Otra (muy poderosa) forma de estudiar los transitorios

Guillermo Brinatti Vazquez

Vamos a estudiar otra forma de entender lo que vimos en la práctica de transitorios que es conceptualmente mucho más rica y muy poderosa en cuanto a sus aplicaciones. Para eso, vamos a necesitar muchas herramientas de Mate 4, en particular Fourier. Por esto, vamos a empezar repasando (si se puede llamar a esto repaso) las definiciones y propiedades más elementales de esta transformada.

1. Preliminares

Vamos a usar la definición simétrica de la transformada en frecuencia angular. La transformada queda definida entonces como

$$\hat{f}(\omega) \equiv \mathcal{F}(f(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \tag{1}$$

y su inversa

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \tag{2}$$

Una de las propiedades más importantes de la transformada de Fourier es como actúa sobre las derivadas. Es fácil demostrar a partir de la definición de la transformada que

$$\mathcal{F}(\frac{df}{dt}) = i\omega \hat{f}(\omega). \tag{3}$$

Otra propiedad importante es el llamado teorema de la convolución, que relaciona a la transformada de Fourier con el producto de convolución. Recordamos que el segundo se calcula para dos funciones arbitrarias del tiempo f y g como

$$f * g\ (t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau, \tag{4}$$

donde el operador $*$ simboliza el producto de convolución. Con esta definición el teorema dice que

$$\mathcal{F}(f * g\ (t)) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega), \tag{5}$$

es decir, la transformada del producto (de convolución) es el producto de las transformadas. Con estas herramientas, vamos a resolver la ecuación diferencial de un circuito RC.

2. Circuito RC

La resolución del transitorio para un circuito RC cuando se lo fuerza con una llave (o función cuadrada de periodo largo) ya se calculó en la guía de la materia. La ecuación diferencial que describe la caída de tensión en el capacitor se puede escribir para ese caso como

$$RC\frac{dV}{dt} + V = 0, \tag{6}$$

donde V es la caída de tensión en el capacitor y R y C los valores de resistencia y capacidad del circuito. Más general, podemos forzar al circuito con una función arbitraria del tiempo $\epsilon(t)$. En ese caso, la ecuación queda escrita

$$RC\frac{dV}{dt} + V = \epsilon(t). \tag{7}$$

Acá es donde Fourier se vuelve útil. Si tomamos la transformada de los dos lados y usamos la propiedad de las derivadas obtenemos

$$(i\omega RC + 1)\hat{V}(\omega) = \hat{\epsilon}(\omega), \tag{8}$$

o lo que es equivalente

$$\hat{V}(\omega) = \frac{\hat{\epsilon}(\omega)}{(i\omega RC + 1)}. \tag{9}$$

Si ahora definimos $\hat{h}(\omega) = 1/(i\omega RC + 1)$ reescribimos

$$\hat{V}(\omega) = \hat{\epsilon}(\omega)\hat{h}(\omega). \tag{10}$$

Acá tenemos un primer resultado importante. La función $\hat{h}(\omega)$ no es otra cosa que la función de transferencia del circuito que estudiamos en la guía de estacionarios. Esto no debería sorprendernos. Como el sistema es lineal, la respuesta a una señal arbitraria se puede encontrar de la siguiente forma: descomponemos la señal en sus componentes de Fourier y luego multiplicamos cada componente por la función de transferencia compleja (amplitud y fase) que medimos en la guía pasada. Así, cada componente del forzante se atenuará y desfasará de una manera distinta. Si ahora tomamos la antitransformada de esas componentes podemos recuperar la señal en el dominio temporal. Hasta acá solo confirmamos lo que ya sabíamos. No nos quedemos solo con esto. Ahora usamos el teorema de la convolución y resulta

$$\hat{V}(\omega) = \mathcal{F}(\epsilon * h\ (t)) \tag{11}$$

y como la transformada esta aplicada de los dos lados, debe ocurrir entonces que

$$V(t) = \epsilon * h\ (t). \tag{12}$$

Resolvimos la ecuación diferencial de una manera muy elegante. Ahora ¿qué significa esto? La tension en el capacitor la encontramos como el producto de convolución entre la señal con la que estamos forzando y la función de transferencia pero en el dominio del tiempo. Lo primero a notar es que el ejemplo del capacitor no es para nada un limitante en este desarrollo. El conjunto de ecuaciones diferenciales que se puede resolver por este método es muy general y requiere solo de dos hipótesis (averiguar cuales) que se verifican en muchísimas aplicaciones.

