

Laboratorio 4.

Medición del módulo de elasticidad de Young

Objetivo

Determinación del módulo de Young de diversos materiales a partir de la flexión estática y dinámica de una viga en voladizo.

Ley de Hooke

La elasticidad es la capacidad de los materiales de recuperar su tamaño y su forma cuando se quitan las fuerzas que les producen deformaciones. Esta propiedad se encuentra en mayor o menor medida en todos los cuerpos sólidos.

Cuando se presiona un trozo de material, éste se deforma. Si la fuerza es suficientemente pequeña, el desplazamiento relativo de los diferentes puntos del material es proporcional a la fuerza. A esto se lo denomina comportamiento *elástico*. Si se toma un bloque rectangular de material de longitud l , ancho a y altura h , como el de la figura 1, y se le aplica entre los extremos una fuerza F , la longitud aumenta una cantidad Δl , proporcional a F . A esto se lo conoce como *ley de Hooke*.

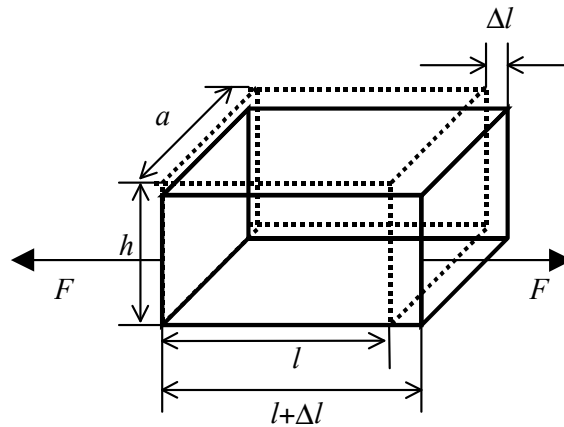


Figura 1: Estiramiento de una barra rectangular sometida a una tensión uniforme

Este alargamiento Δl depende de la longitud inicial del material, y también depende del área del bloque. Esto es porque se supone que la fuerza se distribuye en todos el volumen del cuerpo. Para obtener entonces una ley en la que el coeficiente de proporcionalidad entre fuerza y estiramiento sea independiente de las dimensiones del cuerpo, es más práctico escribir la ley de Hooke para un bloque rectangular de la forma:

$$F = EA \frac{\Delta l}{l} \quad (1)$$

donde A es el área transversal del bloque ($A = ah$), y E es una propiedad natural del material únicamente, conocida como *módulo de Young*.

En esta práctica, se intentará determinar el módulo de Young de distintos materiales, midiendo la flexión de una barra cilíndrica producida por la aplicación de una fuerza en uno de sus extremos.

Para una barra sujeta en un extremo (en voladizo), como la que se muestra en la figura 2 se puede calcular, para torsiones pequeñas, cuál es la deformación de la barra, y por lo tanto cuál es el desplazamiento vertical de cada uno de los puntos de la barra. Con el sistema de coordenadas de la Fig. 2, se puede calcular la flexión y de una barra cilíndrica en función de la fuerza (pequeña) aplicada sobre el extremo libre de la misma:

$$y(x) = \frac{32}{\pi d^4} \frac{F}{E} \left(Lx^2 - \frac{x^3}{3} \right), \quad (2)$$

$y(x)$ es el apartamiento de la posición de equilibrio a la distancia x del extremo fijo. La fuerza aplicada es F , d es el diámetro y L el largo de la barra desde el punto fijo hasta donde pende la masa m (el desarrollo teórico completo que lleva a esta expresión se encuentra en R.P. Feynman, *Física, Volumen II*).

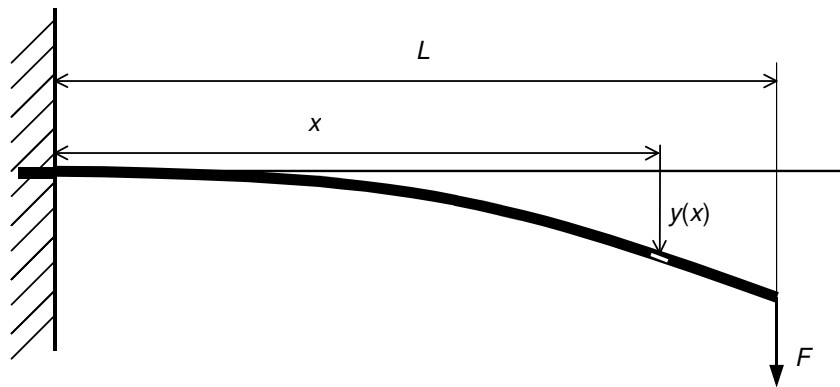


Figura 2: Barra en voladizo flexionada debido a la fuerza F colgada del extremo libre

La expresión (1) considera el problema estático, es decir, la configuración de equilibrio de la barra para una fuerza F aplicada al extremo. Midiendo la flexión de la barra producida por una fuerza conocida permite obtener el módulo de Young del material.

