

Deformación y vibración de una viga en voladizo

(Con figuras adaptadas de "An Introduction to the Mechanics of Solids", Crandall, Dahl and Lardner)

Un método general para determinar las fuerzas y los momentos que actúan a través de cualquier sección de un miembro esbelto, como puede ser una viga, que está en equilibrio es imaginar un hipotético corte o sección a través del miembro en el punto de interés. Si consideramos entonces cualquiera de las dos partes de la barra como un cuerpo libre aislado, la fuerza y el momento requeridos en la para mantener esa parte de la barra en equilibrio se pueden obtener aplicando las condiciones de equilibrio. En general, habrá una fuerza y un momento que actúan en la sección.

Por comodidad, solemos dividir la fuerza y el momento en componentes normal y paralelo al eje de la barra (Fig. 1). En la Fig. 1 el eje x se ha orientado se ha orientado de forma que coincida con el eje longitudinal del elemento. Los ejes y y z se encuentran en el plano de la sección transversal; la elección de su orientación particular de la sección transversal suele estar condicionada por la forma de la sección o por la dirección de la carga transversal que soporta el elemento.

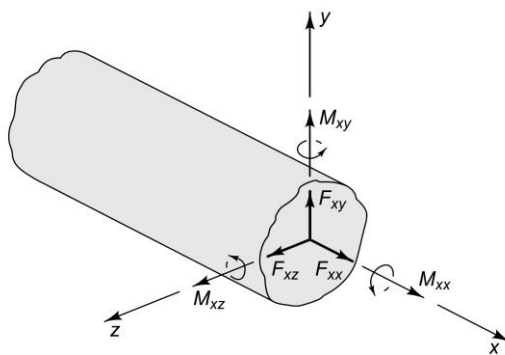


Figura 1

La notación F_{xx} , . . . etc., de los componentes de la Fig.1 se utiliza para indicar la orientación de la sección transversal y la dirección de la fuerza o el momento o componente de momento. El primer subíndice indica la dirección del vector normal dirigido hacia el exterior de la cara de la sección transversal. La cara de la sección transversal se llamará positiva cuando la normal hacia el exterior apunte en una dirección de coordenadas positiva y negativa cuando su vector normal dirigido hacia el exterior apunta en la dirección de coordenadas negativas; así, la cara de la sección transversal de la Fig. 1 es una cara positiva. El segundo subíndice indica la dirección de

las coordenadas de la componente de la fuerza o del momento. Así, F_{xy} es la fuerza que actúa sobre la sección transversal x en la dirección y , y M_{xz} es la componente de momento en la dirección z . Estos diferentes componentes tienen diferentes efectos en el miembro, y por lo tanto se les ha dado nombres especiales, como sigue:

F_{xx} : Fuerza axial. Esta componente tiende a alargar el miembro y a menudo se le da el símbolo F o F_x .

F_{xy} , F_{xz} : Fuerzas de corte. Estos componentes tienden a desplazar una parte de la barra respecto a la parte adyacente y a menudo se les da los símbolos V , o V_y y V_z .

M_{xx} : Momento de torsión. Esta componente es responsable de la torsión del miembro alrededor de su eje y a menudo se le da el símbolo M_t o M_{tx} .

M_{xy} , M_{xz} : Momentos de flexión. Estos componentes provocan la flexión del elemento y suelen recibir los símbolos M_b , o M_{by} y M_{bz} .

Es necesario definir una convención de signos para estas fuerzas y momentos. Los definiremos como positivos cuando la componente de la fuerza o del momento actúa sobre una cara positiva en una dirección de coordenadas positiva. Por ejemplo, las componentes de fuerza y de momento mostradas en la Fig. 1 son todas positivas.

La figura 1 ilustra el caso general en el que seis componentes de fuerza y momento actúan a través de una sección. En muchos casos, el problema es mucho más sencillo, ya que todas las fuerzas actúan en un solo plano, como en el problema de la flexión de una viga en voladizo que analizaremos.

Si el plano de carga es el plano xy , sólo se producen tres componentes: la fuerza axial F_{xx} (F), la fuerza cortante F_{xy} (V) y el momento flector M_{xz} (M_b).

Una aproximación habitual es considerar que la viga se encuentra soportando cargas puntuales, concentradas en un punto de la estructura. Otra idealización que se suele emplear es el concepto de carga distribuida de forma continua. Esta es el caso de fuerzas que pueden provenir de presiones de fluidos o gases, o de atracciones magnéticas o gravitacionales. La fuerza total sobre una longitud Δx se denomina ΔF y la intensidad de la carga q se define como el límite

$$q = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} \quad (1)$$

y tiene dimensiones de fuerza por unidad de longitud. La intensidad de la carga, en general, varía con la posición. En los trabajos de ingeniería las distribuciones más comunes son la distribución uniforme

en la que $q(x)$ es constante y la distribución linealmente variable $q(x) = Ax + B$. Consideraremos que una carga es positiva cuando actúa en la dirección de un eje de coordenadas positivo.

Consideremos la viga en voladizo AB, de longitud L, empotrada en el extremo derecho A, con una carga $q(x)$ arbitraria, tal como se muestra en la Fig. 2(a). Se desea obtener los diagramas de fuerzas cortantes, de momentos flectores, y la deformación de la barra expresada como su desplazamiento vertical en función de la posición $y(x)$.

