Práctica 4: filtros eléctricos; circuitos integradores y derivadores pasivos

Adaptación por Nicolás Torasso, Eliana Depaoli, Facundo Sanchez Oyarbide y Gabriela Pasquini

de las Guías de César Moreno 2020, (1c 2023)

1. Filtros

Se denominan filtros a los circuitos cuya salida depende de la frecuencia ω de la señal de entrada. Los más comunes son los *pasabajos* y los *pasaaltos*. En los primeros, la señal de salida es prácticamente igual a la de entrada cuando ω es significativamente menor que cierta frecuencia crítica ω_c, mientras que dicha salida resulta prácticamente nula cuando $\omega \gg \omega_c$. En otras palabras: las señales de frecuencias bajas comparadas con ω_c trasponen el filtro sin sufrir alteración, mientras que las altas resultan fuertemente atenuadas. De ahí el nombre pasabajos. Lo análogo ocurre para los pasaaltos. Existen también filtros en los que las señales de un determinado rango acotado de frecuencias pueden trasponerlo sin sufrir modificaciones, mientras que las de frecuencias mucho menores o mucho mayores que las de dicho rango son fuertemente atenuadas. Estos filtros se denominan *pasabanda*. Análogamente, existen los *eliminabanda*, que son complementarios a los pasabanda.

1.1. RC pasabajos

Considere el circuito de la figura 1 en el caso en que la señal de entrada es una señal armónica de frecuencia ω, $V_i(t) = V_i \sin \omega t$.

La tensión de salida, $V_0(t)$, se toma a partir de la caída de tensión sobre el capacitor, $V_C(t)$, y se expresa para todo tiempo t en notación compleja de la siguiente manera:

$$V_0 = V_C = IZ_C = \frac{V_i}{Z_T} Z_C = \frac{V_i}{R - \frac{j}{\omega C}} \frac{-j}{\omega C} = \frac{V_i \frac{-j}{\omega C}}{R - \frac{j}{\omega C}} \tag{1}$$

siendo I la corriente que circula por el capacitor (que en este caso coincide con la corriente de la única malla), Z_C la impedancia del capacitor, Z_T la impedancia total del circuito vista desde la fuente, y j la unidad imaginaria ($j^2 = -1$).

Multiplicando numerador y denominador por $j\omega C$ resulta

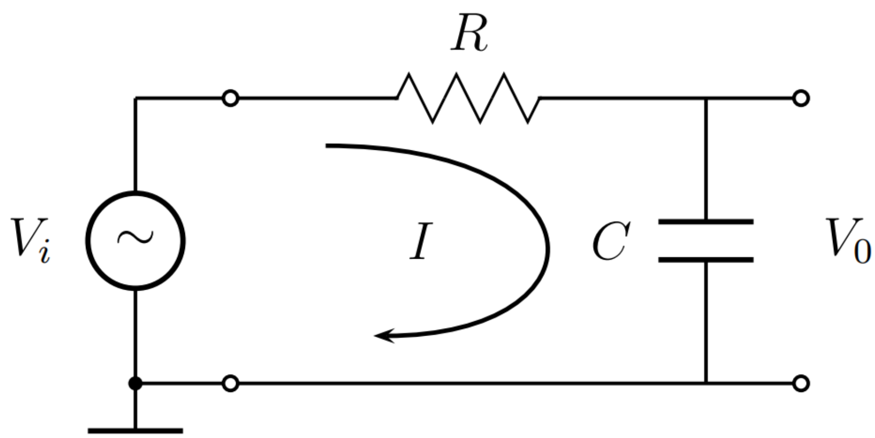

Figura 1: *un generador alimenta un circuito RC serie. La tensión de entrada es la provista por la fuente, y la señal de salida se toma de la caída de tensión sobre el capacitor.*

$$V_0 = \frac{V_i}{1 + j\omega RC} = \frac{V_i}{1 + j\omega/\omega_0} \quad \text{siendo} \quad \boxed{\omega_0 = 1/RC} \tag{2}$$