Pensemos un poco ahora en la función $h(t)$. Una propiedad fundamental del producto de convolución dice que la convolución con una delta de Dirac es la identidad. Escrito formalmente

$$f * \delta\ (t) = \int_{\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f(t). \tag{13}$$

La delta de Dirac, que ya debería haber aparecido a molestarlos por la carrera, es una "función"que vale infinito en $t = 0$ y cero para todo otro tiempo. Su transformada de Fourier es aún más curiosa

$$\hat{\delta}(\omega) = 1. \tag{14}$$

El espectro de una delta es plano. Posee todas las componentes de frecuencia. Por lo tanto, si excitamos al sistema con una buena patada, muy localizada en el tiempo, lo estaremos forzando con todas las frecuencias del espectro (o una buena cantidad). En ese caso, ¿cómo responde el sistema? Como la convolución con una delta es la identidad, se recupera simplemente

$$V(t) = h * \delta\ (t) = h(t). \tag{15}$$

Por este resultado es que se conoce a la función $h(t)$ como respuesta impulsiva del sistema. Esta función contiene toda la información de nuestro circuito y como va a responder a cualquier señal. Transformando Fourier, se puede obtener la función de transferencia en amplitud y fase para todas las frecuencias y en una sola medición (¿se va viendo la utilidad de esto?)

La delta de Dirac es una abstracción teórica. Una señal real tendrá un espectro de frecuencias acotado (ver preguntas). Además, puede ser impráctica de generar. Para resolver estos problemas, existen muchas opciones de forzantes que poseen espectros anchos de frecuencias. Uno de gran utilidad (también ideal) es la función escalón. Al poseer un cambio instantáneo en su valor, esta función también tendrá un espectro ancho de frecuencias. Es fácil ver que la derivada de una función escalón es una delta de Dirac. Usando esto, es sencillo demostrar (ejercicio) que derivando la respuesta al escalón se obtiene la respuesta al impulso.

Volviendo al caso RC, la respuesta impulsiva se puede calcular a partir de invertir la expresión para $\hat{h}(\omega)$ que encontramos antes, para obtener

$$h(t) = \frac{1}{RC}e^{-t/RC}. \tag{16}$$

En la figura 1 se observa la respuesta impulsiva y la respuesta al escalón para el mismo circuito RC.

3. Preguntas

1) La delta de Dirac tiene un espectro de frecuencias plano, es decir, todas las compontentes del espectro tienen amplitud igual a uno. La misma afirmación se verifica para el llamado *ruido blanco*. ¿Cuál es la diferencia?

2) La delta de Dirac es un forzante ideal. ¿Cómo se podría aproximar esto en un circuito real? ¿Como se verá afectado el espectro del forzante? ¿Qué efecto tendrá esto en cuanto a la información que uno obtiene de la medición?

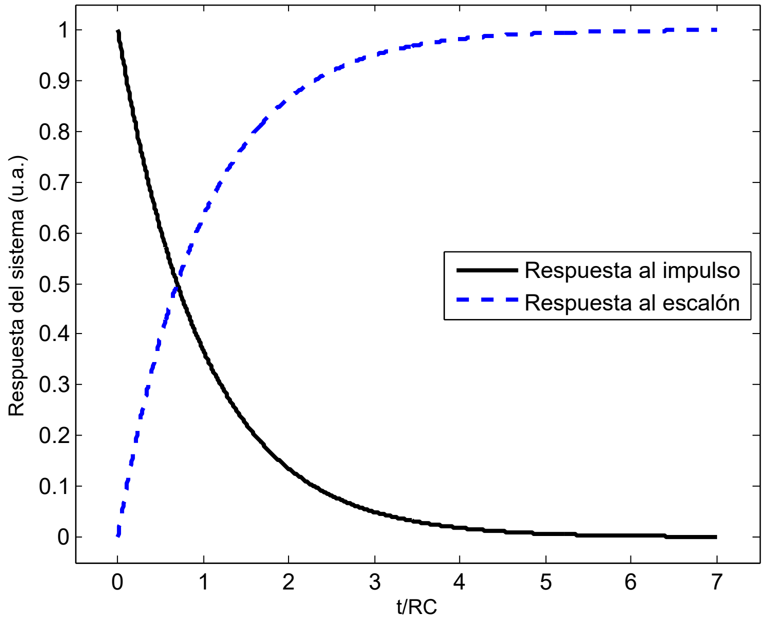

Figura 1: Respuesta al impulso y al escalón para la tensión en el capacitor de un circuito RC serie.

