Práctica 2: fenómenos transitorios en circuitos eléctricos

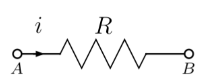
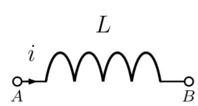
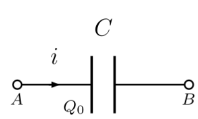
Adaptación por Nicolás Torasso y Gabriela Pasquini (1c 2023) de las Guías de César Moreno 2020

Resumen

Cuando al menos uno de los componentes de un circuito eléctrico cambia alguna de sus propiedades, se inicia una etapa en la que también se modifican las variables que describen el estado del circuito (corrientes de ramas o mallas, o diferencias de tensión entre nodos), tendiendo hacia un estado de equilibrio compatible con dicho cambio. Los cambios que con mayor frecuencia se estudian en los cursos de Electricidad y Magnetismo son debidos a la apertura o cierre de llaves eléctricas. Pero también pueden considerarse modificaciones bruscas de los valores de resistencias, capacitores, inductancias y/o fuentes que lo compongan. Mientras las variables eléctricas evolucionan hacia el equilibrio, se dice que el circuito se encuentra en *estado o régimen transitorio*. Si no ocurren nuevos cambios, finalmente se alcanza el denominado *estado, o régimen, estacionario*. La frontera entre ambos estados es difusa, pero como se verá, pueden establecerse criterios cuantitativos basados en los valores de los componentes circuitales, que permiten distinguir, convencionalmente, entre ambos.

1. Descripción matemática

Las correspondientes caídas de tensión, ΔV_R, ΔV_L y ΔV_C, en función del tiempo en los elementos R, L y C, se modelan según se indica en el siguiente cuadro,

	$\Delta V_R \equiv V_B - V_A = -\,i\,R$
	$\Delta V_L \equiv V_B - V_A = -\,L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$
	$\Delta V_C \equiv V_B - V_A = -\frac{Q_0}{C} - \frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t$

donde se asumió que la corriente inicialmente circulante por la bobina es nula. Nótese que se ha considerado que la carga inicial del capacitor, Q_0, es la correspondiente a la placa del mismo por la que se considera que ingresa la corriente i.

Ejemplo: La corriente $i(t)$ circulante por un circuito como el de la Figura 1, en el que se asume que la llave se cierra en el instante $t = 0$, se modela de la siguiente manera: $i(t) = 0\ \forall t < 0$, y luego del

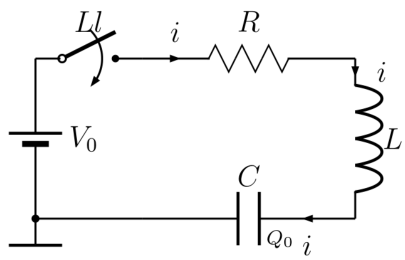


Figura 1: Circuito RLC serie en régimen transitorio. La llave se cierra en el instante $t = 0$.

cierre de la llave satisface la siguiente ecuación integral-diferencial:

$$V_0 = iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(t')dt' + \frac{Q_0}{C}, \quad t > 0 \tag{1}$$

que debe ser complementada con las condiciones iniciales correspondientes al circuito bajo estudio. A continuación, se analizarán los casos particulares de transitorios en circuitos RC, RL y RLC serie.

1.1. Transitorios en circuitos RC

Cuando se tiene un circuito RC como el de la figura 2, la ecuación 1 se reduce a la ecuación integral

$$V_0 = iR + \frac{1}{C}\int_0^t i(t')dt' + \frac{Q_0}{C}, \quad t > 0 \tag{2}$$

siendo $V_C(0) = Q_0/C$. Diferenciando la ecuación 2 respecto del tiempo se obtiene la ecuación diferencial:

$$0 = R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}i, \quad t > 0 \tag{3}$$

