Práctica 3: resonancia eléctrica

Adaptación por Nicolás Torasso, Eliana Depaoli, Facundo Sanchez Oyarbide y Gabriela Pasquini
de las Guías de César Moreno 2020, (1c 2023)

1. Circuito RLC serie

Suponga se tiene un circuito RLC serie alimentado por una función armónica $V(t) = V_0 \sin \omega t$ como el de la Figura 1),

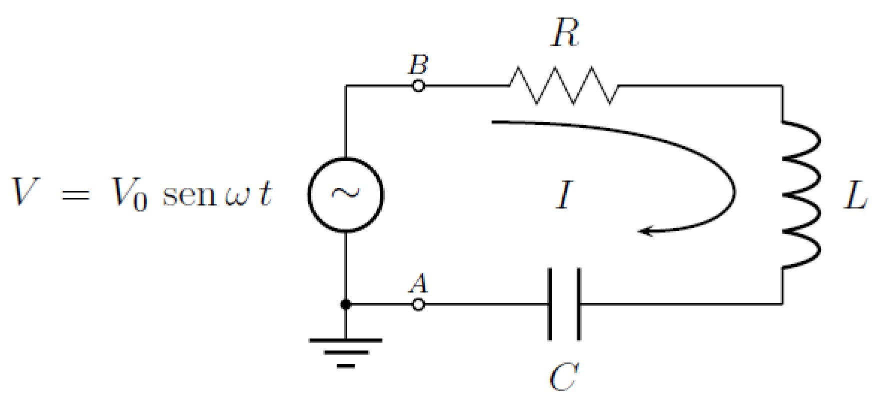

Figura 1: *Circuito RLC serie alimentado por una fuente de tensión armónica de amplitud V_0 y frecuencia angular ω.*

En este caso, la Ley de Ohm permite plantear:

$$V = IZ_{AB} = I(R + Z_L + Z_C) = I[R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})] \tag{1}$$

donde V es la tensión aplicada por la fuente, I la corriente que circula por la malla, Z_{AB} la impedancia, vista desde la fuente, entre los puntos A y B, Z_L y Z_C las impedancias de la bobina y el capacitor, respectivamente, ω la frecuencia angular de la tensión armónica que aplica la fuente, y j la unidad imaginaria ($j^2 = -1$).
Luego

$$|I| = \frac{|V|}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}} \tag{2}$$

Puede verificarse que si

1. $\omega \to 0 \quad \Rightarrow X_C = \frac{1}{\omega C} \to \infty$ y en consecuencia $|I| \to 0$
2. $\omega \to \infty \quad \Rightarrow X_L = \omega L \to \infty$ y en consecuencia $|I| \to 0$
3. ω es tal que $\omega L = 1/(\omega C)$, resulta que la reactancia total X_T es $X_T = X_L - X_C = 0$, con lo cual para este circuito $|I|$ alcanza su valor máximo $|I|_{max} = |V|/R$. Esto ocurre para

$$\boxed{\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}} \tag{3}$$

En la Figura 2 se expone el gráfico de $I(\omega)$ para tres casos particulares de R, L y C. La condición $\omega = \omega_0$ para la cual $X_T = 0$ define lo que se denomina resonancia del circuito. Se dice que un circuito esta en resonancia (de fase) cuando la corriente que a él ingresa está en fase con la tensión que se le aplica. Obviamente, cuando $X_T = 0$, resulta $V = IR$ y consecuentemente el desfasaje entre V e I es nulo.

