Práctica 6: inducción

Laboratorio 3 - Departamento de Física - FCEyN - UBA

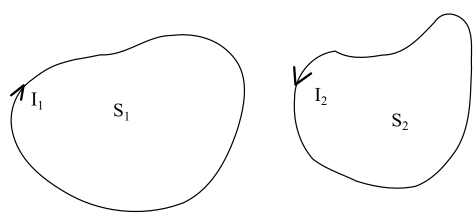
por Nicolás Torasso y Gabriela Pasquini

(1c 2023)

1. Ley de Faraday-Lenz, inductancias mutuas y autoinductancia

1.1. Inductancia Mutua

Primero, repasemos algunos conceptos. Supongamos que tenemos dos circuitos ideales que encierran superficies S_1 y S_2 por los que circulan respectivamente corrientes I_1 e I_2:



Si los circuitos están en vacío (o cualquier medio no magnético):

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = I_1 \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} \tag{1}$$

es el campo generado por la corriente I_1. El flujo de ese campo que atraviesa la superficie S_2 será:

$$\phi_{21} = \iint_{S_2} \mathbf{B}_1(\mathbf{r}).d\mathbf{S} = I_1 \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S_2} \left[\oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} \right] .d\mathbf{S} = I_1 M_{21} \tag{2}$$

donde podemos ver que la inductancia mutua M_{21} está determinada por la geometría de ambos circuitos y el medio material en el que se encuentren. Se puede ver además que $M_{21} = M_{12} = M$.

Por supuesto, esto también es válido para un circuito consigo mismo:

$$\phi_{11} = \iint_{S_1} \mathbf{B}_1(\mathbf{r}).d\mathbf{S} = I_1 L_1 \tag{3}$$

donde L_1 es la **autoinductancia** del circuito.

Si el acoplamiento de ambos circuitos es "perfecto"(es decir, si **todas** las líneas de campo generadas por el circuito 1 atraviesan el área del circuito 2 y viceversa), puede verse fácilmente que $M = \sqrt{L_1 L_2}$. En general los acoplamientos no son perfectos, y por lo tanto en un caso general:

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} \tag{4}$$

con $0 < k < 1$ la llamada constante de acoplamiento. OJO: Esto vale si no se altera el medio material. En caso de que el acoplamiento incluya un medio magnético (por ejemplo un entrehierro) la constante de acoplamiento puede ser mayor que 1.

En el caso en que nuestros circuitos sean solenoides de largo L, área A y número total de vueltas N que puedan aproximarse como infinitos, vimos que el campo en el interior de cada solenoide será aproximadamente: $\mathbf{B} \sim \mu_0 n I \mathbf{z}$, siendo $n = N/L$. En ese caso, cada una de las autodinductancias en el vacío puede aproximarse por:

$$L \sim \mu_0 n N A = \mu_0 N^2 \frac{A}{L} \tag{5}$$

1.2. Acoplamiento con corrientes dependientes del tiempo

Ahora bien. ¿Qué sucede si las corrientes (y por lo tanto los campos y los flujos atrapados en cada circuito) varían en el tiempo? Sabemos por la ley de Lenz que si el flujo de campo magnético ϕ que atraviesa la superficie subtendida por un circuito varía con el tiempo, se inducirá en el circuito una f.e.m.:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} \tag{6}$$

Por lo tanto, en el caso de nuestros circuitos ideales, la variación de la corriente en el circuito 1 inducirá una fem en el circuito 2:

$$\varepsilon_{21} = -M_{21}\frac{dI_1}{dt} \tag{7}$$

y también en el propio circuito: $\varepsilon_{11} = -L_1 \frac{dI_1}{dt}$

De manera general, si tenemos muchos circuitos, el flujo magnético que atraviese la superficie encerrado por cada uno de ellos será:

$$\phi_i = I_i L_i + \sum_{j \neq i} I_j M_{ij} \tag{8}$$

y la correspondiente f.e.m.:

$$\varepsilon_i = -L_i \frac{dI_i}{dt} - \sum_{j \neq i} M_{ij} \frac{dI_j}{dt} \tag{9}$$

1.3. Circuitos acoplados de corriente alterna

En el caso en que las corrientes varían con el tiempo de forma armónica: $I_i = I_{0i} \cos(\omega t + \varphi_i)$, las derivadas son simplemente $\frac{dI_i}{dt} = -i\omega I_i$, y la Ecuación 9, queda:

$$\varepsilon_i = i\omega I_i + i\omega \sum_{j\neq i} M_{ij} I_j \tag{10}$$

2. Circuitos acoplados reales; transformadores

Ahora bien. Hasta ahora tratamos circuitos ideales. Los circuitos reales formados por conductores siempre tienen resistencia. Por lo tanto, para que circulen corrientes es necesario incluir una fuente, al menos en alguno de los circuitos, que provea la energía que se pierde por disipación. Llamamos al circuito conectado a la fuente *circuito primario*, y a el (o los) circuito(s) acoplado(s), *circuitos secundarios*.