Otra forma de medir la elasticidad del material es analizar la frecuencia de la oscilación del cuerpo para una perturbación mecánica inicial. Así como la constante elástica de un resorte k determina la frecuencia de oscilación del mismo ($\omega = \sqrt{k/m}$), el módulo de Young del

material, junto con las dimensiones espaciales y los vínculos del problema determinan la frecuencia de oscilación mecánica de la barra: Si $y(x,t)$ representa el apartamiento de la posición de equilibrio en una posición x respecto del origen a un tiempo t , la forma más general de escribir el movimiento de una barra flexionada es:

$$y(x,t) = [A \cos(K_n x) + B \cosh(K_n x) + C \sin(K_n x) + D \sinh(K_n x)] \times \sin(\omega_n t + \varphi_0) \exp(-\alpha t). \quad (3)$$

K_n (que tiene unidades de 1/ longitud) define el modo espacial de oscilación, el cual tiene asociada una frecuencia *angular* de oscilación ω_n ($\omega_n = 2\pi f_n$). Estas dos cantidades están vinculadas a través de:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{I E}{\rho_l} K_n^4 - \alpha^2}. \quad (4)$$

que no es otra cosa que la relación de dispersión. I es el momento de inercia “*seccional*” que para un cilindro de diámetro d es : $I = \pi d^4 / 64$ (observar que I tiene unidades de $(\text{longitud})^4$) ; ρ_l es la densidad de la barra por unidad de longitud, es decir que tiene unidades de masa/longitud y α es una constante de amortiguamiento que tiene unidades de 1/tiempo.

Las condiciones de contorno son particulares de cada problema; para una viga sujeta firmemente (apoyo plano) en uno de sus extremos y libre en el otro, estas son las siguientes: $y(x=0) = y'(x=0) = 0$; $y''(x=L) = y'''(x=L) = 0$. Las dos primeras especifican que el extremo en $x = 0$ está fijo, y las dos segundas que el extremo en $x = L$ está libre. Este juego de condiciones son las que definen cuáles son los modos de flexión de la barra. Estos son los que cumplen la siguiente condición:

$$\cos(K_n L) \cosh(K_n L) + 1 = 0. \quad (5)$$

Los valores de K_n que satisfacen esta ecuación trascendente determinan los modos de oscilación espacial de la barra cilíndrica. Los tres primeros modos de la barra vibrando se muestran en la figura 3. Resulta: $K_1 = 1.875/L$, $K_2 = 4.694/L$, $K_3 = 7.855/L$, etc, donde L es el largo de la barra.

El desarrollo teórico completo de este tema se puede encontrar en L.D. Landau y E.M. Lifshitz, *Theory of Elasticity* (Pergamon Press, Oxford, 1959) y en S.C. Hunter, *Mechanics of continuous media* (J. Wiley & Sons, New York, 1986).

Los experimentos

Como se vio, se puede medir el módulo de Young tanto en forma estática como dinámica. En esta parte de la práctica se propone registrar la flexión de la varilla por medios ópticos.