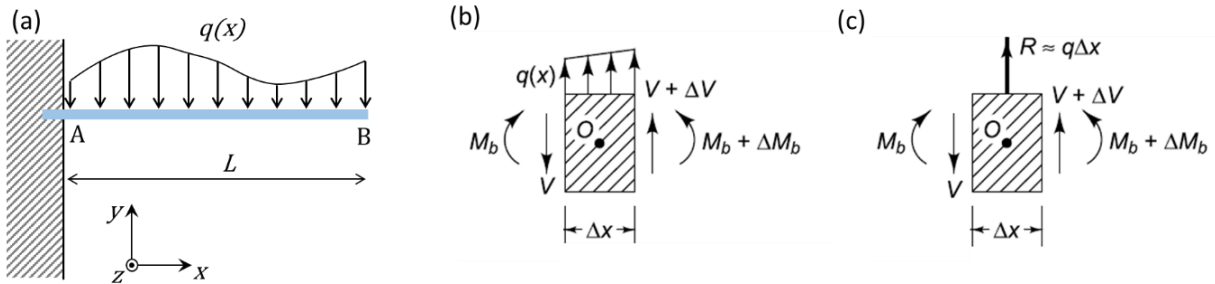


Figura 2

Existen diversas maneras de calcular los esfuerzos y momentos sobre una estructura. Aquí usaremos un procedimiento que permite obtener los esfuerzos y momentos internos a lo largo de una viga (o cualquier elemento esbelto). Consideraremos un elemento muy pequeño de la viga como cuerpo libre y aplicaremos las condiciones de equilibrio para ese elemento. La figura 2(b) muestra un elemento de viga de longitud Δx . Las acciones externas sobre este elemento son la carga distribuida de intensidad $q(x)$ que actúa sobre la longitud Δx y los esfuerzos cortantes y momentos flectores en las dos caras, como se muestra en la Fig. 2(b). En la Fig. 2(c) hemos sustituido la carga distribuida por su resultante R . Si la variación de $q(x)$ es suave y Δx es muy pequeña, podemos considerar $R = q(x)\Delta x$, que su línea de acción pasará por el punto medio O del elemento. Bajo estas condiciones, las condiciones de equilibrio para este elemento de la viga son:

$$\sum F_y = V + \Delta V + q\Delta x - V = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_O = M_b + \Delta M_b + \frac{(V + \Delta V)\Delta x}{2} + \frac{V\Delta x}{2} - M_b = 0 \quad (3)$$

Lo cual puede acomodarse en:

$$\frac{\Delta V}{\Delta x} + q(x) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\Delta M_b}{\Delta x} + V = -\frac{\Delta V}{2} \quad (5)$$

Ahora, se consideramos el límite para Δx tendiendo a cero, ΔV y ΔM_b también tienden a cero, y los cocientes en (4) y (5) se transforman en derivadas:

$$\frac{dV}{dx} + q(x) = 0 \quad (6)$$

$$\frac{dM_b}{dx} + V(x) = 0 \quad (7)$$

Las ecuaciones son las ecuaciones diferenciales básicas que relacionan la intensidad de carga $q(x)$ con el esfuerzo de corte $V(x)$ y el momento flector $M_b(x)$ para una viga.

Tensión y deformación de una viga

Comenzamos considerando una viga originalmente recta y uniforme a lo largo de su longitud, cuya sección transversal es simétrica respecto al plano de carga, como se ilustra en la Fig. 3, y cuyas propiedades de los materiales son constantes a lo largo y simétricas con respecto al plano de carga. En general, la viga puede transmitir un esfuerzo de corte V y un momento flector M_b , como se esquematiza en la Fig. 3(a). Sin embargo, consideraremos por el momento que la viga no transmite ningún esfuerzo de corte y que transmite un momento flector constante a lo largo de su longitud, como se muestra en la Fig. 3(b). Una viga que transmite un momento flector constante se dice que está en flexión pura, una situación que se corresponde bien con la parte central de una viga apoyada en sus extremos.

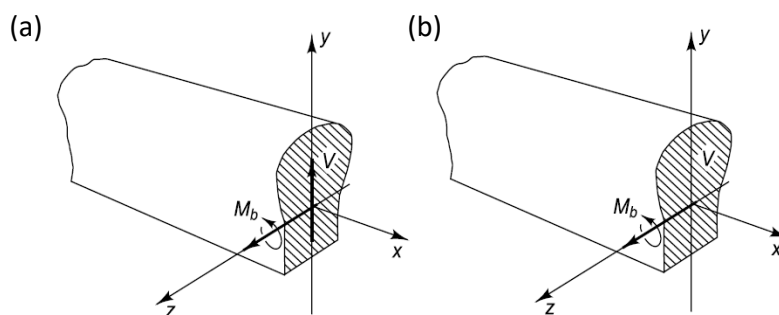


Figura 3

Dado que la viga originalmente recta se va a deformar en alguna forma curva, es útil introducir el concepto de curvatura. La curvatura de una de una curva plana se define como la tasa de cambio del ángulo de inclinación de la curva con respecto a la distancia a lo largo de la misma. En la Fig. 4 se

muestra una curva AD cuya curvatura está en el plano xy . Las normales de la curva en B y C se cruzan en el punto O' .