Para poder plantear las ecuaciones de un circuito necesitábamos proponer un sentido de la corriente. En el caso de circuitos acoplados, necesitamos además indicar cómo están conectadas las inductancias entre sí. Para ilustrar por qué, supongamos que tenemos una espira que tiene que generar un campo contrario $\vec{B_C}$ tal que se oponga a la variación de flujo generada por un campo externo a la espira. El sentido de enrollamiento de la espira determinará el sentido de la corriente inducida, como se muestra en la Figura 1. Cuando planteamos un circuito necesitamos saber cómo es la polaridad de los elementos. En el caso de capacitancias, inductancias y resistencias, siempre cae la tensión en la dirección de la corriente. Es decir, el sentido de la corriente determina la polaridad. En los casos ilustrados en la Figura 1, la polaridad del acoplamiento está determinada por el sentido de enrollamiento.

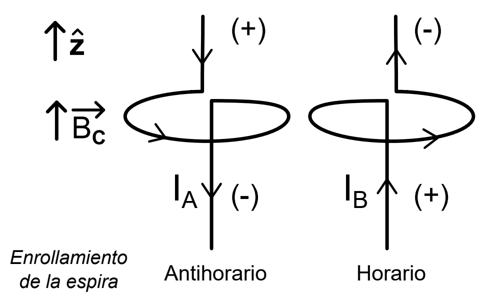


Figura 1: *Una variación de flujo de campo externo con sentido $-\hat{z}$, genera corrientes cuyo sentido depende del sentido de enrollamiento de las espiras. Es decir, el enrollamiento determina la polaridad de la espira. En ambos casos, el campo contrario $\vec{B_C}$ apunta en el sentido de $\hat{z}$.*

Para indicar la forma espacial en la que están conectadas las inductancias entre sí se utiliza la **notación de punto**. El punto define el positivo en la polaridad del circuito secundario cuando la corriente entra al punto en el circuito primario. En el caso de circuitos primarios y secundarios superpuestos (como dos bobinas una dentro de otra), M será positivo en el caso de tener el mismo sentido de enrollamiento y viceversa. Supongamos entonces que tenemos dos mallas como en la Figura 2, que consta de dos circuitos acoplados inductivamente.

Las ecuaciones para cada malla quedan:

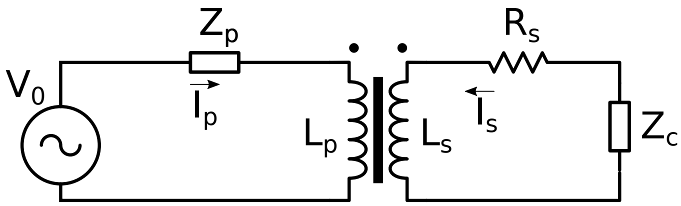


Figura 2: *Esquemático de circuitos acoplados a través de un transformador.*

$$
\begin{aligned}
V_0 &= I_p Z_p + i\omega L_p I_p + i\omega M I_s \\
0 &= I_s Z_s + I_s R_s + i\omega L_s I_s + i\omega M I_p
\end{aligned} \tag{11}
$$

Noten que el término de acoplamiento en cada malla está determinado por la corriente que circula en la otra. Partiendo de esas ecuaciones y definiendo $a = Z_c + R_s + i\omega L_s$ y $b = Z_p + i\omega L_p$ puedo despejar las expresiones para la corriente de cada circuito:

$$
I_p = \frac{V_0}{b}\left(\frac{1}{1+\frac{(\omega M)^2}{ab}}\right) \xrightarrow{M\to 0} \frac{V_0}{b} \tag{12}
$$

$$
I_s = -V_0 \frac{i\omega M}{ab + (\omega M)^2} \xrightarrow{M\to 0} 0 \tag{13}
$$