3) Según la ecuación 10, si uno conoce muy bien el espectro de su forzante $\epsilon(\omega)$ uno podría recuperar a la perfección la respuesta de su sistema simplemente dividiendo el espectro de la señal de entrada por la de salida. ¿Cuán cierta es dicha afirmación?

4) ¿Cuál es el efecto de convolucionar una señal con un pequeño escalón cuadrado (ya lo hicimos hace algunas clases)? ¿Cómo se parece esto a convolucionar con la respuesta impulsiva de un circuito RC?

5) Si un osciloscopio posee una resistencia de 1 MΩ y una capacidad de entrada de 100 pF. ¿Cuál es la medición más rápida que podrá hacerse con este dispositivo?

6) ¿Es posible mejorar esta respuesta a partir de un circuito externo? ¿A qué costo?

7) ¿Qué información proporciona el ancho de banda que figura en el frente (y los manuales) de generadores de funciones y osciloscopios? ¿Como se verá afectada la forma de una señal cuadrada en el caso de que se genere (detecte) con un ancho de banda de 1 MHz? ¿Para que sirve la función limitar ancho de banda del osciloscopio?

4. Propuestas

1) Forzar un circuito RC, RL o RLC con una señal arbitraria del tiempo. Adquirir tanto la señal como la respuesta para luego comparar como se modificaron sus componentes de Fourier.

2) Utilizar la respuesta al escalón para obtener la respuesta impulsiva y la respuesta en el dominio de las frecuencias. Como se compara con los datos medidos en el modo estacionario?

3) (Dificil) Utilizar los datos medidos en el caso estacionario para estimar la respuesta impulsiva.

4) (Dificil) Una vez caracterizado un circuito RC pasabajos intente recuperar la información de

alta frecuencia de una señal conocida (ejemplo una onda cuadrada). Ver pregunta 3 de la sección anterior.

5. Transformada de Fourier de señales muestreadas

En todas las cuentas hasta acá trabajamos con señales continuas. En el laboratorio, es inevitable trabajar con señales muestreadas, esto es, solo conocemos las señales que medimos en un conjunto discreto de instantes t_n cuya distancia δt es la inversa de la frecuencia de muestreo. También trabajamos con señales acotadas en el tiempo. Si llamamos T a la duración de nuestra adquisición, los valores posibles de t_n serán

$$t_n = n\delta t, \tag{17}$$

donde el indice n va desde 1 hasta $N = T/\delta t$. La versión muestreada de la señal continua f la vamos a escribir entonces como

$$f_n = f(t_n). \tag{18}$$

Como estamos midiendo un conjunto finito de instantes, nuestra transformada de Fourier será también evaluada en un conjunto discreto de frecuencias. El teorema de Nyquist, dice que la frecuencia más alta f_{max} de la cual podemos obtener información a partir de una señal muestreada es igual a la mitad de la frecuencia de muestreo, esto es,

$$f_{max} = \frac{1}{2\delta t}. \tag{19}$$

Nos falta obtener el paso de nuestro vector de frecuencias. Esto está definido por la longitud de nuestro vector de tiempos, de forma que la distancia entre dos frecuencias δf vendrá dada por

$$\delta f = \frac{1}{T}. \tag{20}$$

De estas dos expresiones vemos que de un vector de tiempos de longitud N vamos a obtener un vector de frecuencias de la mitad del largo. Esto esta relacionado con que la transformada de Fourier es compleja, esto es, tenemos dos valores independientes (amplitud y fase) para cada frecuencia. De esta forma, tenemos la misma cantidad de números independientes que en nuestra señal original. Con todo esto en mente, la transformada de Fourier discreta (DFT de Discrete Fourier Transform) se calcula para una función arbitraria $x(t_n)$ como

$$\hat{x}(f_n) = \hat{x}_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k\, e^{2i\pi\, kn/N}. \tag{21}$$

Muchas veces la verán referida también como FFT (Fast Fourier Transform) que es el nombre del algoritmo que calcula la transformada de manera más eficiente y es el que usa numpy (y todo el mundo) para calculara. Para facilitar todo esto, preparamos para ustedes dos funciones de Python que calculan el vector de frecuencias a partir de un vector de tiempos y la transformada de Fourier a partir de un vector de tensiones sacado del osciloscopio.