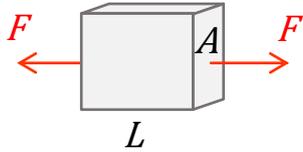


# Clase 3

Determinación dinámica del Módulo Elástico

Medición y análisis de series temporales

# Módulo Elástico Estático (Modulo de Young) – clase 2



$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta L}{L}$$

$$\sigma = E \epsilon$$

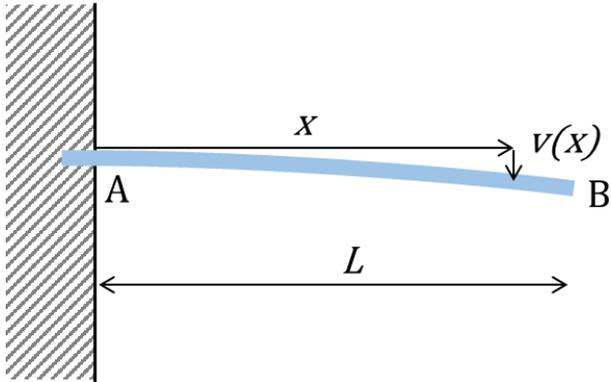


# Módulo Elástico Dinámico (Modulo Dinámico) – clase 3





# Vibración de una viga en voladizo



$$v(x, t) = \bar{v}(x) \sin \omega t$$

$$\bar{v}_i(x) = C_{1,i} [(\cosh \beta_i x - \cos \beta_i x) + R_i (\sinh \beta_i x - \sin \beta_i x)]$$

$$R \equiv - \left( \frac{\cosh \beta_i L + \cos \beta_i L}{\sinh \beta_i L + \sin \beta_i L} \right)$$

$\beta_1 L = 1,875104$
$\beta_2 L = 4,694091$
$\beta_3 L = 7,854757$
$\beta_4 L = 10,99554$

Leer y comprender el apunte sobre

## Esfuerzos, momentos, deformación y vibración de una viga en voladizo

### Esfuerzos, momentos, deformación y vibración de una viga en voladizo

(Con figuras adaptadas de "An Introduction to the Mechanics of Solids", Crandall, Dahl and Lardner)

Un método general para determinar las fuerzas y los momentos que actúan a través de cualquier sección de un miembro esbelto, como puede ser una viga, que está en equilibrio es imaginar un hipotético corte o sección a través del miembro en el punto de interés. Si consideramos entonces cualquiera de las dos partes de la barra como un cuerpo libre aislado, la fuerza y el momento requeridos en la para mantener esa parte de la barra en equilibrio se pueden obtener aplicando las condiciones de equilibrio. En general, habrá una fuerza y un momento que actúan en la sección.

Por comodidad, solemos dividir la fuerza y el momento en componentes normal y paralelo al eje de la barra (Fig. 1). En la Fig. 1 el eje  $x$  se ha orientado de forma que coincida con el eje longitudinal del elemento. Los ejes  $y$  y  $z$  se encuentran en el plano de la sección transversal; la elección de su orientación particular de la sección transversal suele estar condicionada por la forma de la sección o por la dirección de la carga transversal que soporta el elemento.

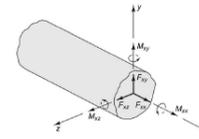
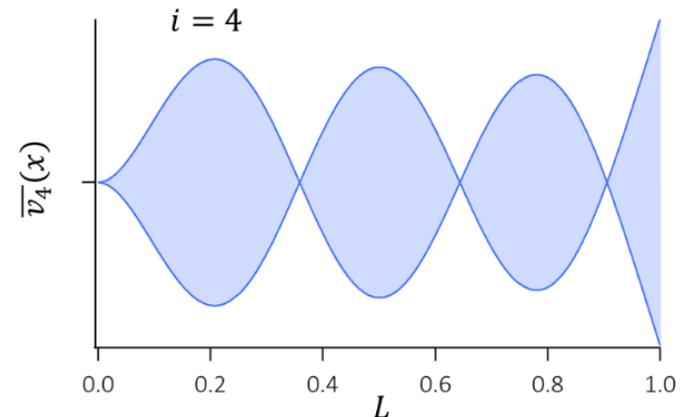
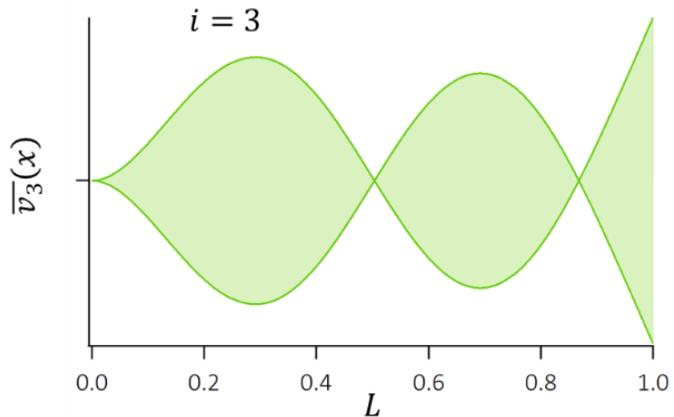
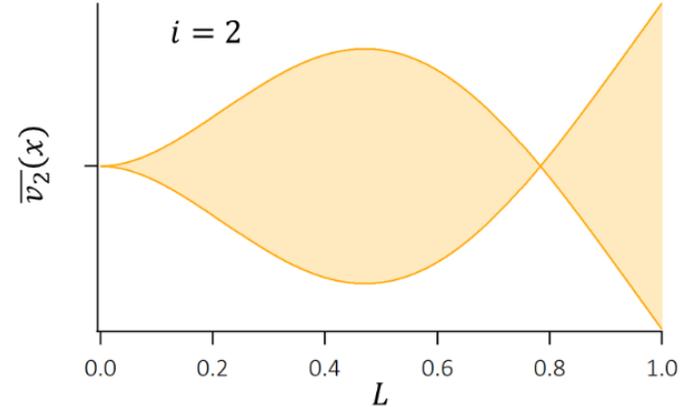
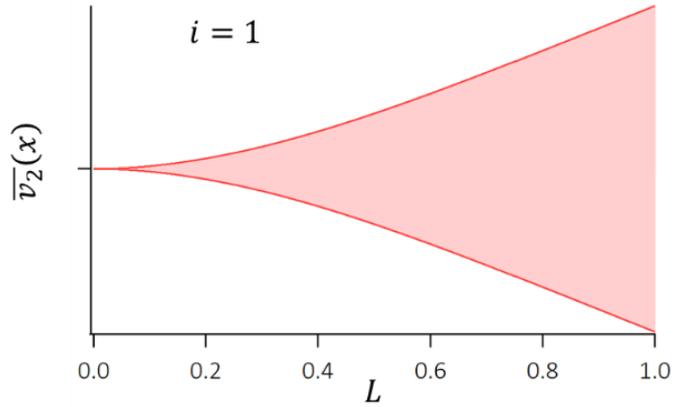