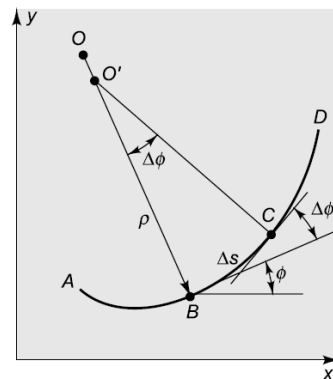


Figura 4

El cambio en el ángulo de inclinación entre B y C es $\Delta\phi$. Cuando $\Delta\phi$ es pequeño el arco Δs es aproximadamente $O'B\Delta\phi$. En el límite a medida que el punto C se acerca a B , es decir, a medida que $\Delta s \rightarrow 0$, la curvatura en el punto B se define como:

$$\frac{d\phi}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{O'B} = \frac{1}{\rho} \quad (8)$$

Donde $\rho = OB$ es el radio de curvatura en el punto B .

La Fig. 5(a) muestra la geometría de una viga en flexión pura, donde AD , BE y CF representan tres secciones planas equidistantes, todas perpendiculares al eje de una viga inicialmente recta.

En la Fig. 5(b) se muestra la viga doblada por momentos flectores M_b aplicados en los extremos en el plano de simetría, y en la Fig. 5(c) se muestran los dos elementos formados por las superficies A_1D_1 , B_1E_1 y C_1F_1 , deformados por la flexión. Como cada uno de estos elementos está cargado en su plano de simetría, podemos argumentar que la deformación de cada uno será simétrica respecto a su plano de simetría. Además, dado que en su forma no deformada estos elementos eran idénticos y que están sometidos a momentos de flexión idénticos, es razonable suponer que sus formas deformadas serán idénticas, y que las superficies A_1D_1 , B_1E_1 y C_1F_1 deben ser superficies planas perpendiculares al plano de simetría. Además, el hecho de que cada elemento se deforme de forma idéntica significa que las secciones planas inicialmente paralelas deben tener ahora una intersección común, como se ilustra en el punto O de la Fig. 5(b), y que la viga se dobla en el arco de un círculo centrado en esta intersección. Hay que tener en cuenta que los argumentos anteriores no han descartado la posibilidad de que una

sección plana se deforme dentro de su propio plano. De hecho, dicha deformación se produce, con la única restricción de que debe ser simétrica con respecto al plano de simetría.

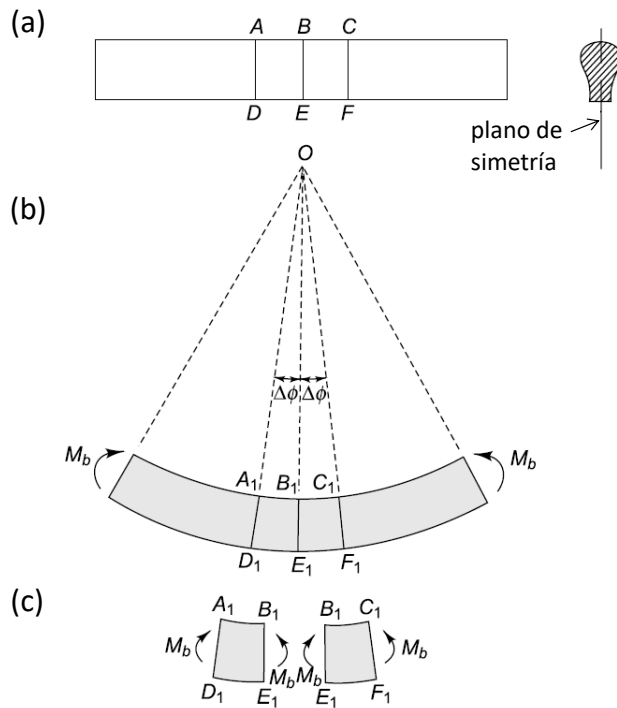


Figura 5.

En la Fig. 6(a) se muestra un segmento de la viga antes de la deformación. En la Fig. 6(b) se muestra la traza deformada de la viga en el plano de simetría. Mientras que las secciones transversales han permanecido planas, las líneas longitudinales originalmente rectas se han convertido en arcos de circunferencia. Algunas de estas líneas se han alargado y otras se han acortado en la deformación. Hay una línea en el plano de simetría que no ha cambiado de longitud. Aunque todavía no conocemos su ubicación exacta, llamamos a esta línea el eje neutro y establecemos nuestro sistema de coordenadas en la viga no deformada de manera que el eje x coincida con el eje neutro. El plano xy es el plano de simetría, y el plano xz se llama superficie neutra.