La condición inicial surge trivialmente de la ecuación 2, y resulta:

$$i(0) = \frac{V_0 - V_C(0)}{R} \tag{4}$$

Resolviendo la ecuación 3 con la condición inicial 4, se llega a

$$\boxed{i(t) = \frac{V_0 - V_C(0)}{R}e^{-\frac{t}{RC}}} \tag{5}$$

El intervalo temporal RC se denomina convencionalmente tiempo característico del transitorio RC, y habitualmente se lo denota con el símbolo τ. En el caso que nos ocupa, $\boxed{\tau = RC}$ corresponde al instante en el que la corriente se reduce a $e^{-1} \approx 0,37$ de su valor inicial. Expresado con otras palabras: $i(\tau)$ es aproximadamente, el 37 % de $i(0)$. De la ecuación 5 se desprende que la caída de tensión en el capacitor es

$$\boxed{V_C(t) = V_C(0) + [V_0 - V_C(0)](1 - e^{-t/RC})} \tag{6}$$

1.2. Transitorios en circuitos RL

Cuando se tiene un circuito RL como el de la figura 3, la ecuación 1 se reduce a

$$V_0 = iR + L\frac{di}{dt}, \quad t > 0 \tag{7}$$

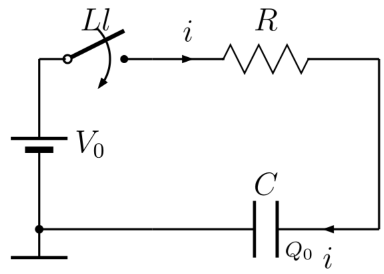


Figura 2: Circuito RC en régimen transitorio. La llave se cierra en $t = 0$.

con la condición inicial $i(0) = 0$; de donde resulta

$$i(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-t/\tau}) \tag{8}$$

$$V_L(t) = V_0 iR + e^{-t/\tau} \tag{9}$$

siendo en este caso $\tau = L/R$ el tiempo característico.

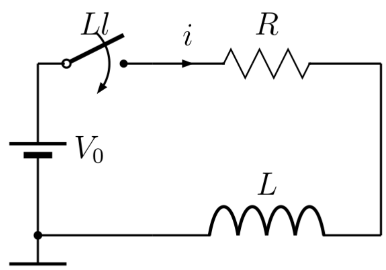


Figura 3: Circuito RL en régimen transitorio. La llave se cierra en $t = 0$.

1.3. Transitorios en circuitos RLC serie

Un circuito RLC serie como el de la figura 1, puede describirse mediante la ecuación íntegro-diferencial 1, o bien mediante su diferencial

$$0 = L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}i, \quad t > 0 \tag{10}$$

Planteando soluciones del tipo $i(t) \propto e^{\lambda t}, \lambda \in \mathbb{C}$, resulta la ecuación característica

$$L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} = 0 \tag{11}$$

cuyas raíces son

$$\lambda_{\pm} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - {\omega_0}^2} = -\alpha \pm \beta \tag{12}$$

donde se definió, para facilitar la notación,

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \beta = \sqrt{\alpha^2 - {\omega_0}^2} \tag{13}$$

Considerando que tanto R como L y C son positivas, se pueden dar tres casos según sea el radicando $(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC} = \alpha^2 - {\omega_0}^2$, positivo, nulo o negativo; dando lugar a su vez, a las soluciones denominadas *sobre-, crítica- y subamortiguadas*, respectivamente, que se verán a continuación.

Caso sobreamortiguado: $R > 2\sqrt{L/C}//$
En este caso, la ecuación característica tiene dos raíces reales distintas, y por lo tanto resulta:

$$i(t) = A\, e^{(-\alpha+\beta)t} + B\, e^{(-\alpha-\beta)t} \tag{14}$$

siendo A y B dos constantes reales que dependen de las condiciones iniciales. Asumiendo que el capacitor esta inicialmente descargado resulta $i(0) = 0$ and $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}|_{t=0} = V_0/L$, lo que implica

$$A = -B \quad \text{y} \quad V_0/L = 2A\beta \tag{15}$$

Por lo tanto se obtiene

$$i(t) = \frac{V_0}{2L\beta}\, e^{-\alpha t}(e^{\beta t} - e^{-\beta t}) \tag{16}$$

$$= \frac{V_0}{\sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 - \frac{L}{C}}} e^{-\frac{R}{2L}t} \sinh\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}t\right) \tag{17}$$

