# Apéndice A

# Medición de diferencias de fase

Dadas dos señales armónicas dependientes del tiempo

$$V_1 = V_{10}\cos(\omega\, t) \tag{A.1}$$

$$V_2 = V_{20}\cos(\omega\, t + \phi) \tag{A.2}$$

cuyos respectivos gráficos se ilustran en la figura A.1, buscamos un modo simple de obtener la diferencia de fase, $\phi$, empleando un osciloscopio. Estudiaremos a continuación dos métodos sencillos y luego mencionaremos un tercero, que no siempre está disponible.

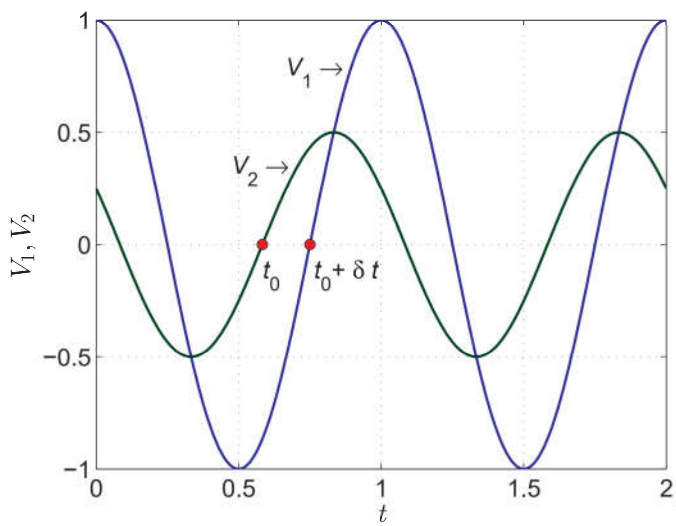


Figura A.1: *Dos señales armónicas defasadas. Tienen amplitudes diferentes pero sus frecuencias son iguales.*

## A.1. Mediante figuras de Lissajous

Podemos considerar a las expresiones (A.1) y (A.2) como la representación paramétrica de una curva en el plano XY asociando $V_1$ y $V_2$ con las componentes $x$ e $y$ de dicha representación, de modo tal que se tiene

$$\begin{aligned} V_x &= V_{x0}\cos(\omega\, t) \qquad (A.3) \\ V_y &= V_{y0}\cos(\omega\, t + \phi) \qquad (A.4) \end{aligned}$$

cuyo gráfico se ilustra en la figura A.1,

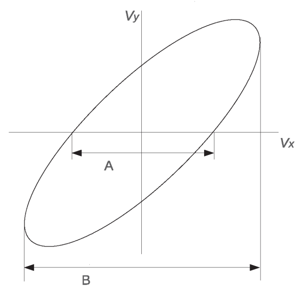


Figura A.2: *Figura de Lissajous para el caso de frecuencias iguales.*

Para los instantes $t$ tales que $\omega\, t = k\,\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ resulta

$$V_x = \pm V_{x0} = \pm\frac{B}{2} \qquad (A.5)$$

Para $t$ tal que $\omega\, t + \phi = \pi/2 + k\,\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$V_x = \pm V_{x0}\cos(\pi/2 - \phi) = \pm V_{x0}\,\mathrm{sen}\,\phi = \pm\frac{A}{2} \qquad (A.6)$$

Por tanto,

$$\mathrm{sen}\,\phi = \pm\frac{A}{B} \qquad (A.7)$$

Puede demostrarse que también vale

$$\mathrm{sen}\,\phi = \pm\frac{C}{D} \qquad (A.8)$$

donde $C$ y $D$ son los análogos a $A$ y $B$, respectivamente, medidos sobre el eje $V_y$. De las ecuaciones (A.7) y (A.8) resulta

$$\boxed{|\phi| = \mathrm{arc\,sen}\,\frac{A}{B} = \mathrm{arc\,sen}\,\frac{C}{D}} \qquad (A.9)$$

## A.2. Midiendo retrasos temporales

Sea $t_0$ un instante en el que: a) $V_2 = 0$ y b) $V_2$ cruza por cero con pendiente de signo dado, por ejemplo positivo, como el ilustrado en la figura A.1. La hipotesis a) conduce a la condición: $\cos(\omega\, t_0 + \phi) = 0$, lo que implica

$$\omega\, t_0 + \phi = \pi/2 + k\,\pi \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Pero si se incorpora la hipotesis b) corresponde escribir

$$\omega\, t_0 + \phi = \pi/2 + 2\, k_0\, \pi \quad \text{con} \quad k_0 \in \mathbb{Z} \tag{A.10}$$

dado que si bien la función $\cos(x)$ cruza por cero dos veces por período, lo hace sólo una vez, por período, con pendiente de signo dado. Nótese que $k_0$ no tiene por qué coincidir con $k$.

Sea ahora $\delta t$ el lapso más breve necesario para que $V_1$ cruce por cero con pendiente de igual signo al ya dado, esto implica

$$\omega\,(t_0 + \delta t) \;=\; \pi/2 + 2\, k_1\, \pi \quad \text{con} \quad k_1 \in \mathbb{Z} \tag{A.11}$$

De las condiciones (A.10) y (A.11) resulta

$$\phi = \omega\, \delta t + 2\,(k_0 - k_1)\,\pi = \omega\, \delta t + 2\, k'\,\pi$$

con $k' = k_0 - k_1 \in \mathbb{Z}$, de donde se concluye

$$\boxed{\phi = \omega\, \delta t} \tag{A.12}$$

## A.3. Convención importante

Dadas las expresiones (A.1) y (A.2), se dice que la señal $V_2$ *adelanta* en $\phi$ a $V_1$.

**Observación:** Note que $V_2$ alcanza sus máximos, mínimos y ceros con igual pendiente, *antes* que $V_1$. Es por eso que se dice que $V_2$ *adelanta* a $V_1$.

## A.4. Método 3 (no siempre disponible)

Muchos osciloscopios modernos ofrecen un conjunto de mediciones automáticas, esto es: que no requieren que el operador realice mediciones manuales sobre la pantalla. Entre ellas se encuentran: valores medio, pico a pico, eficaz, frecuencia, período, etc. En algunos casos también se incluye la diferencia de fase entre las señales registradas en sendos canales.