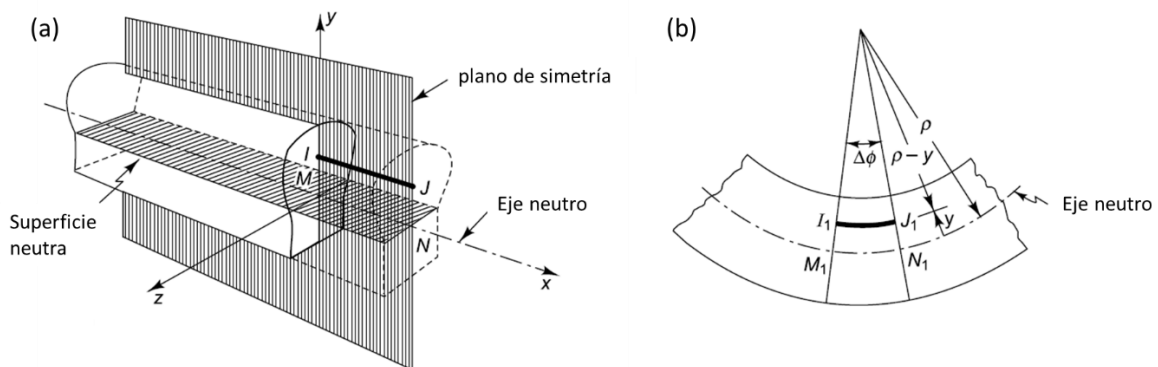


Figura 6.

Ahora, aunque admitimos que puede haber deformación de la sección transversal en su propio plano, hacemos la siguiente suposición. Suponemos que la deformación será lo suficientemente pequeña como para que podamos utilizar las coordenadas de un punto de la sección transversal no deformada para proporcionar una aproximación adecuada a la ubicación del punto después de la deformación. Así, si IJ y MN , que están separados por la distancia y en la viga no deformada de la Fig. 6(a), se deforman en arcos circulares concéntricos I_1J_1 y M_1N_1 en la Fig. 6(b), suponemos que la diferencia entre sus radios de curvatura puede seguir siendo y . Utilizamos el símbolo ρ para el radio de curvatura de el eje neutro deformado M_1N_1 . El radio de curvatura de I_1J_1 es entonces $\rho - y$.

Por definición del eje neutro $IJ = MN = M_1N_1$, y la deformación de I_1J_1 puede escribirse como:

$$\epsilon_x = \frac{I_1J_1 - IJ}{IJ} = \frac{I_1J_1 - M_1N_1}{M_1N_1} \quad (9)$$

Los arcos circulares de la fig. 6(b) pueden expresarse en términos del ángulo $\Delta\phi$:

$$M_1N_1 = \rho\Delta\phi \quad I_1J_1 = (\rho - y)\Delta\phi \quad (10)$$

Con estas ecuaciones se puede expresar la deformación como

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho} \quad (11)$$

Y usando la definición de radio de curvatura (eq 8):

$$\epsilon_x = -\frac{d\phi}{ds}y \quad (12)$$

Las ecuaciones 11 y 12 representan la distribución de deformación en el plano de simetría de la viga. Vemos que la deformación varía linealmente con y . El signo menos indica que hay compresión por arriba del eje neutro y estiramiento por debajo. Si bien esto vale solo para el plano de simetría, asumiremos que describe la deformación para todos los puntos de la sección transversal de la viga.

Entonces, para proseguir se despreciará cualquier otra deformación de la viga que no sea ϵ_x , lo cual es justificable en parte por cuestiones de simetría y la suposición original de que las secciones transversales no se deforman. En consecuencia, para una viga linealmente elástica, es decir que se flexiona elásticamente siguiendo la ley de Hooke, la tensión longitudinal normal a la sección transversal de la viga es:

$$\sigma_x = E \epsilon_x = -E \frac{y}{\rho} = -E \frac{d\phi}{ds}y \quad (13)$$

Ahora debemos considerar las condiciones de equilibrio para esta situación. El equilibrio requiere que la resultante de la distribución de esfuerzos sobre la sección transversal de la viga sea igual al momento flector M_b . Como se muestra en la fig. 7, sobre cada área elemental ΔA de la sección transversal actúa una fuerza $\sigma_x \Delta A$.

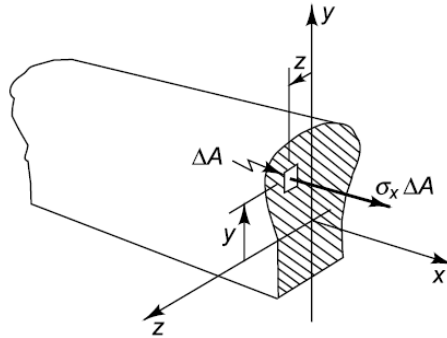


Figura 7.

Los requisitos de equilibrio sobre la sección transversal genérica pueden expresarse de la siguiente manera:

$$\sum F_x = \int_A \sigma_x dA = 0 \quad (14)$$

$$\sum M_y = \int_A z \sigma_x dA = 0 = \quad (15)$$

$$\sum M_z = \int_A y \sigma_x dA = M_b \quad (16)$$

Reemplazando (13) en (14) tenemos que $-E/\rho \int_A y dA = 0$. Este resultado nos dice que cuando una viga linealmente elástica de módulo constante E se flexiona, el primer momento de la sección transversal en torno a la superficie neutra debe ser cero. En otras palabras, la superficie neutra debe pasar por el centroide del área de la sección transversal. En el caso de las vigas elásticas de varios materiales o para vigas cuyo material se comporta de forma no lineal, la superficie neutra puede seguir localizándose fijando $\sum F_x = 0$, pero en general en estos casos, la superficie neutra no pasa por el centroide de la sección transversal. Sustituyendo (13) en (15) tenemos que $-E/\rho \int_A yz dA = 0$, lo cual se satisface por la simetría de la sección transversal con respecto al plano xy .