Caso críticamente amortiguado: $R = 2\sqrt{L/C}//$ En este caso el discriminante del polinomio característico se anula ($\beta = 0$) y sus dos raíces colapsan en una sola de multiplicidad dos

$$\lambda_\pm = -\frac{R}{2L} = -\alpha \tag{18}$$

La solución de la ecuación homogénea es entonces

$$i(t) = A\, e^{-\alpha t} + B\, t\, e^{-\alpha t} \tag{19}$$

Aplicando las condiciones iniciales $i(0) = 0$ y $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}|_0 = V_0/L$ se obtiene

$$A = 0 \quad \text{y} \quad B = \frac{V_0}{L} \tag{20}$$

luego resulta

$$i(t) = \frac{V_0}{L}\, t\, e^{-\alpha t} = \frac{V_0}{L}\, t\, e^{-\frac{R}{2L}t} \tag{21}$$

Caso subamortiguado: $R < 2\sqrt{L/C}//$ En este caso se tiene

$$\lambda_\pm = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega \tag{22}$$

siendo j la unidad imaginaria : $j^2 = -1$, y $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$. Resulta entonces:

$$i(t) = e^{-\alpha t}(\mathrm{A}\sin\omega t + \mathrm{B}\cos\omega t) = De^{-\alpha t}\sin(\omega t + \varphi), \quad D, \phi \in \mathbb{R} \tag{23}$$

Aplicando las condiciones iniciales $i(0) = 0$ y $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}|_0 = V_0/L$ se obtiene

$$i(t) = \frac{V_0}{\omega L}e^{-\alpha t}\sin(\omega t) = \frac{V_0}{\omega L}e^{-\frac{R}{2L}t}\sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\, t\right) \tag{24}$$

2. Transitorios en circuitos alimentados con ondas cuadradas

Es frecuente estudiar experimentalmente fenómenos transitorios en circuitos eléctricos alimentándolos con una onda cuadrada. Esto evita la necesidad de accionar manualmente una llave eléctrica. La fuente de onda cuadrada tiene la representación gráfica en función del tiempo que se ilustra en la figura 4 (a), y se comporta para el circuito como si fuese una fuente de tensión que alternativamente toma los valores V_0 y 0. Ver la figura 4 (b).
Tenga presente que mediante el control de "offset" (corrimiento de cero) de la fuente se puede modificar el valor medio de la onda cuadrada (ver figura 5 (a)), lo que corresponde a una disposición experimental como la ilustrada en la figura 5 (b).

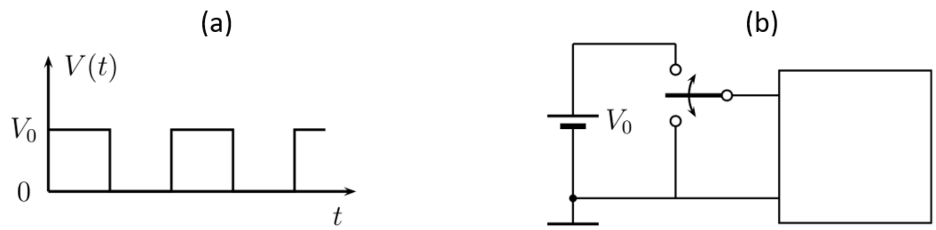


Figura 4: (a) Representación temporal de una onda cuadrada que adopta los valores V_0 y 0. (b) Una fuente de onda cuadrada alimenta un circuito genérico.

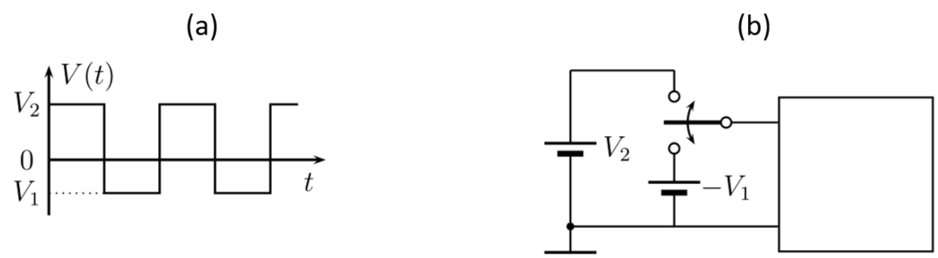


Figura 5: (a) Representación temporal de una onda cuadrada de valor medio arbitrario. (b) Una fuente de onda cuadrada alimenta un circuito genérico.