Figura 1

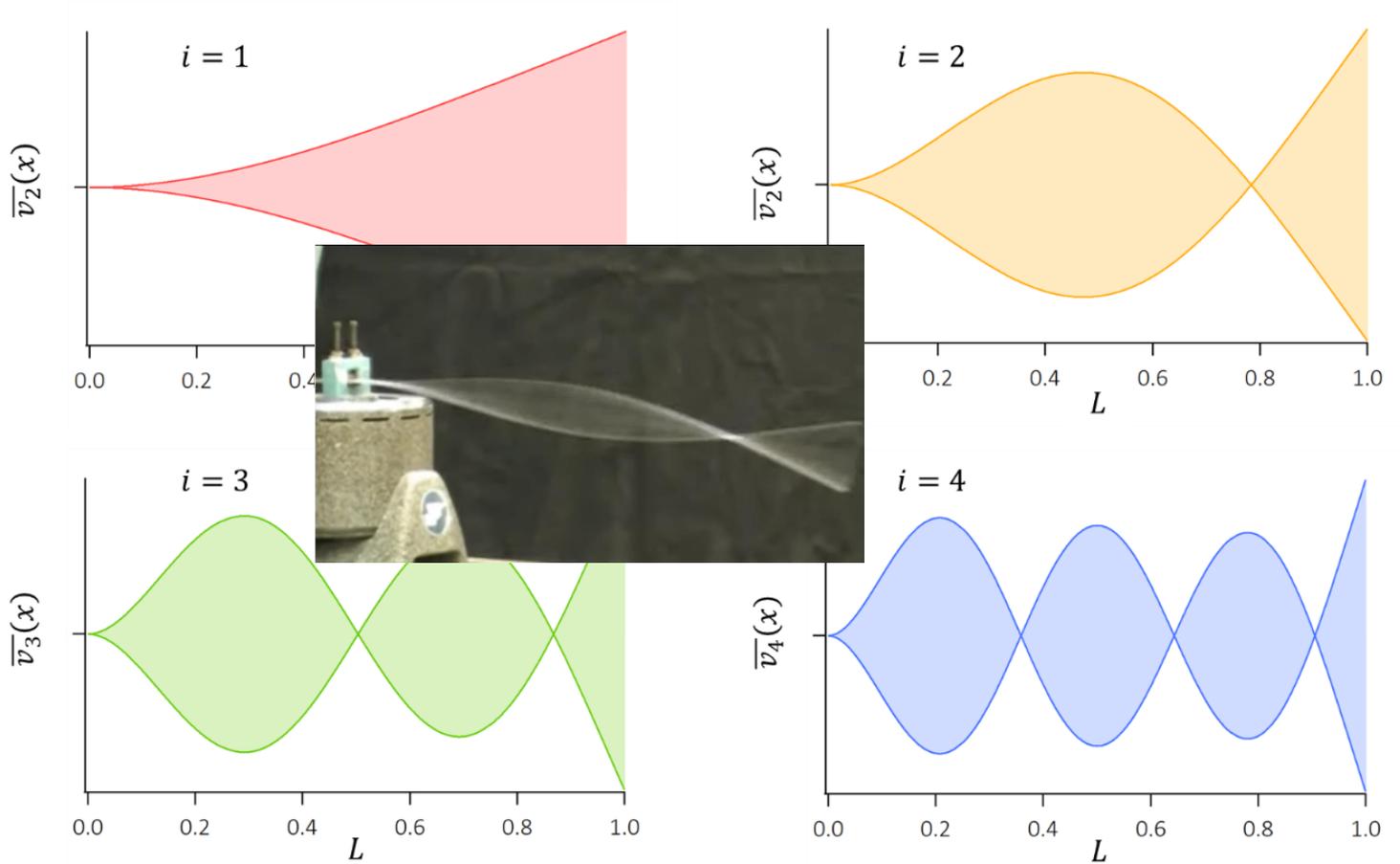
La notación  $F_{xni}$  ... etc., de los componentes de la Fig.1 se utiliza para indicar la orientación de la sección transversal y la dirección de la fuerza o el momento o componente de momento. El primer subíndice indica la dirección del vector normal dirigido hacia el exterior de la cara de la sección transversal. La cara de la sección transversal se llamará positiva cuando la normal hacia el exterior apunte en una dirección de coordenadas positiva y negativa cuando su vector normal dirigido hacia el exterior apunta en la dirección de coordenadas negativas; así, la cara de la sección transversal de la Fig. 1 es una cara positiva. El segundo subíndice indica la dirección de