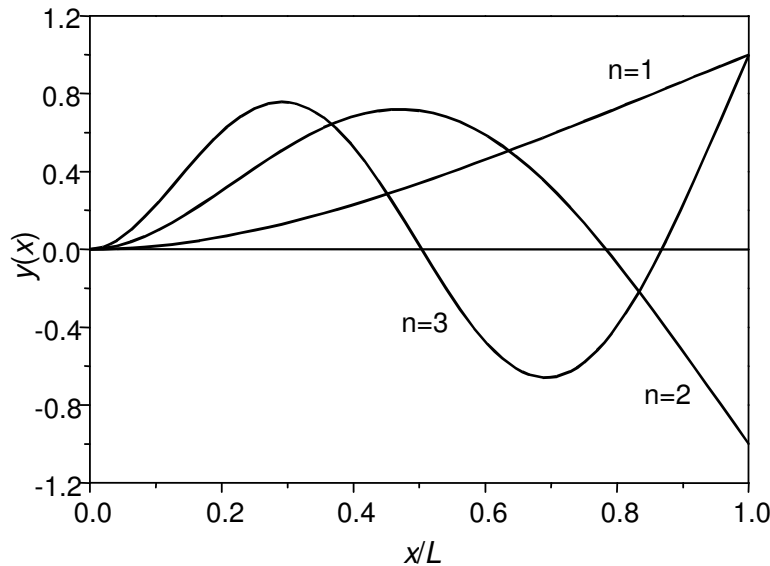


Figura 3: Los tres primeros modos de la barra fija en $x=0$, con el extremo $x=L$ libre

El dispositivo experimental sugerido es el que se muestra en la figura 4. La varilla se fija en un extremo apretándola con un apoyo plano (**por qué así?**). Cerca del extremo libre se adhiere un filo a la varilla, que junto con un segundo filo que está fijo a la mesa de trabajo, conforman una rendija que difracta la luz de un haz láser. Sobre el extremo libre se cuelgan distintos pesos que flexionan la barra y producen una (pequeña) variación del ancho de la rendija, que se detecta en forma muy sensible analizando el patrón de difracción de Fraunhofer del haz láser (**por qué? cuáles son las hipótesis de trabajo para que la aproximación de Fraunhofer sea válida?**): la intensidad del patrón de difracción de campo lejano es de la forma

Ver E. Hecht, A. Zajac, "Óptica", Addison Wesley Iberoamericana, (1986) sección 10.2.1, eq. (10.17)

$$I(\theta) = \left[\frac{\text{sen} \left(\frac{\pi h}{\lambda} \text{sen } \theta \right)}{\frac{\pi h}{\lambda} \text{sen } \theta} \right]^2, \quad (6)$$

donde θ es el ángulo desde la rendija al plano de observación, h el tamaño de la rendija y λ la longitud de onda de la radiación. De esta forma se puede determinar el valor del módulo de Young en una experiencia estática.

Para aplicar el método dinámico, se puede utilizar el mismo sistema, pero ya no será necesario medir con precisión la magnitud de la flexión. Lo que se busca en este caso es medir la frecuencia de oscilación de la varilla, ya sea a partir de una perturbación inicial. Así, con un fotodiodo se puede detectar la intensidad de la luz transmitida en el eje óptico del sistema (z en

la figura 4), y registrarla con una buena resolución temporal (**de cuánto? se le ocurre cómo hacer una estimación?**).

Si se perturba el sistema, la varilla normalmente tenderá a oscilar en su modo más bajo ($n=1$). No obstante, se puede perturbar de manera sutil a la varilla, de manera que inicialmente el modo excitado sea alguno de los modos superiores (**como debería ser la perturbación?**)

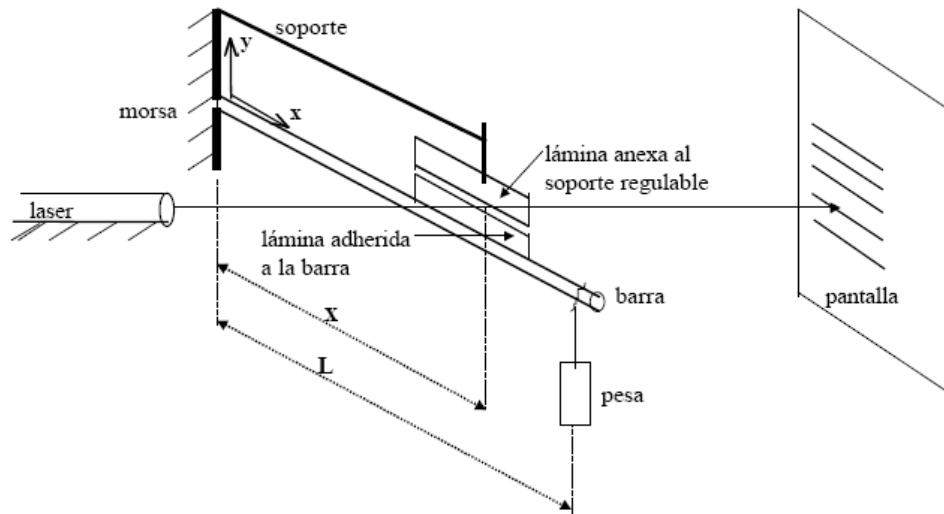


Figura 4: Dispositivo experimental sugerido

Material	E [Gpa]
aluminio	71
bronce	110
vidrio	40-90
cobre	123
acero	210
Grilón (copolímero de nylon-612)	1.5-3.8
teflón (politetrafluoretileno)	0.4-0.6
acrílico (polimetilmetacrilato)	2.2-2.4