La función transferencia, T, resulta entonces

$$\boxed{T \equiv= \left|\frac{V_0}{V_i}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}}} \tag{3}$$

Para calcular la diferencia de fase entre V_C y V_i conviene racionalizar la última expresión de V_0

$$V_C = \frac{V_i(1 - j\omega/\omega_0)}{1 + (\omega/\omega_0)^2} \tag{4}$$

De donde resulta

$$\boxed{\phi = \arctan \frac{\Im\{V_C/V_i\}}{\Re\{V_C/V_i\}} = -\arctan(\omega/\omega_0)} \tag{5}$$

Los gráficos de la función transferencia y el desfasaje en función de ω/ω_0 se ilustran en la figura 2.

1.1.1. Atenuación, desfasaje y diagrama de Bode

Se define la *atenuación*, A, como

$$\boxed{A \equiv 20 \log_{10}(\mathrm{T}) \quad [\mathrm{dB}]} \tag{6}$$

y se expresa en *decibeles* (dB). Por ejemplo, una atenuación A = -20 dB se corresponde con una tensión de salida que es 10 veces inferior a la de entrada, esto es, con T = 0.1.

Para el caso del filtro RC pasabajos resulta

$$A(\omega) = -10 \log_{10}[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2] \quad \mathrm{dB} \tag{7}$$

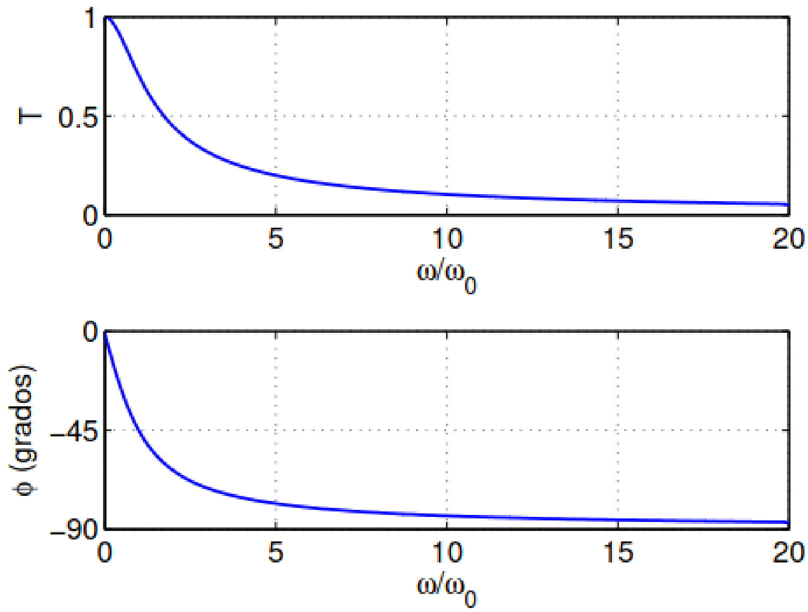

Figura 2: *Funciones transferencia y desfasaje correspondientes a un filtro RC pasabajos. Para* $\omega/\omega_0 \rightarrow 0$*, resulta:* $T \rightarrow 1$ *y* $\phi \rightarrow 0$*; mientras que para* $\omega/\omega_0 \rightarrow \infty$*, se obtiene:* $T \rightarrow 0$ *y* $\phi \rightarrow -90^0$*.*

y pueden verificarse el siguiente límite y asíntota

$$\lim_{\omega \to 0} A(\omega) = 0 \quad \text{dB} \tag{8}$$

$$A(\omega) \sim -20 \, \log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \quad \text{dB} \qquad \text{para} \qquad \omega \gg \omega_0 \tag{9}$$

La asíntota indica que para frecuencias $\omega \gg \omega_0$ la atenuación **decrece a una razón constante de 20 dB por década**[1]. Esta pendiente es una medida de la calidad del circuito para actuar como filtro. Cuanto mayor sea el módulo de dicha pendiente, mayor será la capacidad del filtro para discriminar frecuencias.