No se entrega

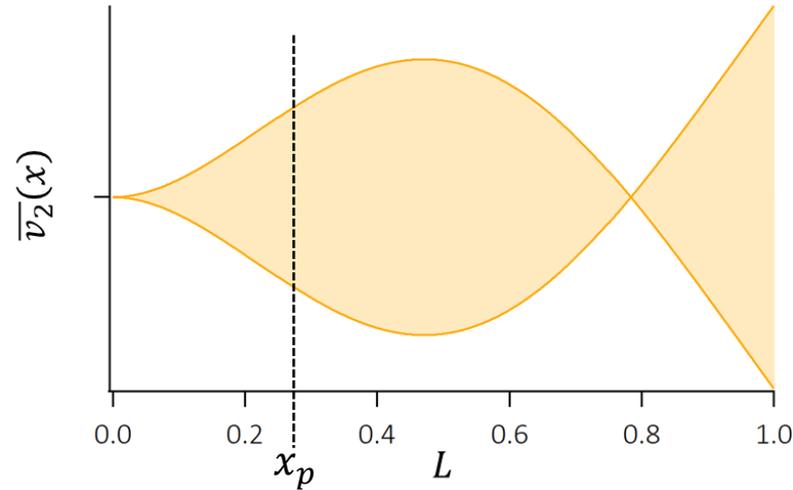
# Vibración de una viga en voladizo



# Vibración de una viga en voladizo



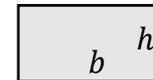
# Vibración ideal (o forzada) de una viga en voladizo



$$v_i(x_p, t) = A_p \sin(\omega_i t + \varphi)$$

$$\omega_i = \left( \frac{\beta_i L}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{E I_{zz}}{\rho A}}$$

$$I_{zz} = \int_A y^2 dA$$



$$I_{zz} = \frac{bh^3}{12}$$



$$I_{zz} = \frac{\pi r^4}{4}$$

# Pausa – Discusión

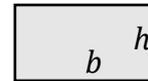
Estimar las frecuencias ( $f = \omega/2\pi = 1/T$ ) de los 3 primeros modos de vibración de las barras usadas en el método estático

$$r = 2.0 \text{ mm} - 2.6 \text{ mm}$$
$$L \approx 300 \text{ mm}$$

$$E_{\text{latón}} = 110 \text{ GPa}$$
$$E_{\text{acero}} = 190 - 210 \text{ GPa}$$

$$\rho_{\text{acero}} = 7850 \text{ kg/m}^3$$
$$\rho_{\text{latón}} = 8730 \text{ kg/m}^3$$

$$v_i(x_p, t) = A_p \sin(\omega_i t + \varphi)$$



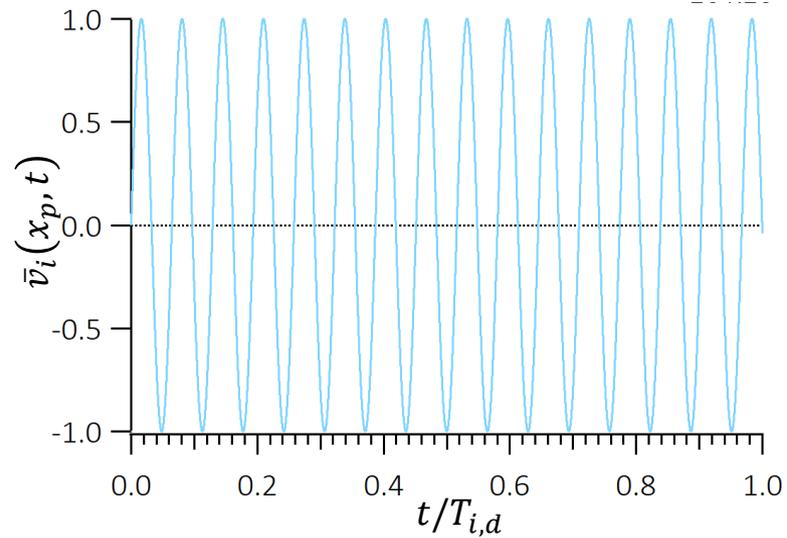
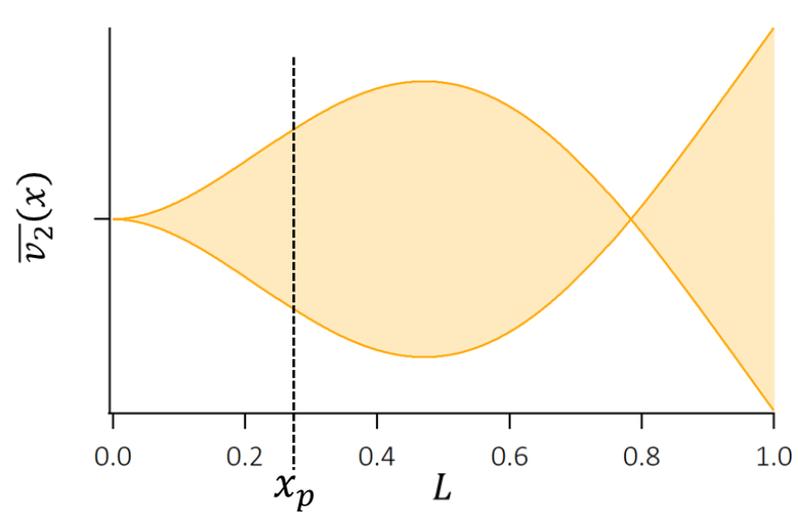
$$I_{zz} = \frac{bh^3}{12}$$