Tabla 1: Módulo de Young de diferentes materiales

Bibliografía

1. R.P. Feynman, *The Feynman Lectures on Physics, Vol. II* (Addison-Wesley Iberoamericana, 1987).
2. L.D. Landau y E.M. Lifshitz, *Theory of Elasticity* (Pergamon Press, Oxford, 1959).
3. S.C. Hunter, *Mechanics of continuous media* (J. Wiley & Sons, New York, 1986).
4. W.B. Callister, *Materials Science and Engineering*, (J. Wiley & Sons, New York, 1995).

Apéndice A)

Cuando se aplica una fuerza de módulo F sobre los extremos de una barra, ésta experimenta una elongación $\Delta l = l - l_0$, donde l_0 y l son las longitudes inicial e instantánea de la misma. Se definen la tensión σ como la fuerza normal aplicada por unidad de área A y la deformación ε como la variación relativa de longitud del cuerpo, esto es,

$$\sigma = \frac{F}{A} \qquad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

Dentro del rango elástico de los materiales, la tensión y la deformación son proporcionales, verificándose una relación del tipo

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \qquad \text{(ley de Hooke)}$$

donde el factor de proporcionalidad E es el módulo de Young o elástico, característico del material. La Tabla I consigna valores típicos de este módulo para varios materiales.

Si consideramos una sección transversal cualquiera de la barra, como consecuencia del Principio de Acción y Reacción, el material que está a un lado de la misma ejercerá fuerzas iguales y de sentido contrario sobre el que está del otro lado. De acuerdo a la dirección de esas fuerzas interiores, para cada sección transversal se manifestarán momentos internos, que recibirán su nombre de acuerdo a la dirección de la fuerza. Así, si la barra se somete a esfuerzos transversales, como se representa en la Fig. A1 a), se hablará de momentos flectores; si se efectúan esfuerzos de corte, como los señalados en la Fig. A1 b), se manifestarán momentos torsores. Si las fuerzas normales y de corte son nulas para una dada sección transversal, se hablará de flexión pura.

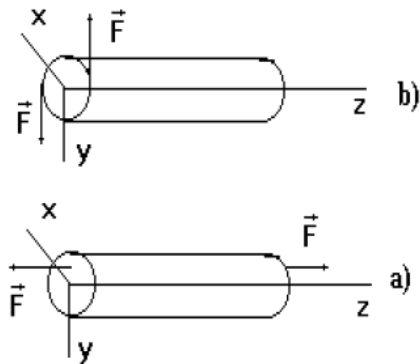


Figura A1: a) momento flector, b) momento torsor.

Consideremos un segmento de una barra curvada en un ensayo de flexión pura, como el que se muestra en la Fig. A2. El material de la parte interna de la barra está comprimido mientras que en la parte externa está estirado; existe en la parte central una superficie neutra, en la cual el material no sufre deformaciones.

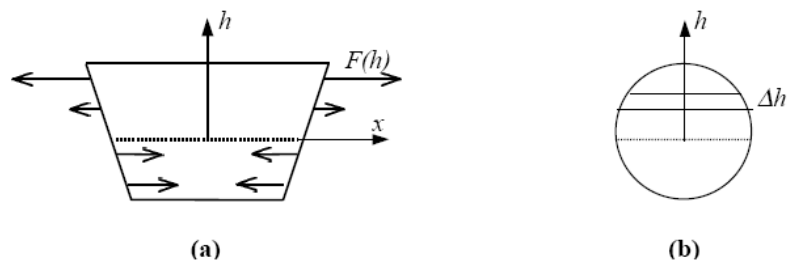


Fig. A2: Detalle de cortes de la viga sometida a flexión pura: (a) longitudinal, (b) transversal.

Como la fuerza depende del estado de tensiones en la viga, ésta será función de la coordenada \$h\$. De la ley de Hooke resulta

$$\frac{F(h)}{dA} = E \frac{Dl}{l}$$

donde \$F(h)\$ es la fuerza aplicada a una altura \$h\$ medida con respecto a la superficie neutra y \$dA\$ es la sección transversal de la viga comprendida entre \$h\$ y \$h+dh\$.