Finalmente, sustituyendo (13) en (16) tenemos que

$$-\frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = M_b \quad (17)$$

La integral de (17) se conoce como el segundo momento del área de la sección transversal de la viga o como el momento de inercia del área alrededor del eje neutro. Puede calcularse una vez conocida la forma específica de la sección transversal. Denotaremos esta integral por I_{ZZ} .

Finalmente, podemos escribir las expresiones para la deformación y la tensión de la viga:

$$\epsilon_x = -\frac{M_b y}{E I_{ZZ}} \quad (18)$$

$$\sigma_x = -\frac{M_b y}{I_{ZZ}} \quad (19)$$

Y la curvatura de la viga queda entonces dada por:

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{M_b}{E I_{ZZ}} \quad (20)$$

Nota al margen: para llegar hasta aquí hemos despreciado cualquier deformación de la viga que no fuera la axial ϵ_x . Sin embargo, la experiencia nos lleva a suponer que habrá una contracción lateral cuando una viga se alargue (pueden verlo cuando extienden una bandita elástica). Mediciones precisas realizadas durante ensayos de tracción confirman esta suposición, y se comprueba que la deformación lateral de compresión es una fracción fija de la deformación longitudinal (axial) de extensión. Además, ensayos en compresión uniaxial muestran una expansión lateral que es la misma fracción fija de la compresión longitudinal. Esta fracción fija se denomina coeficiente de Poisson y recibe el símbolo ν . Entonces, para completar nuestra solución deberíamos escribir:

$$\epsilon_y = \epsilon_z = -\nu\epsilon_x = \nu \frac{M_b y}{E I_{ZZ}}$$

Esto es solo para dar una idea de que el problema en detalle es más complicado. Por ejemplo, el hecho de que exista deformación en z , implica que la superficie neutra ya no es plana. Pero sigamos con nuestro análisis que funciona bastante bien para vigas esbeltas y deformaciones pequeñas.

Desplazamiento vertical de una viga en voladizo

La fig. 3(a) muestra un esquema del problema. Una viga en voladizo AB, de longitud L , fija en su extremo A. En un principio despreciaremos el peso de la viga ($q(x) = 0$), y llamaremos P a la carga ubicada en $x = L$. Para este caso, a partir de las ecuaciones 6 y 7 y teniendo en cuenta que la carga total es $V(x = L) = -P$, y que $M(x = 0) = -PL$, podemos escribir:

$$\frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow V(x) = cte = -P \quad (21)$$

$$\frac{dM_b}{dx} = -V(x) = P \Rightarrow M(x) = Px + cte = -P(L-x) \quad (22)$$

En consecuencia, la tensión y la deformación axiales quedan dadas por:

$$\sigma_x = -\frac{P(L-x)y}{I_{zz}} \quad (22)$$

$$\epsilon_x = -\frac{P(L-x)y}{E I_{zz}} \quad (23)$$

El segundo momento de área I_{zz} depende de la geometría. Para una sección rectangular de dimensiones b h es $I_{zz} = \frac{bh^3}{12}$. Para una sección circular de radio r es $I_{zz} = \frac{\pi r^4}{4}$.

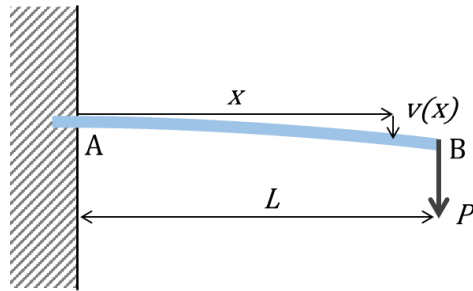


Figura 8

Llamemos $v(x)$ al desplazamiento vertical de la viga (positivo en la dirección $+y$). Siguiendo el esquema y razonamiento de la fig. 4, vemos que cada elemento de la viga sufre una pequeña rotación local alrededor del eje z de $\phi(x) = dv(x)/dx$, y que la curvatura de la viga es $d\phi(x)/dx = d^2v(x)/dx^2$. Vimos que la curvatura está relacionada con el momento de flexión mediante la ecuación 20:

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{M_b}{E I_{zz}} = -\frac{P(L-x)}{E I_{zz}} \quad (24)$$

Esta ecuación se puede integrar una vez para dar:

$$\frac{dv(x)}{dx} = -\frac{P}{E I_{zz}} \left[Lx - \frac{x^2}{2} + C_1 \right] \quad (25)$$

Donde el valor de la constante C_1 debe determinarse teniendo en cuenta condiciones de contorno.