$$\omega_i = \left( \frac{\beta_i L}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{E I_{zz}}{\rho A}}$$



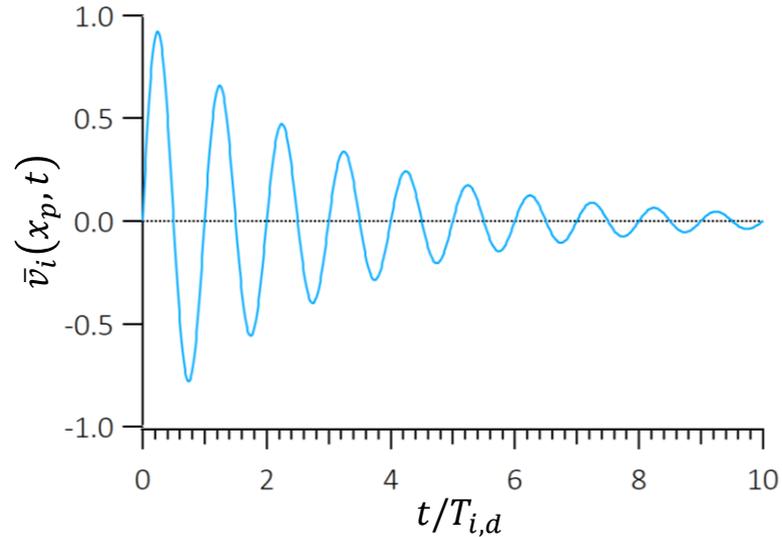
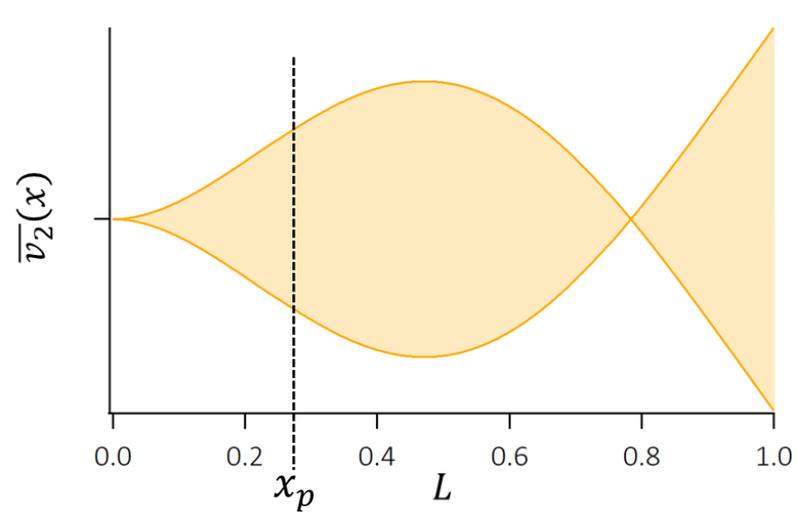
$$I_{zz} = \frac{\pi r^4}{4}$$