Considerando que

$$\frac{R+h}{l_0 + Dl} = \frac{h}{\Delta l} \quad \frac{R}{h} = \frac{l_0}{\Delta l}$$

resulta

$$F(h) = \frac{dA}{R} E h \tag{A2}$$

Las fuerzas que actúan por encima de la superficie neutra tienen sentido opuesto al de las fuerzas que actúan por debajo de dicha superficie; estos pares de fuerza tienen un momento no nulo respecto a la

superficie neutra. Integrando la densidad de momentos en toda la sección transversal se obtiene el momento total

$$M = \int_{A \text{ (sección transversal)}} dA h F(h)$$

Y utilizando (A2) resulta

$$M = \frac{E}{R} I \quad (\text{A3})$$

donde se define $I = \int_A dA h^2$.

La ecuación (A2) se conoce con el nombre de ecuación de la viga ya que permite hallar la forma de una varilla en distintas situaciones de esfuerzo. En particular, aplicando esta ecuación se puede determinar cuál es la forma de la viga voladiza con un peso en uno de sus extremos.

De la teoría de cálculo en dos variables resulta que la inversa del radio de curvatura está relacionada con la ecuación de la curva por [7]

$$\frac{1}{R} = \frac{\left| \frac{d^2 y}{dx^2} \right|}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

Ya que la deformación de la viga será pequeña será $|dy/dx| \ll 1$, luego

$$\frac{1}{R} = \left| \frac{d^2 y}{dx^2} \right| = - \frac{d^2 y}{dx^2}$$

y reemplazando en la ecuación de la viga resulta

$$M = -EI \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Por otra parte, el momento de flexión en la posición x está relacionado con la carga de la viga ($P = mg$) según

$$M = P (L - x)$$

Luego,

$$P(L - x) = -EI \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Integrando esta ecuación, con las condiciones de contorno: $y(x=0)=0$; $dy/dx(x=0)=0$ y sabiendo que para un cilindro $I = \pi d^4/64$ resulta la ecuación

$$y(x) = -\frac{32}{\pi d^4} \frac{mg}{E} \left(Lx^2 - \frac{1}{3}x^3 \right)$$

El signo (-) se debe a la elección del sistema de coordenadas elegido.

Apéndice B

La ecuación que rige la evolución espacio temporal del desplazamiento de una viga está dada por [4]

$$\frac{\partial^4 s}{\partial x^4} + b \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\rho_l}{I E} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \quad (B1)$$

donde el término proporcional a la derivada de s señala los efectos del amortiguamiento. Proponiendo la separación de variables

$$s(x, t) = Y(t) \cdot X(x)$$

y reemplazando esta forma funcional para s en B1 resulta

$$\begin{aligned} \ddot{Y} + 2\delta \dot{Y} + \omega_0^2 Y &= 0 \\ X^{IV} - k^2 X &= 0 \end{aligned}$$

donde

$$\delta = \frac{I E}{2\rho_l} b \quad \text{y} \quad \omega_0^2 = \frac{I E}{\rho_l} K_k^4$$

donde I es el momento de inercia **seccional**, E el módulo de Young, ρ_l es la masa por unidad de longitud y b un coeficiente de amortiguamiento.

La solución para $Y(t)$ resulta ser una senoidal con amortiguamiento δ y frecuencia

$$\omega_k = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad . \text{ La solución para } X(x) \text{ es:}$$

$$X(x) = A \cos(K_k x) + B \sin(K_k x) + C \cosh(K_k x) + D \sinh(K_k x)$$

Las condiciones de contorno que se le imponen al problema son escritas en términos de la función $X(x)$:

$$X(0) = X'(0) \quad (\text{por fijar la viga con una morsa plana. Si se fijase con una cuchilla por ejemplo, } X'(0) \text{ no está forzada a valer } 0)$$

$$X''(L) = X'''(L) = 0 \quad (\text{la derivada segunda nula en } L \text{ define el radio de curvatura en } L \text{ infinito})$$

Estas condiciones fijan que K debe verificar:

$$\cos(K_k L) \cosh(K_k L) + 1 = 0$$

De esta ecuación trascendente resultan los valores de K :

$$K_1 = 1.875/L; \quad K_2 = 4.694/L; \quad K_3 = 7.855/L$$

Al excitar la barra probablemente no se existe solo un modo de oscilación, por lo tanto $s(x_0, t)$ será una suma de varias senoidales amortiguadas.