¿Cómo es la caída de tensión en la bobina del circuito secundario en el caso de circuito abierto? En ese caso, $Z_c \to \infty$ y $I_s = 0$, con lo cual la caída de tensión en la inductancia del secundario es:

$$
|V_{L_s}| = |V_0| \frac{\omega M}{\sqrt{Z_p^2 + (\omega L_p)^2}} \tag{14}
$$

Si la impedancia Z_p está dada solo por una resistencia R y además se cumple la condición $R^2 \ll (\omega L_p)^2$ y si escribimos $M = k\sqrt{L_p L_s}$, entonces

$$
|V_{L_s}| \simeq |V_0| k \sqrt{\frac{L_s}{L_p}} \tag{15}
$$

En el caso de una bobina, en general la inductancia es proporcional al cuadrado de la cantidad de espiras, es decir $L \propto N^2$. Si el acoplamiento es perfecto, llegamos a la conocida expresión para el transformador ideal, en la cual la relación de número de espiras del primario y secundario determina la relación entre las tensiones. Es decir, puedo variar la tensión de un circuito acoplando bobinas con distinta cantidad de espiras. Nótese que la tensión inducida en el secundario puede ser **mayor o menor** que la tensión aplicada en el primario.

$$
\frac{|V_{L_s}|}{|V_{L_p}|} = \frac{N_s}{N_p} \tag{16}
$$

Si el acoplamiento no es perfecto, mientras que las bobinas tengan la misma geometría (y solo se diferencien por su numero de vueltas), la proporcionalidad seguirá siendo válida pero aparecerá una constante distinta de 1.

Esta propiedad es la que se aprovecha en las estaciones de transformación para transportar la energía eléctrica, en las cuales se aumenta la tensión para poder disminuir la corriente manteniendo la potencia.

Ejercicio para la clase. ¿Qué relación tienen que tener las impedancias de los circuitos para que la potencia entregada al secundario sea máxima? ¿Para qué relación de impedancia entre ambos circuitos la transferencia de potencia (es decir, el cociente entre la potencia disipada en el secundario y la disipada en el primario) será máxima? ¿Es la misma condición? Traten de resolver esas preguntas analíticamente o simulando el circuito.

2.1. Transferencia de potencia

Si queremos encontrar las condiciones del transformador que nos permitan transferir la máxima cantidad de potencia al circuito secundario (disipando lo mínimo posible en el primario), podemos calcular la transferencia como el cociente de las potencias disipadas por los elementos resistivos en cada caso. Para ello, supongamos que en el circuito de la Figura 2, $Z_p = R_p$ y $Z_c = R_c$. Entonces, la transferencia es:

$$P_T = \frac{P_s}{P_s} = \frac{|I_s|^2(R_c + R_s)}{|I_s|^2 R_p} \tag{17}$$

Usando la Ec. 12 y la Ec. 13:

$$P_T = \frac{R_c + R_s}{R_p} \frac{\omega^2 M^2}{(R_c + R_s)^2 + \omega^2 L_s^2} \tag{18}$$

donde puede verificarse que la condición de máxima transferencia de potencia se obtiene cuando $Rc{+}Rs$ satisfacen:

$$\boxed{R_c + R_s = \omega L_s} \tag{19}$$

y la forma funcional es como la de la Figura 3.

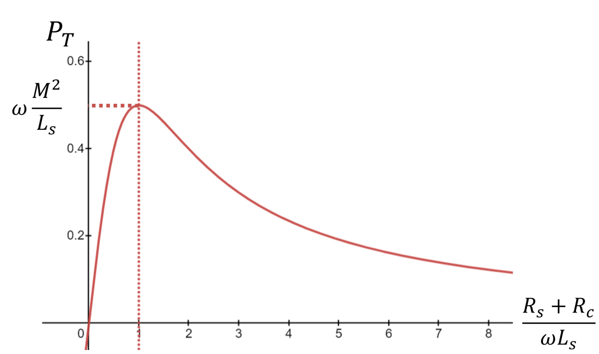


Figura 3: *Transferencia de potencia de un transformador, como el de la Figura 2 tomando $Z_p \equiv R_p$ y $Z_c \equiv R_c$.*

Bibliografía

[1] Mahmood Nahvi and Joseph Edminister. *Schaum's outline of electric circuits, seventh edition*. McGraw-Hill Education, Columbus, OH, 7 edition, October 2017.

[2] Juan G Roederer. *Electromagnetismo elemental*. Eudeba, June 2020.