# Vibración ideal (o forzada) de una viga en voladizo



$$v_i(x_p, t) = A_p \sin(\omega_i t + \varphi)$$

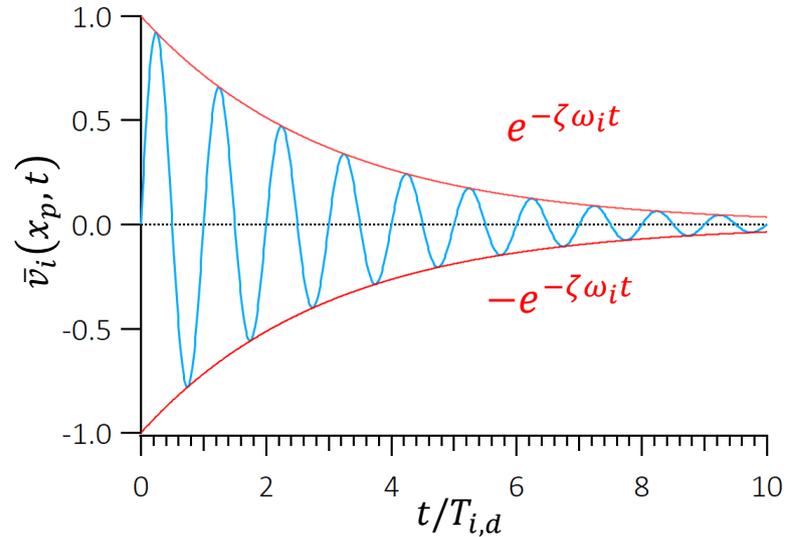
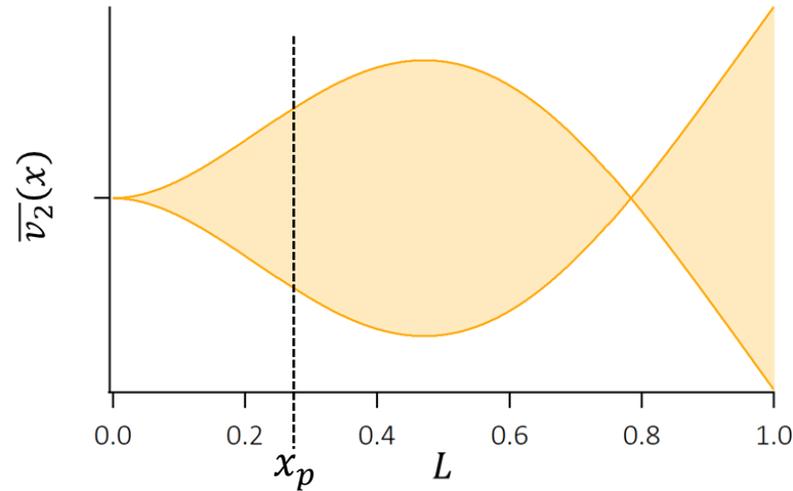
# Vibración libre de una viga en voladizo



fricción interna + amortiguamiento con el medio (aerodinámico)

Modelo: amortiguamiento viscoso  $\propto \frac{\partial v_i}{\partial t}$

# Vibración libre de una viga en voladizo

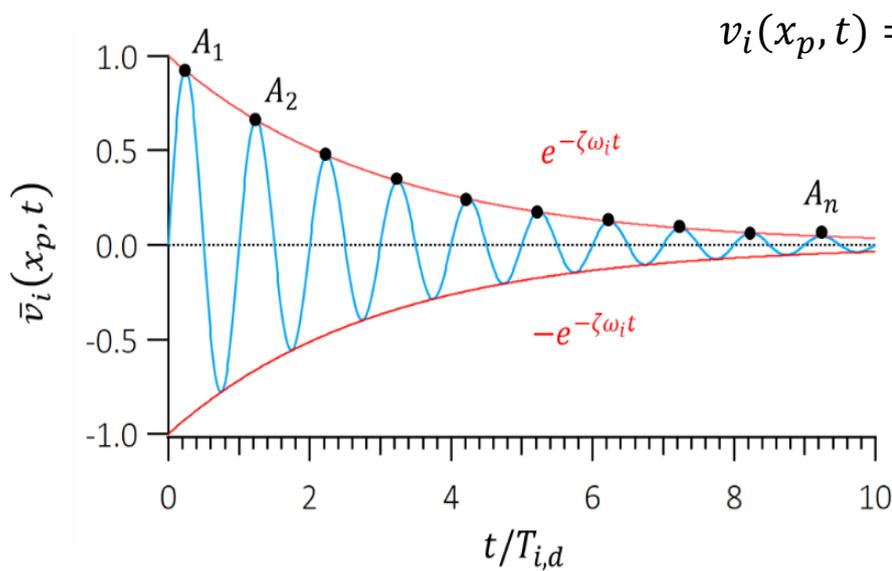


$$v_i(x_p, t) = A_p e^{-\zeta\omega_i t} \sin(\omega_{i,d} t + \varphi)$$

$$\omega_{i,d} = \omega_i \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$\omega_i = \left(\frac{\beta_i L}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{E I_{zz}}{\rho A}}$$

# Decrecimiento exponencial



$$v_i(x_p, t) = A_p e^{-\zeta\omega_i t} \sin(\omega_{i,d} t + \varphi)$$

$$\delta = \ln \frac{v_i(x_p, t)}{v_i(x_p, t + T)}$$

$$\delta = \ln e^{\zeta\omega_i T} = \zeta\omega_i T$$

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi + \delta^2}}$$

# Pausa – Discusión

Estimar el efecto del amortiguamiento en la determinación de  $E$  a partir de mediciones de  $\omega_i$

$$\omega_{i,d} = \omega_i \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$\omega_i = \left(\frac{\beta_i L}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{E I_{zz}}{\rho A}}$$

$\zeta$	$\omega_{i,d}/\omega_i$	$E_d/E$	$e_r$ [%]
0.9			
0.7			
0.5			
0.1			
0.05			
0.01			