Dado que no hay rotación en el punto fijo de la viga A , $\frac{dv(x)}{dx}(x=0) = 0$, $C_1 = 0$. Una segunda integración y teniendo en cuenta que no hay desplazamiento en el punto A ($v(x=0) = 0$), se obtiene la expresión para el desplazamiento vertical de la viga:

$$v(x) = -\frac{P x^2}{6 E I_{zz}}(3L - x) \quad (26)$$

Si llamamos δ al desplazamiento vertical en el extremo de la viga $x = L$, y lo denominamos positivo hacia abajo por efecto de la carga P :

$$\delta = \frac{P L^3}{3 E I_{zz}} \quad (27)$$

La rigidez de la viga se define como:

$$k \equiv \frac{P}{\delta} = \frac{3 E I_{zz}}{L^3} \quad (28)$$

Una medición de δ permite estimar el módulo elástico como:

$$E = \frac{P L^3}{3 I_{zz} \delta} \quad (29)$$

Por caso, para una viga de sección circular de diámetro d :

$$\delta = \frac{64 P L^3}{3 E \pi d^4} \quad (30)$$

Modos de vibración de una viga en voladizo

Buscamos soluciones de las ecuaciones dinámicas (Leyes de Newton) para representar el desplazamiento vertical de la viga en función de la posición x y el tiempo t . Soluciones de la forma:

$$v(x, t) = \bar{v}(x) \sin \omega t \quad (31)$$

Donde ω es la frecuencia natural de vibración y $\bar{v}(x)$ es la forma del modo vibracional.

En ausencia de cargas distribuidas ($q(x) = 0$), la fuerza vertical neta aplicada en cada segmento infinitesimal de la viga ubicado entre x y $x + dx$ está dada por:

$$\sum F_y = V(x + dx, t) - V(x, t) \cong dx \left(\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \right) \quad (32)$$

El segmento se mueve en y con velocidad instantánea:

$$\dot{v}(x, t) \equiv \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \omega \bar{v}(x) \cos \omega t \quad (33)$$

Y su aceleración es:

$$\ddot{v}(x, t) \equiv \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 \bar{v}(x) \sin \omega t \quad (34)$$

La masa de este segmento elemental es $dm = dx (\rho A)$, con ρ la densidad del material de la viga (no el radio de curvatura, OJO!), y A el área de la sección transversal. Aplicando Newton (ecuaciones 32 y 34):

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} + \omega^2 \rho A \bar{v}(x) \sin \omega t = 0 \quad (35)$$

De manera similar, el equilibrio de momentos permite escribir:

$$\frac{\partial M_b(x, t)}{\partial x} + V(x, t) = 0 \quad (36)$$

La ecuación (36) puede derivarse con respecto a x , y al combinarse con la ecuación 35 se obtiene:

$$\frac{\partial^2 M_b(x, t)}{\partial x^2} - \omega^2 \rho A \bar{v}(x) \sin \omega t = 0 \quad (37)$$

Ahora recordamos la relación M_b y la curvatura de la viga (ec 24): $M_b = E I_{zz} \frac{d^2 v(x)}{dx^2}$, la introducimos en la ecuación 37 y realizamos las derivadas parciales para obtener:

$$\sin \omega t \left(E I_{zz} \frac{\partial^4 \bar{v}(x, t)}{\partial x^4} - \omega^2 \rho A \bar{v}(x) \right) = 0 \quad (38)$$

Como la ecuación 38 debe cumplirse en todo instante, la ecuación diferencial que define la forma y la frecuencia de los modos de vibración es:

$$\frac{\partial^4 \bar{v}(x, t)}{\partial x^4} - \frac{\omega^2 \rho A}{E I_{zz}} \bar{v}(x) = 0 \quad (39)$$

Por practicidad definiremos $\beta^4 = \frac{\omega^2 \rho A}{E I_{zz}}$

$$\frac{\partial^4 \bar{v}(x, t)}{\partial x^4} - \beta^4 \bar{v}(x) = 0 \quad (40)$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria con coeficientes constantes que tiene soluciones homogéneas de la forma:

$$\bar{v}(x) = C_1 \cosh \beta x + C_2 \sinh \beta x + C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x \quad (41)$$

Para verlo pueden probar $\bar{v}(x) = e^{\lambda x}$, y verán que satisface la ecuación diferencial si $\lambda^4 = \beta^4$, de modo que $\lambda^2 = \pm\beta^2$, es decir que $\lambda = \pm\beta$ o $\lambda = \pm i\beta$. Para escribir la ecuación 41 en función de funciones trigonométricas y trigonométricas hiperbólicas, se usaron las conocidas relaciones entre combinaciones lineales de exponenciales y funciones hiperbólicas (p.e. $2 \cosh x = e^x + e^{-x}$, etc.) y la ecuación de Euler ($2 \cos x = e^{ix} + e^{-ix}$, etc.).

Cuando imponemos a la solución las condiciones de contorno geométricas en el punto A de cero desplazamiento ($\bar{v}(x = 0) = 0$) y cero pendiente ($\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}(x = 0) = 0$), puede verse que $C_1 = -C_3$ y que $C_2 = -C_4$. De modo que la solución puede expresarse en términos de solo dos constantes de integración:

$$\bar{v}(x) = C_1 (\cosh \beta x - \cos \beta x) + C_2 (\sinh \beta x - \sin \beta x) \quad (41)$$