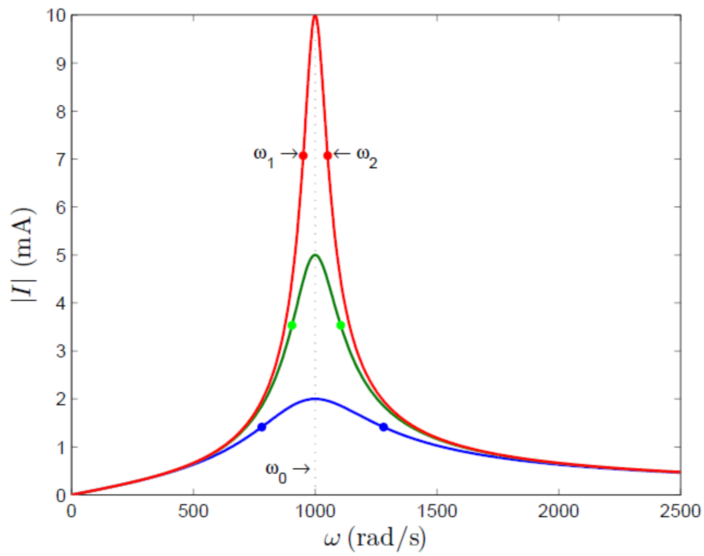

Figura 2: *Amplitud de la corriente circulante por un circuito RLC serie alimentado por una fuente de tensión armónica de 1 V de pico, en función de la frecuencia, para los casos: $R_1 = 100$, $R_2 = 200$ y $R_3 = 500$. En los tres casos se mantuvo: $L = 1$ H y $C = 1$ μF, lo que implica $\omega_0 = 1000$ rad/s para todos ellos. Se destacan en cada caso las frecuencias ω_1 y ω_2 que permiten definir los correspondientes anchos de banda $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ (ver texto).*

Cuando $\omega = \omega_0$ se tiene

$$V_L(\omega_0) = j\omega_0 L\, I(\omega_0) = j\omega_0 L \frac{V}{R} = j\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}V \tag{4}$$

$$V_C(\omega_0) = -j/(\omega_0 C)\, I(\omega_0) = -j\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}V \tag{5}$$

luego $V_L(\omega_0) + V_C(\omega_0) = 0$ para todo instante y por lo tanto

$$V_R(\omega_0) = V \tag{6}$$

En cuanto a las caídas de tensión eficaces sobre cada uno de los tres elementos de circuito, en resonancia, se tiene:

$$V_{Lef}(\omega_0) = \frac{|V_L(\omega_0)|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \cdot V_{ef} \tag{7}$$

$$V_{Cef}(\omega_0) = V_{Lef}(\omega_0) \tag{8}$$

$$V_{Ref}(\omega_0) = V_{ef} \tag{9}$$

siendo V_{ef} la tensión eficaz aplicada por la fuente: $V_0/\sqrt{2}$. La potencia disipada por el circuito está dada por

$$P(\omega) = I_{ef}^2(\omega)\ R = \frac{|I|^2}{2}\ R = \frac{V_{ef}^2}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}\ R \tag{10}$$

cuyo gráfico puede verse en la Fig 3. Una manera de caracterizar el ancho de la curva

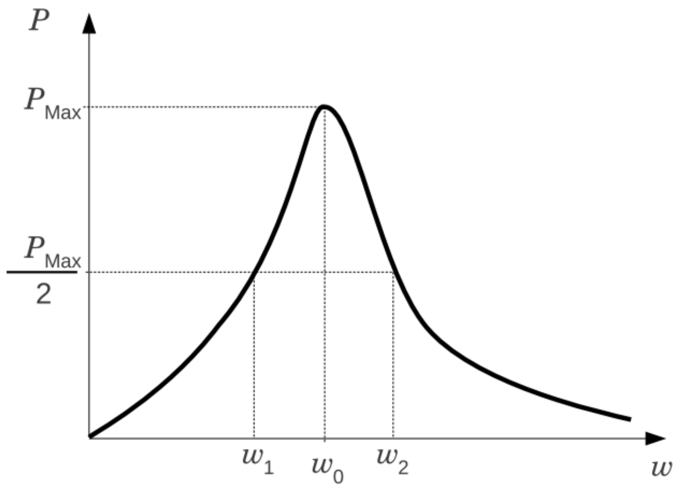

Figura 3: *Potencia disipada en un circuito RLC serie en función de la frecuencia.*

$P(\omega)$ es mediante las frecuencias ω_1 y ω_2 para las cuales la potencia disipada se reduce a la mitad de la máxima. La condición:

$$P(\omega) = \frac{P_{Max}}{2} \tag{11}$$

conduce a una ecuación bicuadrática para ω, cuyas soluciones son:

$$\omega_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2}\ < \omega_0 \qquad \omega_2 = \alpha + \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2}\ > \omega_0 \tag{12}$$

$$\omega_3 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2}\ < 0 \qquad \omega_4 = \alpha - \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2}\ > 0 \tag{13}$$

donde $\alpha = R/2L$. Las 2 últimas carecen de sentido. Las 2 primeras permiten definir el ancho de la curva como

$$\boxed{\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}} \tag{14}$$

al que también se denomina ancho de banda del circuito.