# Pausa – Discusión

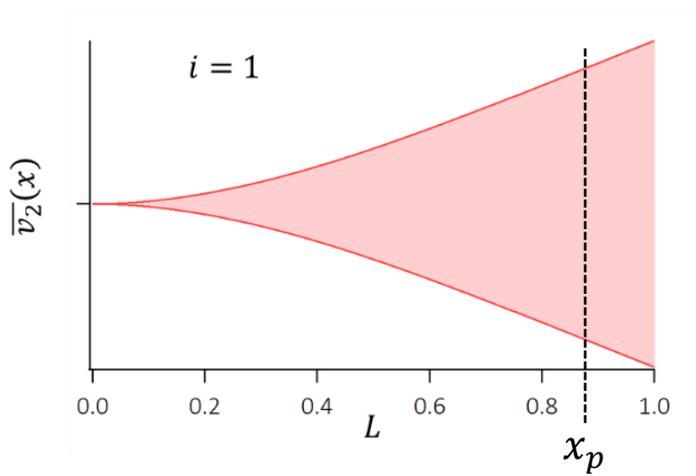
Estimar el efecto del amortiguamiento en la determinación de  $E$  a partir de mediciones de  $\omega_i$

$$\omega_{i,d} = \omega_i \sqrt{1 - \zeta^2}$$

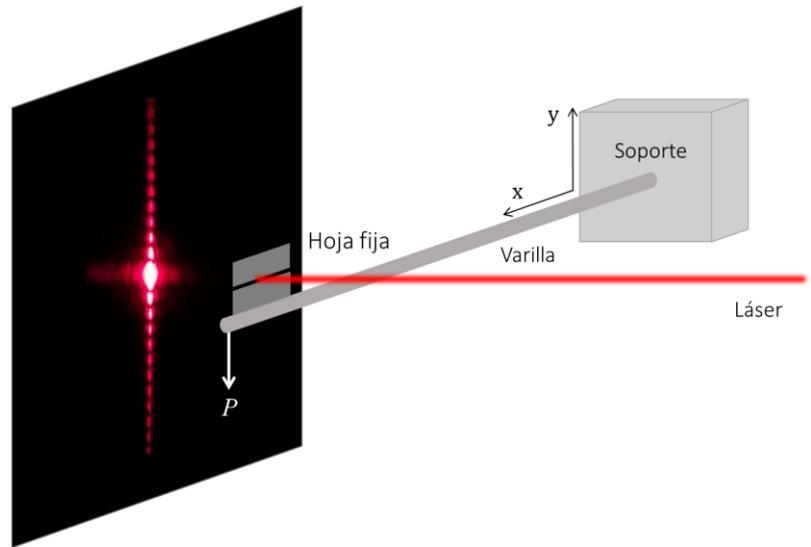
$$\omega_i = \left( \frac{\beta_i L}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{E I_{zz}}{\rho A}}$$

$\zeta$	$\omega_{i,d}/\omega_i$	$E_d/E$	$e_r$ [%]
0.9	0.4359	0.1900	81.00%
0.7	0.7141	0.5100	49.00%
0.5	0.8660	0.7500	25.00%
0.1	0.9950	0.9900	1.00%
0.05	0.9987	0.9975	0.25%
0.01	0.9999	0.9999	0.01%

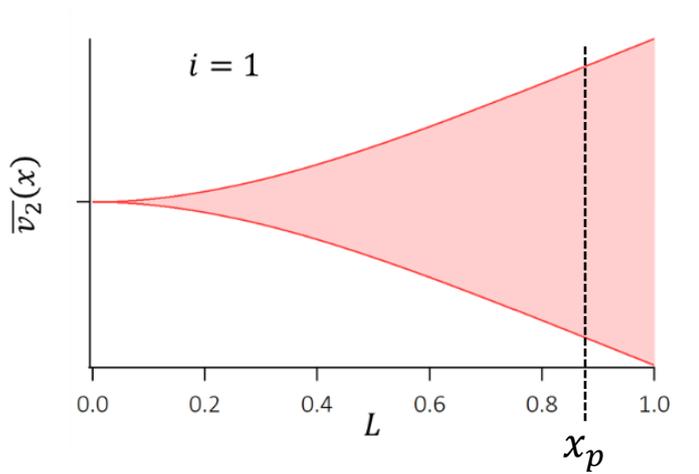
# Medición de la vibración de una viga en voladizo



