Laboratorio 2-1er cuat. 2023-Bilbao

Batido Doppler o movimiento de franjas de interferencia

1 Resumen

La interpretación de las variaciones de intensidad de la luz causadas por el movimiento de uno o más espejos de un interferómetro se puede hacer en términos tanto del movimiento de franjas de interferencia como de la frecuencia de batido Doppler. Aunque este hecho se menciona en algunos libros de texto, no siempre se expresa de forma clara o adecuada, probablemente porque un análisis completo requiere conocimientos y desarrollos no siempre al alcance de los estudiantes en los primeros años de la carrera. Sin embargo, los conceptos básicos pueden desarrollarse con ejemplos sencillos, como haremos aquí. Finalmente, se dejará planteado la manera de generalizarlo, aunque si hacer las deducciones matemáticas correspondientes. Como complemento se pueden ver las referencias [1, 2].

2 Movimiento de franjas

La idea básica puede representarse con 2 fuentes coherentes, S_1 y S_2, separadas por una cierta distancia y que forman un patrón de interferencia sobre una pantalla como se muestra en la Fig. 1. Al desplazar la fuente S_2 hacia la pantalla (a la derecha) se verá que en el centro del patrón se pasa de máximos a mínimos de intensidad. La cantidad de máximos que se observan depende del desplazamiento de la fuente. Por ejemplo, si S_2 se desplaza desde x_a a x_b, la cantidad de franjas, ΔN_F, que se verán es

$$\Delta N_F = \frac{x_b - x_a}{\lambda} \tag{1}$$

3 Batido Doppler

Ahora pensemos desde el punto de vista de un detector ubicado en el centro del patrón de interferencia. Le llegan las ondas de 2 fuentes, una siempre en reposo, y la otra que entre dos instantes, t_a y t_b, se desplazó de x_a a x_b. Supongamos que se movió a velocidad constante, v, tal que

$$v = \frac{x_b - x_a}{t_b - t_a} \tag{2}$$

por lo que, durante ese tiempo, la frecuencia de la onda de S_2 estará modificada por el efecto Doppler. Si f_0 es la frecuencia de las 2 fuentes cuando están en reposo, la frecuencia de S_2 detectada sobre la pantalla cuando esté en movimiento, será

$$f = \left(1 + \frac{v}{c}\right) f_0$$

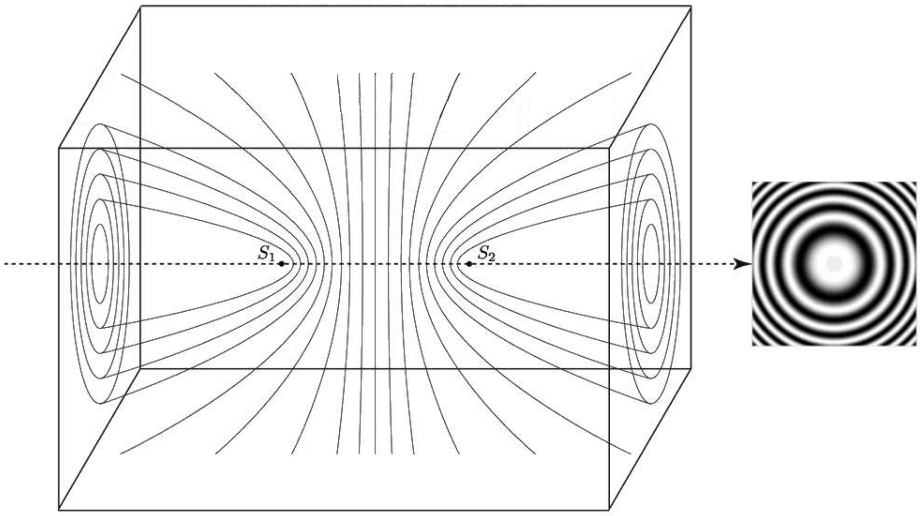

Figure 1: Patrón de interferencia producido por dos fuentes coherentes S_1 y S_2 separadas a lo largo de la recta que las une.