En el caso del filtro que nos ocupa, a la región $\omega \ll \omega_0$ de la denomina *banda pasante* (dado que $A \approx 0$, es decir, $T \approx 1$), y a la región $\omega \gg \omega_0$ se la denomina *banda rechazada.*

Obsérvese además que en la banda pasante es $\phi \approx 0$ por lo que resulta que la señal de salida es prácticamente igual a la de entrada (el filtro no atenúa ni desfasa).

La frecuencia ω_0 se denomina *frecuencia de corte*, se denota también ω_c, y para ella resulta

$$A(\omega_c) = -3{,}01 \text{ dB} \quad \phi(\omega_c) = -45^o \tag{10}$$

y es además la frecuencia para la cual se cortan las asíntotas horizontal y oblícua de la curva A en función de $\log_{10}(\omega/\omega_0)$ (gráfico superior de la figura 3). De ello proviene su denominación.

[1]Se denomina década a cada intervalo de amplitud unidad en escala logarítmica, esto es, a cada intervalo en el que la magnitud de interés se incrementa en un factor 10 cuando se la mide en una escala lineal.

Observe además, que para la frecuencia de corte resulta

$$T(\omega_c) = 1/\sqrt{2} \approx 0{,}7 \tag{11}$$

de modo que a dicha frecuencia, la amplitud de la tensión de salida del filtro decae al 70 % de la de entrada.

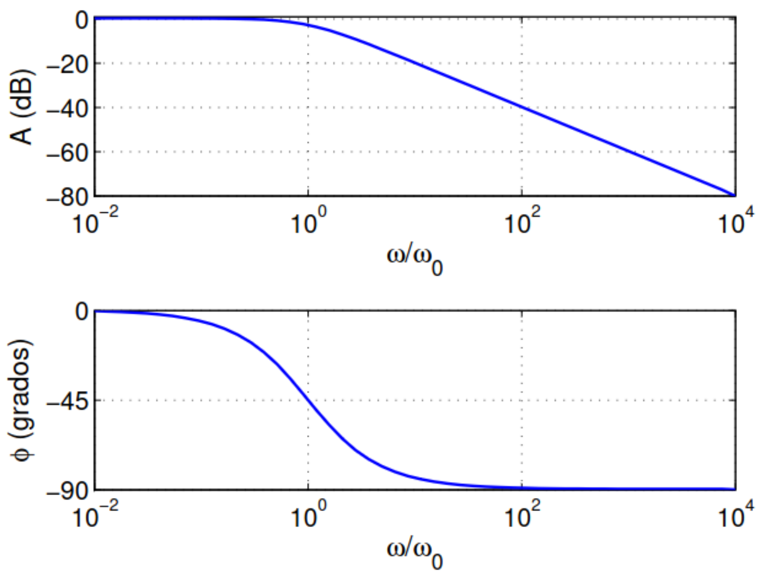

Figura 3: *Diagrama de Bode para un filtro RC pasabajos. Notar que para $\omega \gg \omega_0$ la atenuación decrece a una razón constante de 20 dB por década.*

1.2. RC pasaaltos

Considere el circuito de la figura 4.

Verifique que, en el caso en que se alimente al circuito con una onda armónica de frecuencia angular ω, la función transferencia (T), el desfasaje (ϕ) y la atenuación (A) son, respectivamente,

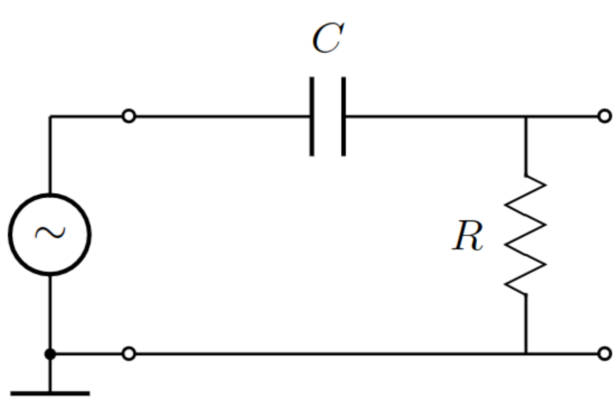

Figura 4: *Un generador de funciones alimenta a un circuito RC serie. La señal de salida se toma de la caída de tensión sobre la resistencia.*