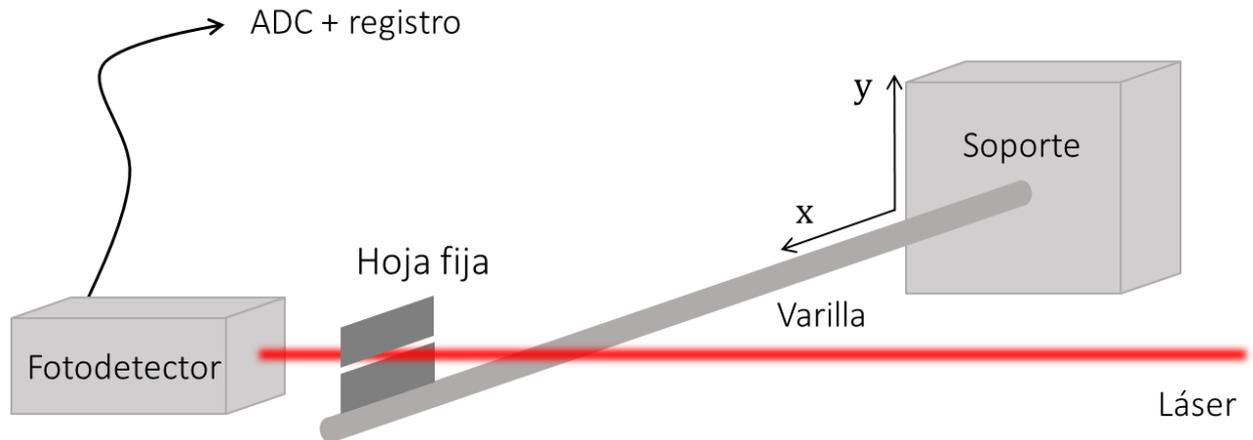
Medición de deformación estática



# Medición de la vibración de una viga en voladizo



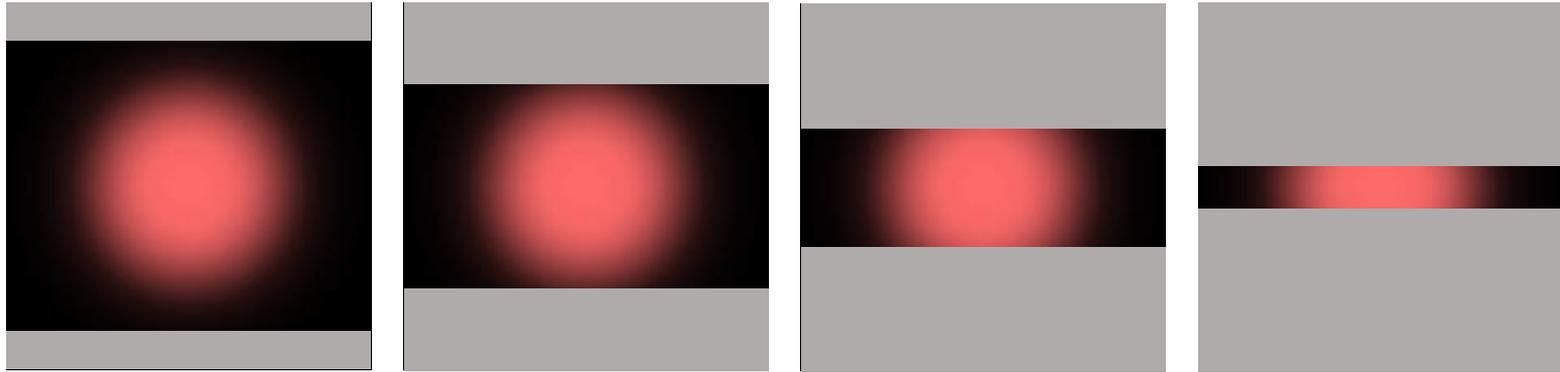
Señal  $\propto v(t)$



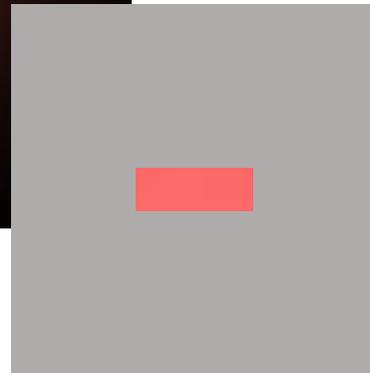
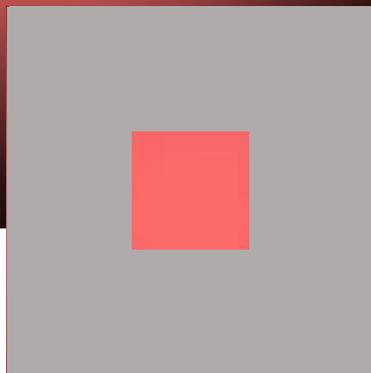
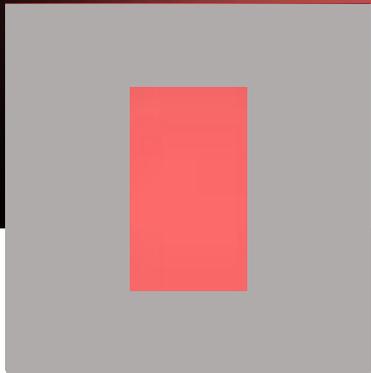
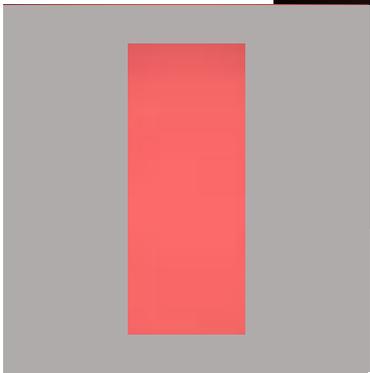
Pausa – Discusión



# Pausa – Discusión

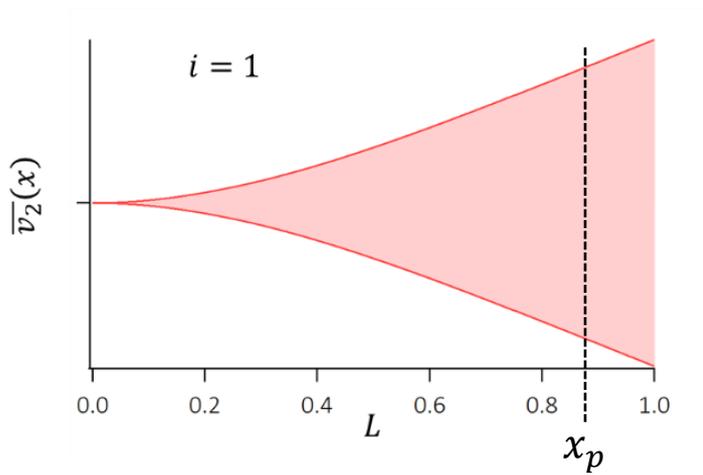


Señal  $\propto v(t)$  ??