donde c es la velocidad de la luz y se usó un desarrollo a primer orden porque se asume $v \ll c$ (y el signo positivo dentro del paréntesis es porque la fuente se acerca al detector). La superposición de ondas con distintas frecuencias producirá un batido similar al que se muestra en la Fig. 2. La frecuencia del batido (la envolvente en la Fig. 2) es

$$f_b = \frac{v}{c} f_0 \tag{3}$$

es decir, una frecuencia mucho menor que la frecuencia de la onda. Por ejemplo, para una luz roja de 480 THz y una fuente moviéndose a 3 m/s (10 km/h) la frecuencia del batido sería de 4,8 MHz que puede medirse sin dificultad con instrumental estandar. En cambio, la oscilación de la luz a 480 THz no puede medirse, y sólo se observa el promedio cuadrático (la intensidad). El batido Doppler puede pensarse como una sucesión de pulsos que contienen una gran cantidad de oscilaciones de alta frecuencia (que como se mencionó, no pueden detectarse individualmente), produciendo un cambio periódico de la intensidad con una frecuencia f_b. Entonces, durante el tiempo que la fuente se mueve, la cantidad de pulsos, ΔN_P, que se observan es

$$\Delta N_P = f_b \left(t_b - t_a\right) \tag{4}$$

Utilizando (2) y (3) se llega a

$$\Delta N_P = \frac{(x_b - x_a)}{c} f_0$$

pero

$$\lambda = \frac{c}{f_0}$$

con lo cual

$$\Delta N_P = \frac{x_b - x_a}{\lambda} \tag{5}$$

que es idéntica a (1). En pocas palabras, cuando una fuente se mueve, en el detector se observa una sucesión de pulsos de intensidad que puede interpretarse tanto como la cantidad de franjas de interferencia que se desplazaron como la cantidad de batidos Doppler.

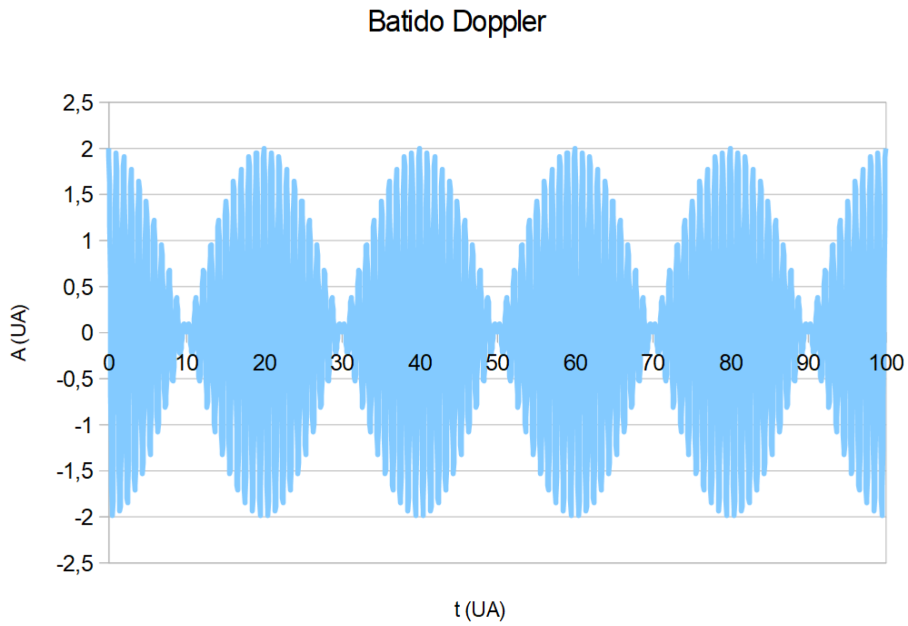

Figure 2: Batido Doppler de las ondas de una fuente en reposo y otra coherente que se mueve a velocidad constante v. Si la frecuencia de las ondas es f_0 la frecuencia del batido (la envolvente) es, a primer orden, $f_0 v/c$.

4 Algunas consideraciones

Si bien el cálculo exacto puede hacerse sin grandes dificultades, el ejemplo simplificado anterior permite entender algunas situaciones más generales. Por ejemplo, qué pasa si la velocidad de la fuente no es uniforme. En este caso, (2) se reemplaza por

$$x_b - x_a = \int_{t_a}^{t_b} v dt \tag{6}$$

y (4) por

$$\Delta N_P = \int_{t_a}^{t_b} f_b dt \tag{7}$$

Al ser f_0 constante se puede poner

$$\Delta N_P = \frac{f_0}{c} \int_{t_a}^{t_b} v dt$$

de manera que se vuelve a obtener (5), lo que implica que el resultado anterior no depende del tipo de movimiento de la fuente.

Otra pregunta es si es lo mismo que se mueva una fuente o que se mueva la imagen de una fuente mediante un espejo móvil. Si bien el desplazamiento de una imagen también produce un movimiento de las franjas de interferencia, en el cálculo hay que tener en cuenta que la velocidad relevante es la velocidad del espejo y no la de la imagen. En el caso de un espejo plano, con incidencia normal, la velocidad de la imagen es 2 veces la del espejo, con lo cual pueden usarse cualquiera de ellas indistintamente teniendo en cuenta este factor 2. Pero en un espejo esférico la velocidad de la imagen puede hacerse infinita cuando la fuente se acerca al foco del espejo. Es evidente que esta velocidad infinita de la imagen no tiene significado físico en el problema, por lo cual el efecto Doppler deberá calcularse con la velocidad del espejo y no de la de la imagen.