Luego tenemos condiciones de contorno dinámicas. En el extremo libre no hay esfuerzos ni momentos actuando en ningún instante de tiempo, o sea que $M(x = L, t) = 0$ y $V(x = L, t) = 0$. Para usar estas condiciones en la solución, las traducimos a sus implicancias en términos de \bar{v} . Teniendo en cuenta la ecuación 24 para el momento flector la primera condición queda $\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2}(x = L) = 0$. Teniendo en cuenta la ecuación 36, la segunda condición impone que $\frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial x^3}(x = L) = 0$. Si expresamos estas dos condiciones de contorno en la ecuación 41, y las organizamos en un sistema de ecuaciones lineales para los coeficientes C_1 y C_2 , luego de eliminar el factor constante EI_{zz} y todas las instancias de potencias de β , obtenemos:

$$\begin{bmatrix} (\cosh \beta L + \cos \beta L) + (\sinh \beta L + \sin \beta L) \\ (\sinh \beta L - \sin \beta L) + (\cosh \beta L + \cos \beta L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

Para que el sistema de ecuaciones tenga solución no trivial es necesario que el determinante de la matriz de 2x2 se anule, por lo que:

$$(\cosh \beta L + \cos \beta L)^2 = \sinh^2 \beta L - \sin^2 \beta L \quad (43)$$

Lo cual puede reacomodarse para dar:

$$\cos^2 \beta L + \sin^2 \beta L + \cosh^2 \beta L - \sinh^2 \beta L + 2 \cos \beta L \cosh \beta L = 0 \quad (44)$$

Que es igual a:

$$2(1 + \cos \beta L \cosh \beta L) = 0 \quad (45)$$

Finalmente, vemos que existen infinitos valores de βL que cumplen $\cos \beta L \cosh \beta L = -1$. Los cuatro primeros son:

$\beta_1 L = 1,875104$	$\beta_2 L = 4,694091$	$\beta_3 L = 7,854757$	$\beta_4 L = 10,99554$
------------------------	------------------------	------------------------	------------------------

Recordando la definición de β :

$$(\beta L)^4 = \frac{\omega^2 \rho A L^4}{E I_{zz}} \quad (46)$$

Entonces, las frecuencias de los modos vibracionales son:

$$\omega_i = \left(\frac{\beta_i L}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{E I_{zz}}{\rho A}} \quad (47)$$

Nos resta encontrar la forma de los modos de vibración. Para eso volvemos a las ecuaciones 42, y teniendo en cuenta que para las frecuencias naturales el determinante es cero y existe una solución, el cociente de los coeficientes está fijo, por ejemplo, por:

$$C_{2,i} = -\left(\frac{\cosh \beta_i L + \cos \beta_i L}{\sinh \beta_i L + \sin \beta_i L}\right) C_{1,i} \equiv R_i C_{1,i} \quad (48)$$

Donde introdujimos el parámetro adimensional R_i . Entonces tenemos que los modos vibracionales de la viga están dados por:

$$\bar{v}_i(x) = C_{1,i}[(\cosh \beta_i x - \cos \beta_i x) + R_i (\sinh \beta_i x - \sin \beta_i x)] \quad (49)$$

Donde $C_{1,i}$ es un factor arbitrario para la amplitud de la vibración, que puede tomar cualquier valor siempre que sea suficientemente pequeño para mantener la validez de las aproximaciones hechas.

Finalmente, la ecuación completa para los modos vibracionales de la viga es:

$$v(x, t) = C_{1,i}[(\cosh \beta_i x - \cos \beta_i x) + R_i (\sinh \beta_i x - \sin \beta_i x)] \sin \omega_i t \quad (50)$$

La figura 9 muestra la forma de los cuatro primeros modos de oscilación de la viga en voladizo.