$$\boxed{T = \frac{1}{\sqrt{1+x^{-2}}} \quad \phi = -\mathrm{arctang}(\mathrm{x}^{-1}) \quad A = -\log_{10}(1+x^{-2})\mathrm{dB}} \tag{12}$$

siendo $x = \omega/\omega_0 = \omega RC$. Note que la frecuencia de corte coincide con la del caso anterior.

El diagrama de Bode se ilustra en la figura 5.

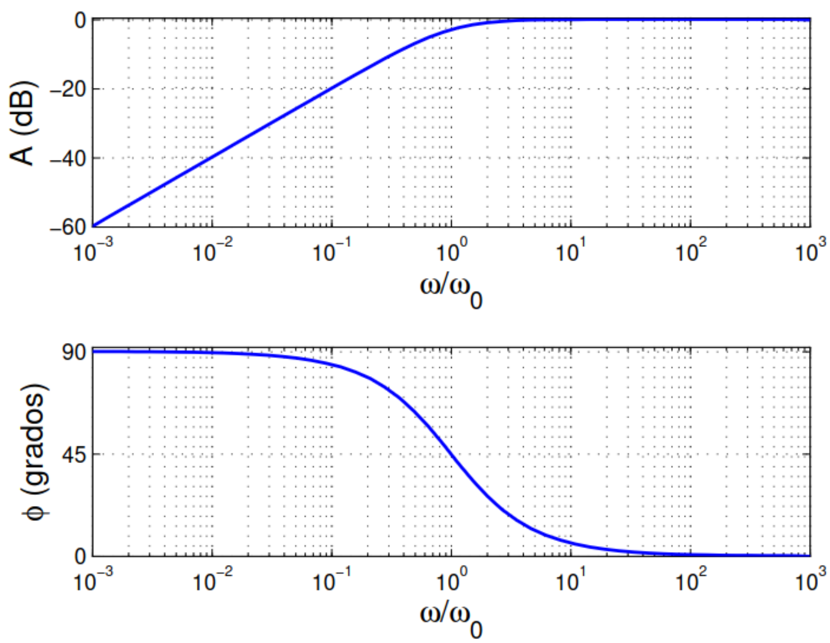

Figura 5: *Diagrama de Bode para un filtro RC pasaaltos. Notar que para $\omega \ll \omega_0$ la atenuación crece a una razón constante de 20 dB por década.*

La banda pasante es ahora aquella tal que $\omega \gg \omega_0$, y en ella vale $T \approx 1$, $\phi \approx 0$ y $A \approx 0$. En la banda rechazada se tiene $T \ll 1$, $\phi \approx 90^0$ y $A \ll 1$, y corresponde a $\omega \ll \omega_0$. Es el caso opuesto al del filtro anterior.

En la frecuencia de corte se tiene, nuevamente,

$$A(\omega_c) = -3{,}01 \text{ dB} \quad \phi(\omega_c) = -45^o \tag{13}$$

Obsérvese además que en la banda rechazada la atenuación varía nuevamente a una razón constante de 20 dB por década, por lo que este filtro es de la misma calidad que el anterior.

1.3. RL pasabajos

Considere el circuito de la figura 6. En el caso en que el generador entregue una señal armónica de frecuencia angular ω, verifique que la función transferencia (T), el desfasaje (ϕ) y la atenuación (A) son, respectivamente,

$$\boxed{T = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \phi = -\text{arctang(x)} \quad A = -\log_{10}(1+x^2)\text{dB}} \tag{14}$$

siendo $x = \omega/\omega_0 = \omega L/R$.