Para caracterizar la función $P(\omega)$ se define:

$$\boxed{Q \equiv \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \omega_0 \frac{L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}} \tag{15}$$

llamado factor de mérito o de calidad. Este número mide la selectividad del circuito para disipar potencia: si $Q \to \infty$, la curva $P(\omega)$ se estrecha en torno a ω_0 y en consecuencia el circuito disipa potencia en un rango relativamente pequeño de frecuencias. A medida que $Q \to 0$, la curva se ensancha y la potencia se disipa en un rango cada vez más amplio de frecuencias (ver figura 4).
Finalmente consideremos la impedancia de entrada del circuito RLC serie, vista desde la fuente

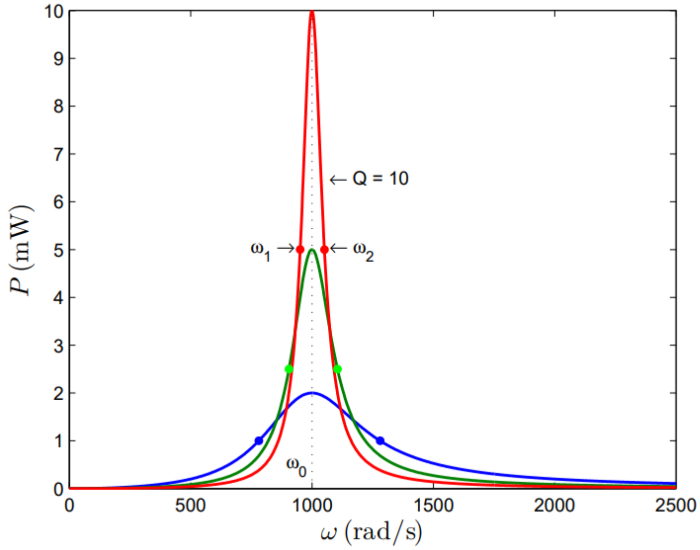

Figura 4: *Potencia disipada en un circuito RLC serie alimentado por una fuente de tensión armónica de 1 V de pico en función de la frecuencia, para los casos ilustrados en la figura 2. Los factores de mérito correspondientes son Q = 10, 5 y 2.*

$$|Z_{AB}(\omega)| = [R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2]^{\frac{1}{2}} \tag{16}$$

cuyo gráfico puede verse en la figura 5. A frecuencias menores que la de resonancia ($\omega < 1/\sqrt{LC}$) la reactancia capacitiva es mayor que la inductiva ($1/\omega C > \omega L$), por lo tanto

$$X_T = X_L - X_C < 0 \tag{17}$$

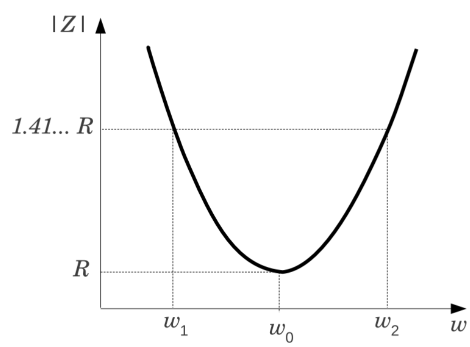

Figura 5: *Impedancia de entrada de un circuito RLC serie en función de la frecuencia.*

y se dice que el circuito se comporta capacitivamente. A frecuencias $\omega > \omega_0$, resulta $XL > XC \Rightarrow XT > 0$ y se dice que el circuito se comporta inductivamente.
A la frecuencia de resonancia, $XL = XC \Rightarrow XT = 0$, el circuito se comporta como una resistencia pura y además $|Z_{AB}|$ es mínima.
Como

$$P = I_{ef}^2 R = \frac{V_{ef}^2 R}{|Z_{AB}|^2} \tag{18}$$

se demuestra fácilmente que las frecuencias ω_1 y ω_2 de mitad de potencia corresponden a la condición:

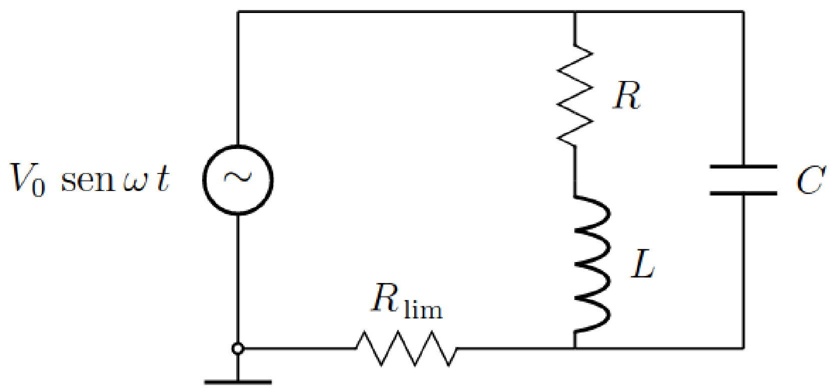

Figura 6: *Una fuente de onda armónica de frecuencia angular ω alimenta a un circuito RLC paralelo en el que se considera una resistencia limitadora, R_{lim}*

$$|Z_{AB}(\omega)| = \sqrt{2}\,R = \sqrt{2}\,|Z_{AB}(\omega)|_{min} \tag{19}$$

Noten que la expresión del ancho de banda, $\Delta\omega = R/L$, a menos de un factor, es idéntica a la inversa del tiempo característico del transitorio del circuito RLC. Esto es muy general, no aplica solo a este sistema en particular. De la misma forma, es general que la frecuencia natural de oscilación de un sistema subamortiguado (en nuestro caso el circuito RLC) tiende a la frecuencia de resonancia del mismo sistema cuando éste es forzado, a medida que el ancho de banda se angosta.

2. Circuito RLC paralelo

Considere el circuito de la figura 6. La frecuencia de resonancia de fase, $\omega_{0||}$, vale

$$\boxed{\omega_{0||} = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1-\frac{R^2C}{L}} = \omega_0\sqrt{1-Q^{-2}}} \tag{20}$$

donde $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ es la frecuencia de resonancia del circuito RLC serie, y Q es el factor de mérito ya estudiado. Note que $\omega_{0||}$ es independiente de la resistencia limitadora R_{lim}, y que tiende a ω_0 por la izquierda a medida que $R \to 0$.
La impedancia, $Z_{||}$, del paralelo RLC propiamente dicho, esto es, excluyendo R_{lim}, satisface

$$|Z_{||}^2| = \frac{1}{\omega^2C^2}\frac{(R^2+\omega^2L^2)}{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2} \tag{21}$$

Puede verificarse que

$$\boxed{lim|Z_{||}| = \begin{cases} R & si \quad \omega \to 0 \\ 0 & si \quad \omega \to \infty \end{cases}} \tag{22}$$

y que en resonancia,

$$\boxed{|Z_{||}(\omega_{0||})| = Q^2R = \frac{1}{R}\frac{L}{C}} \tag{23}$$

Observaciones

1. De la ecuación (23) se concluye que la impedancia de un circuito RLC paralelo en resonancia ($\omega = \omega_{0||}$) puede ser infinita si, por ejemplo, $R \to 0$ manteniendo L y C finitos; o bien, expresado con mayor propiedad: dicha impedancia, en módulo, puede ser ilimitada si, por ejemplo, R es arbitrariamente menor que $\sqrt{L/C}$.

2. Si se armase un circuito RLC paralelo en las condiciones de la observación anterior: $\omega = \omega_{0||}$ y $R \ll \sqrt{L/C}$, la corriente que ingresaría al paralelo sería prácticamente nula (aún si$R \to 0$) a pesar de que dicha corriente tiene dos ramas en paralelo por las que puede circular, y de que cada una de las ramas por separado presenta una impedancia finita.

3. En la práctica es imposible hacer tender la resistencia a cero usando cables conductores, ya que los propios cables tienen resistividad finita. En particular las inductancias suelen tener resistencias internas apreciables.