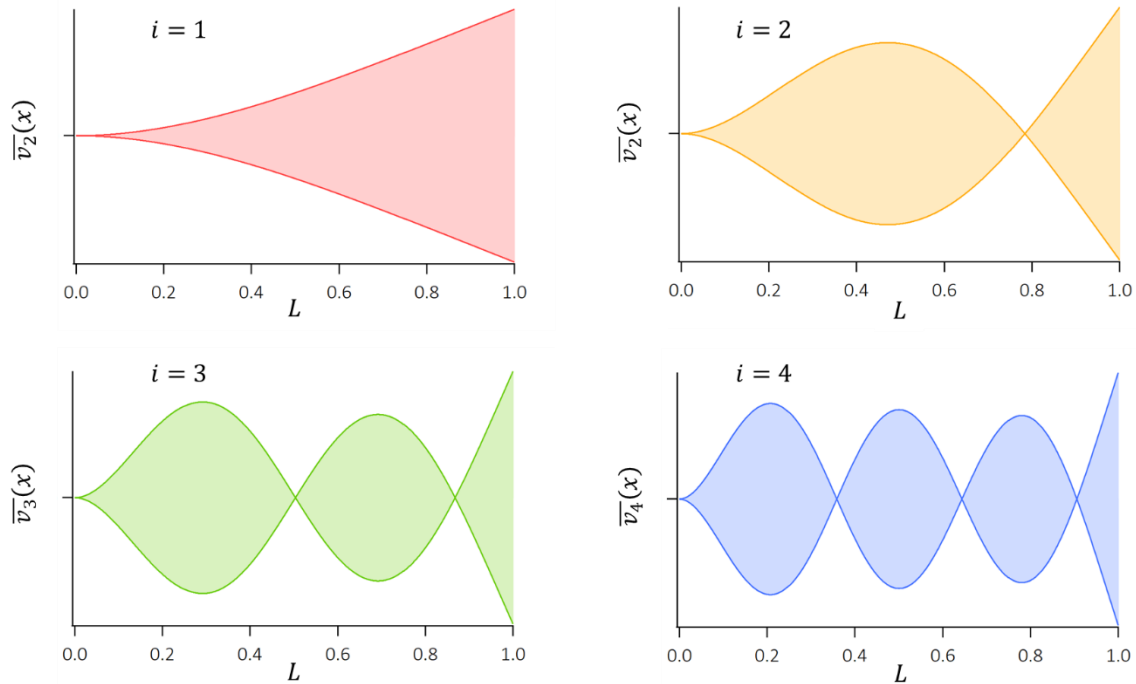


Figura 9

Frecuencia de vibración de una viga en voladizo

La ecuación 47 define la frecuencia de oscilación de los modos naturales de la viga en una situación ideal. Y la ecuación 50 predice que la oscilación vertical de la viga en para el modo i en cualquier punto x_p que no sea un nodo, esta puede representarse por:

$$v_i(x_p, t) = A_p \sin(\omega_i t + \varphi) \quad (51)$$

Lo cual indica que la viga oscilará indefinidamente. Sin embargo, la observación cotidiana indica que los sistemas que oscilan libremente van reduciendo la amplitud de su oscilación y eventualmente se detienen. Las vibraciones de la viga se encuentran atenuadas por diversos mecanismos, principalmente amortiguamiento (fricción) interna y amortiguamiento viscoso con el medio (aerodinámico). Queda claro que el modelo hasta ahora desarrollado debe modificarse para tener en cuenta amortiguamiento. La elección de un modelo representativo para el amortiguamiento en un sistema oscilante se basa en parte en la observación física y en parte en la conveniencia matemática. La teoría de las ecuaciones diferenciales sugiere que añadir un término proporcional a $\frac{\partial v_i}{\partial t}$, dará como resultado una solución $v_i(x_p, t)$ que decae y se extingue. Este tipo de amortiguamiento se denomina amortiguamiento viscoso y la observación física concuerda bastante bien con este modelo para una

variedad de mecanismos microscópicos. La solución de un movimiento armónico con amortiguamiento viscoso es:

$$v_i(x_p, t) = A_p e^{-\zeta\omega_i t} \sin(\omega_{i,d} t + \varphi) \quad (52)$$

Donde A_p es la amplitud, ζ es un numero adimensional llamado cociente de amortiguamiento (*damping ratio*) y $\omega_{i,d}$ es la frecuencia natural amortiguada, que difiere de la frecuencia natural en ausencia de mecanismos de disipación:

$$\omega_{i,d} = \omega_i \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (53)$$

La figura 10 muestra una oscilación amortiguada de acuerdo a la ecuación 52 en función del tiempo en unidades del período amortiguado $T_{i,d} = \frac{2\pi}{\omega_{i,d}}$.

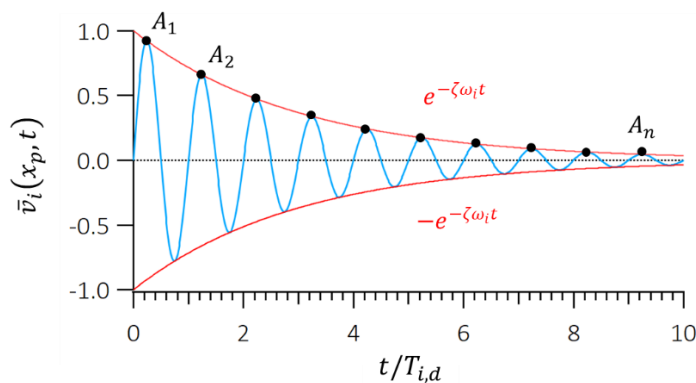


Figura 10

En este punto podemos introducir otro parámetro usual en oscilaciones amortiguadas, el decrecimiento logarítmico (*logarithmic decrement*) δ definido como:

$$\delta = \ln \frac{v_i(x_p, t)}{v_i(x_p, t + T)} \quad (54)$$

Donde T se refiere al período amortiguado. Para una oscilación amortiguada como 52 toma la forma de:

$$\delta = \ln \frac{A_p e^{-\zeta\omega_i t} \sin(\omega_{i,d} t + \varphi)}{A_p e^{-\zeta\omega_i(t+T)} \sin(\omega_{i,d} t + \omega_{i,d} T + \varphi)} \quad (55)$$

Lo cual se reduce a:

$$\delta = \ln e^{\zeta\omega_i T} = \zeta\omega_i T \quad (56)$$

Recordando que T se refiere al período amortiguado podemos escribir:

$$\delta = \zeta \frac{2\pi}{\sqrt{1+\zeta^2}} \quad (57)$$

Que despejada para ζ da como resultado:

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi+\delta^2}} \quad (58)$$

Lo cual indica que si se mide la amplitud de v_i en dos picos sucesivos (digamos A_1 y A_2 en la figura 10), la ecuación 58 permite determinar el cociente de amortiguamiento. Para obtener una medición más precisa, el decrecimiento logarítmico puede medirse a partir de las amplitudes de separadas por cualquier múltiplo entero del período, como por ejemplo A_1 y A_n en la figura 10, en ese caso:

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{v_i(x_p, t)}{v_i(x_p, t + nT)} \quad (59)$$