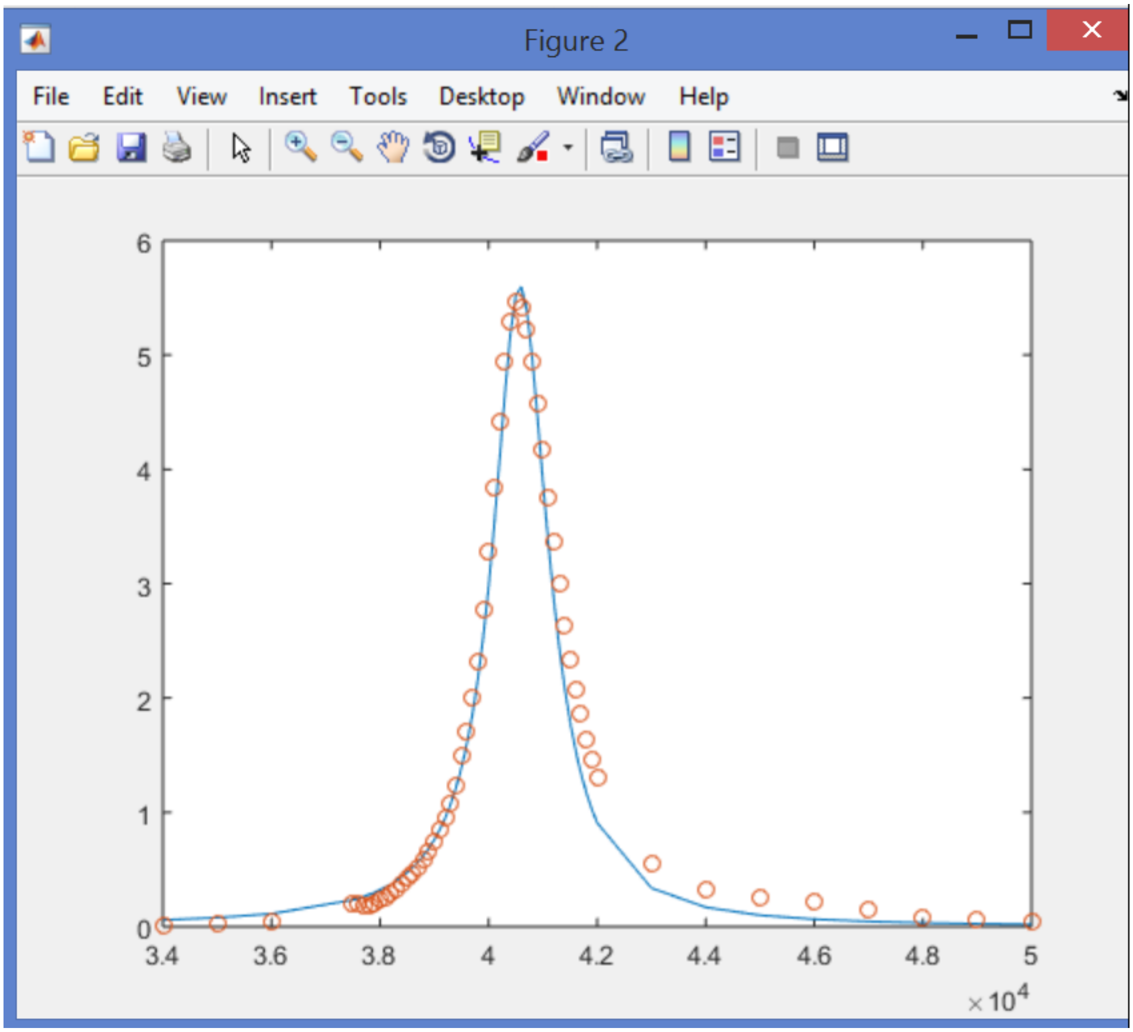
Pongo una pequeña rutina en Matlab

```
clear all
load Resonancia.txt

f=Resonancia(:,1);
V=Resonancia(:,2);

A=5e38;
w1=2*pi*40500;
w2=2*pi*40500;
g1=2*pi*1e3;
g2=2*pi*1.5e3;
beta=[A,w1,w2,g1,g2];
plot(f,dos_osc(beta,f),f,V,'o');
 betaopt=nlinfit(f,V,@dos_osc,beta);
 figure(2)
plot(f,dos_osc(betaopt,f),f,V,'o');
 [betaopt(2)/2/pi betaopt(3)/2/pi betaopt(4)/2/pi betaopt(5)/2/pi]
```