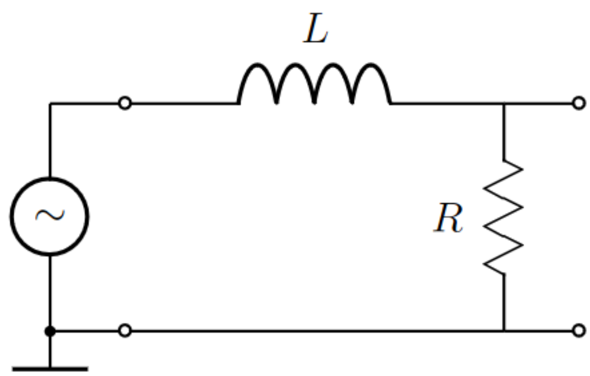

Figura 6: *Un generador de funciones alimenta un circuito RL serie. La señal de salida se toma de la caída de tensión sobre la resistencia.*

De las ecuaciones expuestas se deduce que este circuito se comporta igual que el RC pasabajos, con la única salvedad de que ahora la frecuencia de corte es $\boxed{\omega_0 = R/L}$.

El diagrama de Bode coincide con el de la figura 3, y valen todas las consideraciones expuestas en la sección 1.1.

1.4. RL pasaaltos

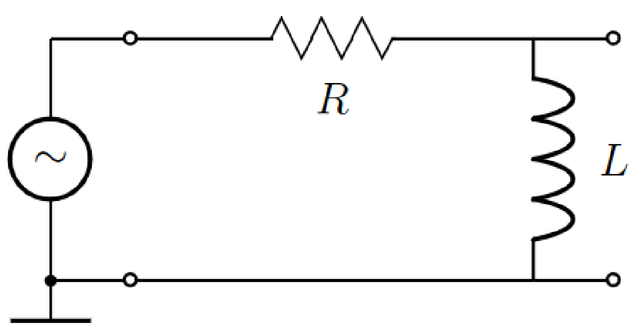

Figura 7: *Un generador de funciones alimenta un circuito RL serie. La señal de salida se toma de la caída de tensión sobre la inductancia.*

Considere el circuito de la figura 7. En el caso en que el generador entregue una señal armónica de frecuencia angular ω, verifique que la función transferencia (T), el desfasaje (ϕ) y la atenuación (A) valen, respectivamente,

$$\boxed{T = \frac{1}{\sqrt{1+x^{-2}}} \quad \phi = -\mathrm{arctang}(\mathrm{x}^{-1}) \quad A = -\log_{10}(1+x^{-2})\mathrm{dB}} \tag{15}$$

siendo $x = \omega/\omega_0 = \omega L/R$, que coincide con el caso RL pasabajos.

Se deduce que el circuito que nos ocupa se comporta igual que el RC pasaaltos, con la única salvedad de que la frecuencia de corte es, en este caso, $\boxed{\omega_0 = R/L}$.

El diagrama de Bode coincide con el de la figura 5, y valen todas las consideraciones expuestas en la sección 1.2.

Nota: debido a que las inductancias reales poseen resistencias internas no despreciables, este filtro resulta en la práctica menos eficiente que el pasaaltos RC. Piensen cómo será la transferencia de un circuito real RL pasaaltos.

1.5. Filtros de orden superior

El orden de un filtro está asociado a los decibeles por década con los que atenúa, y viene dado por la potencia a la que está elevado el cociente $x = \omega/\omega_c$ en el denominador. Por ejemplo, pueden verificar que un circuito serie LC serie puede actuar como filtro de orden 2 pasaaltos o pasabajo según se tome la salida en la inductancia o el capacitor respectivamente. El lector interesado puede verificar que en este caso la atenuación es de 40 db/dec (tener en cuenta que las inductancias reales siempre tienen una resistencia interna). Cuanto mayor es el orden del filtro más abrupto es el corte alrededor de la frecuencia de corte.

1.6. Filtros pasabandas y eliminabandas

Los filtros que solo dejan pasar señales con frecuencias cercanas a las de corte se llaman pasabandas. Un ejemplo obvio de estos fltros es un circuito RLC serie resonante, tomando la señal de salida sobre la resistencia. De la misma manera, un filtro RLC paralelo con una antiresonancia puede considerarse como un filtro eliminabanda. Pueden analizar los circuitos estudiados en la practica de resonancias bajo esta nueva óptica.