Señal  $\propto v(t)$

# Medición de la vibración de una viga en voladizo



Señal  $\propto v(t)$

Algún otro método?

Leer y comprender el apunte sobre

## Esfuerzos, momentos, deformación y vibración de una viga en voladizo

### Esfuerzos, momentos, deformación y vibración de una viga en voladizo

(Con figuras adaptadas de "An Introduction to the Mechanics of Solids", Crandall, Dahl and Lardner)

Un método general para determinar las fuerzas y los momentos que actúan a través de cualquier sección de un miembro esbelto, como puede ser una viga, que está en equilibrio es imaginar un hipotético corte o sección a través del miembro en el punto de interés. Si consideramos entonces cualquiera de las dos partes de la barra como un cuerpo libre aislado, la fuerza y el momento requeridos en la para mantener esa parte de la barra en equilibrio se pueden obtener aplicando las condiciones de equilibrio. En general, habrá una fuerza y un momento que actúan en la sección.

Por comodidad, solemos dividir la fuerza y el momento en componentes normal y paralelo al eje de la barra (Fig. 1). En la Fig. 1 el eje  $x$  se ha orientado de forma que coincida con el eje longitudinal del elemento. Los ejes  $y$  y  $z$  se encuentran en el plano de la sección transversal; la elección de su orientación particular de la sección transversal suele estar condicionada por la forma de la sección o por la dirección de la carga transversal que soporta el elemento.

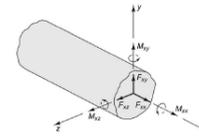


Figura 1

La notación  $F_{xni}$  ... etc., de los componentes de la Fig.1 se utiliza para indicar la orientación de la sección transversal y la dirección de la fuerza o el momento o componente de momento. El primer subíndice indica la dirección del vector normal dirigido hacia el exterior de la cara de la sección transversal. La cara de la sección transversal se llamará positiva cuando la normal hacia el exterior apunte en una dirección de coordenadas positiva y negativa cuando su vector normal dirigido hacia el exterior apunta en la dirección de coordenadas negativas; así, la cara de la sección transversal de la Fig. 1 es una cara positiva. El segundo subíndice indica la dirección de

No se entrega

Calcular la transformada rápida de Fourier (FFT) de las siguientes funciones:

$$v(t) = |\cos(2\pi ft)|$$

$$v(t) = |\cos(2\pi ft)| + 0,2 \quad \text{para } f = 45 \text{ Hz}$$

$$v(t) = |\cos(2\pi ft)|^2 + 0,2$$

Para ello, deberán muestrear las funciones.

Evaluar el resultado del módulo de la FFT de acuerdo a distintas duraciones y frecuencia de muestreo.

**No se entrega** – debe quedar asentada en el cuaderno

Generar una señal correspondiente a la vibración ideal sin amortiguamiento de una barra en voladizo, considerando sus tres primeros modos:

$$v(t) = A_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi) + A_3 \sin(\omega_3 t + \varphi)$$

$$\omega_i = \left(\frac{\beta_i L}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{E I_{zz}}{\rho A}}$$

$$\beta_1 L = 1,875$$

$$\beta_2 L = 4,694$$

$$\beta_3 L = 7,854$$

$$r = 2.0 \text{ mm} - 2.6 \text{ mm}$$

$$L \approx 300 \text{ mm}$$

$$E_{\text{latón}} = 110 \text{ Gpa}$$

$$E_{\text{acero}} = 190 - 210 \text{ GPa}$$

$$\rho_{\text{acero}} = 7850 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_{\text{latón}} = 8730 \text{ kg/m}^3$$

Obtener una buena FFT. Identificar parámetros de muestreo.

**No se entrega** – debe quedar asentada en el cuaderno

## Determinación del Módulo de Young a partir de mediciones de vibración

Se presentan distintas capturas de series temporales realizadas con un osciloscopio que permitía registrar series de datos de 30k puntos. Las series corresponden a la oscilación vertical libre de una barra en voladizo. 3 de las series corresponden a una barra de acero y 4 a una barra de latón.

Analizar las series y obtener el valor del módulo de Young de cada material.

Discutir la calidad de los datos al compararlos con una serie temporal ideal con amortiguamiento:

$$v(t) = \sum_i A_i e^{-\zeta\omega_i t} \sin(\omega_{i,d} t + \varphi)$$

Archivos:

- laton\_1.txt, ..., laton\_4.txt
- acero\_1.txt, ..., acero\_3.txt
- descriptor\_metodo\_dinamico.txt

[https://nube.df.uba.ar/index.php/apps/files/?dir=/L4\\_cuatri1\\_2021/L4\\_2021\\_publico/clase%2003/datos/young%20dinamico&fileid=157386253](https://nube.df.uba.ar/index.php/apps/files/?dir=/L4_cuatri1_2021/L4_2021_publico/clase%2003/datos/young%20dinamico&fileid=157386253)

Se entrega el 27.04.2021