Que llama a la function dos_osc

```
function [ y ] = dos_osc( beta,f )
%dos_osc simula emisor receptor

A=beta(1);
w1=beta(2);
w2=beta(3);
g1=beta(4);
g2=beta(5);

w=2*pi.*f;

d1=w1^2-w.^2;
d2=w2^2-w.^2;

y= sqrt(A.*((d1.*d2-
w.^2*g1.*g2).^2+(d2.*w*g1+d1.*w*g2).^2)./((d1.^2+(w.*g1).^2)).^2./((d2.^2
+(w.*g2).^2).^2));
```

Pero ustedes lo pueden hacer en Python o en Origin usando algún método de fiteo. Con los datos experimentales que yo obtuve, hice el fiteo y me dio así:



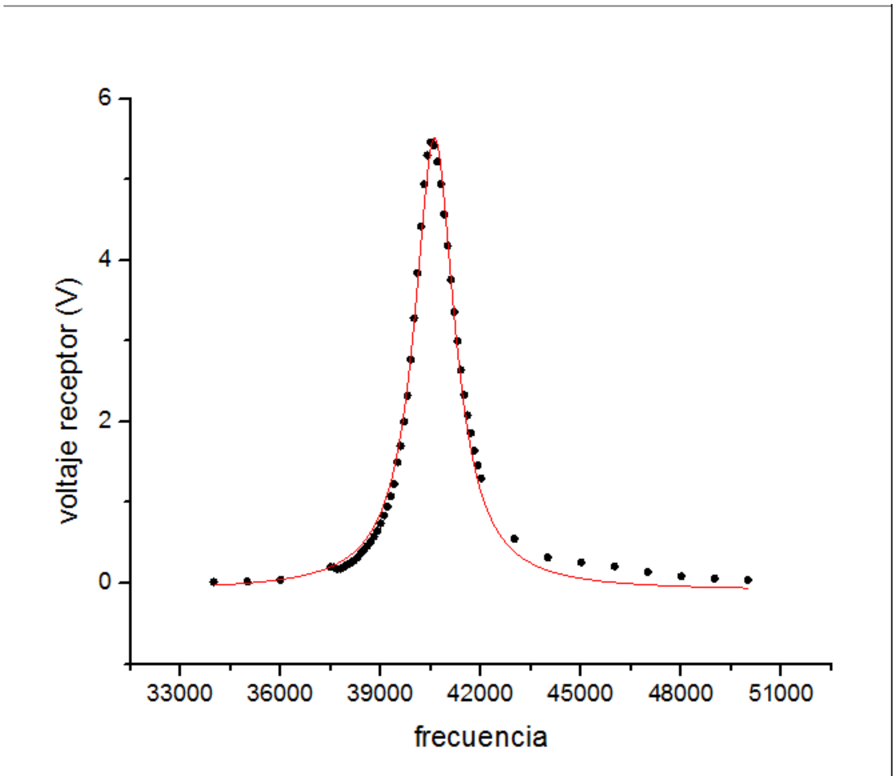
Con

f01=40507 Hz   f02=40732 Hz   gama1/2pi=1061 Hz   gama2/2pi=1419 Hz

puse los valores iniciales `A=5e38;`

```
w1=2*pi*40500;
w2=2*pi*40500;
g1=2*pi*1e3;
g2=2*pi*1.5e3;
```

El fiteo cae en mínimos locales muy fácilmente, hay que empezar desde muy cerca de los valores reales para llegar a algo. Faltaría ver si este fiteo es o no mejor que el de ecuación (8) que es simplemente una lorentziana de potencia (no está la raíz cuadrada), considerando que los dos osciladores son iguales. Creo que esta última es la mejor opción. Acá lo hice con el Origin con la función de Lorentz que ofrece y me da esto:



y = y0 + (2*A/PI)*(w/(4*(x-xc)^2 + w^2))

(que es una aproximación cerca de w0 de la ecuación (8))

Con f0= 40610 Hz, gamma= 1473 Hz

Discernir cual de los dos modelos es mejor, es una tarea que está fuera del alcance de nuestros datos (habría que hacer mas experimentos), pero al menos tenemos una aproximación mejor a la de un solo oscilador forzado amortiguado