2. Integradores y derivadores

2.1. Circuitos integradores

Consideren el circuito de la Figura 1 analizado en la Subsección 1.1. En la región de atenuación $\omega \gg \omega_c$, la señal de salida tiene una amplitud mucho menor que la de entrada y está desfasada en un ángulo $\phi \sim -\pi/2$. Podemos decir por lo tanto que, si la señal de entrada es una señal armónica $V_i(t) = V_i \sin \omega t$, la señal de salida es $V_o(t) \sim -V_o \cos \omega t = V_o \int_0^t \sin \omega t' d(\omega t')$.

Esto es completamente general, sea cual sea la forma temporal de la señal de entrada, y se puede entender fácilmente. Recordemos que la caída de tensión en el capacitor es:

$$V_C(t) = Q(t)/C = \frac{1}{C} \int_0^t I(t')dt' = \frac{1}{C} \int_0^t \frac{V_R(t')}{R} dt' \tag{16}$$

donde V_R es la caída de tensión sobre la resistencia.

Además, para todo tiempo: $V_i(t) = V_R(t) + V_C(t)$. En el rango de frecuencias altas (i.e si la menor frecuencia de la señal de entrada $\omega \gg \omega_c$), la señal de salida está atenuada, entonces $V_C \ll V_R$ y por lo tanto $V_i(t) \sim V_R(t)$. Por lo tanto:

$$V_o(t) = V_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t \frac{V_R(t')}{R} dt' \sim \frac{1}{RC} \int_0^t V_i(t')dt' \tag{17}$$

La señal de salida será entonces aproximadamente la integral de la señal de entrada, atenuada. Por ejemplo, si la señal de entrada es una onda cuadrada, la salida será aproximadamente triangular. Cuanto mayor es la atenuación, mejor será la integración. Pueden verificar que lo mismo ocurrirá con el circuito pasabajos RL descripto en la Figura 6.

2.2. Circuitos derivadores

Consideren el circuito de la Figura 4 analizado en la Subsección 1.2. En la región de atenuación $\omega \ll \omega_c$, la señal de salida tiene una amplitud mucho menor que la de entrada y está desfasada en un ángulo $\phi \sim \pi/2$. Podemos decir por lo tanto que, si la señal de entrada es una señal armónica $V_i(t) = V_i \sin \omega t$, la señal de salida es $V_o(t) \sim V_o \cos \omega t = V_o d(\sin \omega t)/d(\omega t)$. . Nuevamente, esto es completamente general, sea cual sea la forma temporal de la señal de entrada. Nuevamente, la caida de tensión en la resistencia es:

$$V_R(t) = RI(t) = R\frac{d(Q(t))}{dt} = R\frac{d[(CV_C(t))]}{dt} = RC\frac{d(V_C(t))}{dt}. \tag{18}$$

donde V_C es la caída de tensión sobre el capacitor.

Además, nuevamente, para todo tiempo: $V_i(t) = V_C(t) + V_R(t)$. En el rango de frecuencias bajas (i.e si la mayor frecuencia representativa de la señal de entrada $\omega \ll \omega_c$), $V_R \ll V_C$ y por lo tanto $V_i(t) \sim V_C(t)$. Por lo tanto:

$$V_o(t) = V_R(t) = RC\frac{d(V_C(t))}{dt} \sim RC\frac{d(V_i(t))}{dt} \tag{19}$$

La señal de salida será en este caso aproximadamente la derivada de la señal de entrada, atenuada. Por ejemplo, si la señal de entrada es una triangular, la salida será aproximadamente cuadrada. Cuanto mayor es la atenuación, mejor será la derivación.

En este caso el circuito pasaaltos RL descripto en de la Figura 7 no es particularmente adecuado, debido a la resistencia interna de la bobina. Piensen como será la forma funcional de la señal de salida para una bobina real en ese circuito.