En el caso de velocidades grandes, para el efecto Doppler, hay que usar la fórmula relativista en lugar de la aproximación a primer orden dada por (3). Además, probablemente también sea relevante tener que considerar los retrasos del tiempo de viaje de las señales entre las fuentes y el detector (difícilmente se tenga un detector cercano a fuentes que se mueven a velocidades relativistas!). Al hacer las cuentas con estas condiciones se obtiene un resultado paradójico: deja de valer la (1), es decir, que el desplazamiento neto de franjas producido por una fuente en movimiento deja de ser proporcional a la distancia neta recorrida por la fuente. Esto es así porque la (1) se basa en que las fuentes son siempre coherentes en el sentido que si son coherentes antes de separarse lo serán también al volver a reunirse, sin embargo esto no es así. Y no es por un problema de que el movimiento pueda afectar el mecanismo de producción de luz, sino que está relacionado a la dilatación temporal. Dado que la diferencia es de naturaleza relativista, hay una manera interesante de explicarla utilizando la paradoja de los mellizos. La fase de una onda varía linealmente con el tiempo propio, y, al dividirla por 2π da la cantidad de ciclos que ha oscilado la luz. Se puede pensar en la fase como la "edad" de la fuente (es decir, el recuento total de latidos), con lo cual el problema de una fuente en movimiento es similar a la paradoja de los mellizos. Por lo tanto, los resultados de la paradoja de los mellizos se pueden utilizar para comprender la variación de fase de una fuente en movimiento y viceversa. Dos fuentes que inicialmente están juntas y en fase (o sea, tienen la misma "edad") es similar al caso de dos mellizos antes de separarse. Si una fuente (o mellizo) viaja hasta finalmente volver al punto de partida para reencontrarse con la otra fuente (mellizo), al llegar tendrá una fase menor (es más joven) que la otra fuente (mellizo) que no viajó. Conclusión, no puede usarse (1) para calcular la cantidad de franjas que han pasado por el centro del patrón de interferencia debido a la dilatación temporal de la fuente viajera. La manera de calcularlo es usando (7) con la fórmula relativista del Doppler y teniendo en cuenta el retardo entre el instante del movimiento y el instante de detección.

Por último, en base a lo dicho acá arriba, para el caso relativista se espera una solución diferente cuando se mueve una fuente o se mueve la imagen de ésta producida por un espejo plano. Este es un problema distinto a lo mencionado más arriba del problema de espejos esféricos (o no planos, en general) donde es la velocidad del espejo y no la de la fuente la que interviene en el efecto Doppler. Utilizando nuevamente la analogía de la fase con la edad, y pensamos en la paradoja de los mellizos, sabemos que, si un mellizo viaja, al regresar será más joven que el que se quedó. Ahora si en lugar de pensar en un mellizo viajero pensamos en la imagen de una persona formada por un espejo plano, y hacemos viajar el espejo (y en consecuencia, también viajará la imagen de la persona) para finalmente regresar al punto de partida, la imagen que mostrará el espejo será una copia de la persona que está enfrente independientemente de como se haya movido el espejo. Es decir, la persona y su imagen tienen la misma edad independientemente del movimiento del espejo. No hay efecto de dilatación temporal para una imagen en movimiento! Conclusión, mover una fuente o mover una imagen de la fuente mediante un espejo plano son problemas conceptualmente distintos: los resultados de un caso no pueden usarse para explicar el otro caso, salvo en el límite de bajas velocidades donde las diferencias son muy pequeñas y pueden ser despreciadas (recordar que nunca la transformación de Lorentz converge a la de Galileo, ni cuando $v/c \to 0$).

Resumiendo, si movemos un espejo en un interferómetro, entonces el cambio de fase se puede calcular mediante el efecto Doppler o mediante el cambio de posición de la imagen producida por espejos planos. Por el contrario, si se tiene la interferencia mediante dos fuentes coherentes y movemos una de ellas, la única solución exacta se obtiene mediante el desplazamiento Doppler, mientras que el cálculo mediante el cambio de posición de la fuente es sólo válido a primer orden en v/c.

References

[1] S. C. Bloch; W. E. Abare; G. E. Pidick, *Am. J. Phys.* **35**, 223-226 (1967).

[2] Paul S. Kelly, *Am. J. Phys.* **47**, 378 (1979).