La FFT es útil.

Te contamos porqué y cómo usarla.

Luciano Carullo, Tadeo Rodríguez y Joaquín Sequeira - Grupo 7

Aplicaciones y cuidados de la FFT

- Convolución
- Zero padding
- Correlación
- Estimación del espectro de frecuencias
- Data windowing

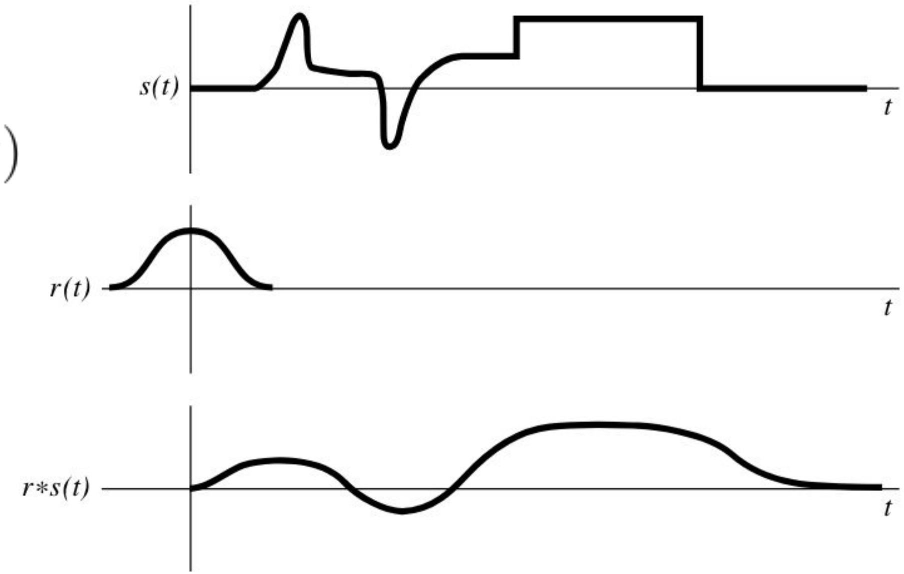
Convolución

Continuo

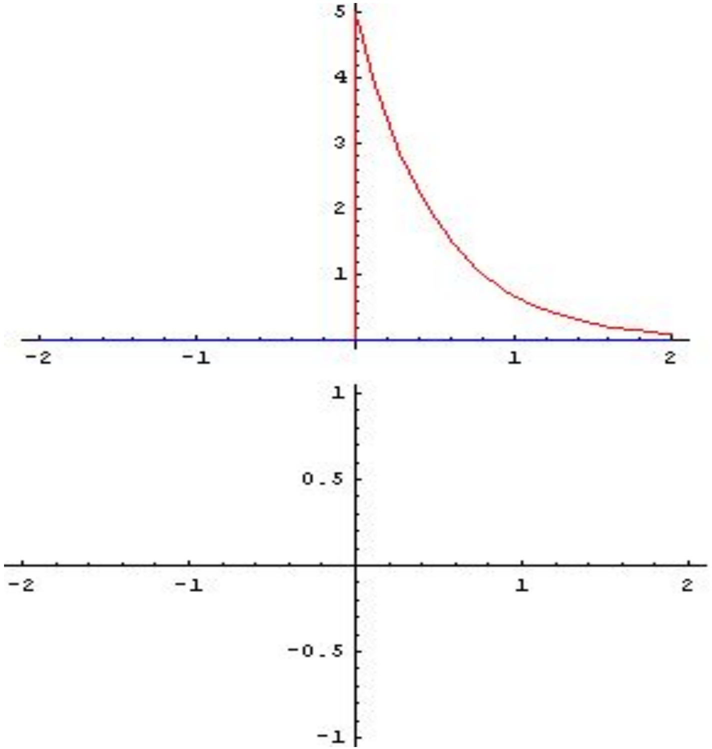
$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(\tau - t)$$

Discreto

$$(f * g)_j = \sum_{k=-M/2+1}^{M/2} f_k g_{k-j}$$



Ejemplo descarga capacitor y función cuadrada



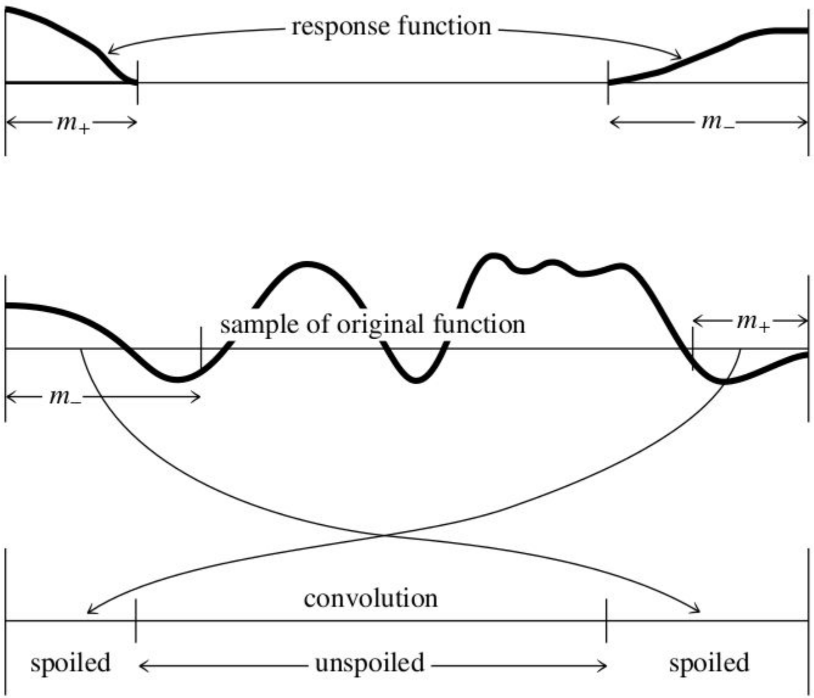
Convolución y transformada de Fourier:

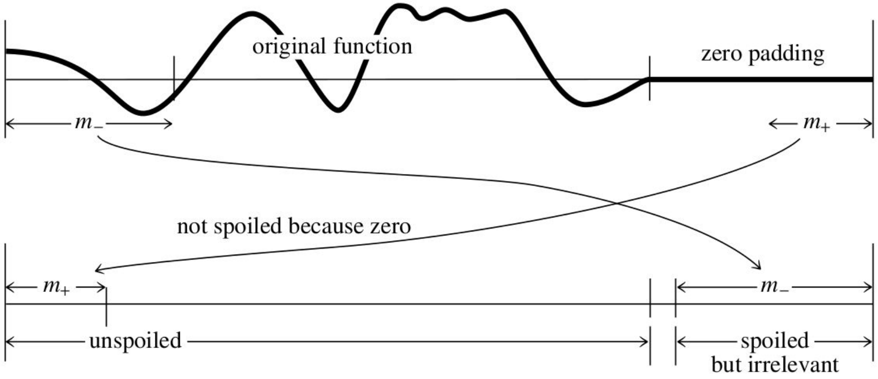
Teorema de convolución: $\mathcal{F}(f * g)(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega)\mathcal{F}(g)(\omega)$

Se deben satisfacer dos condiciones:

- Señal periódica.
- Duración de la respuesta igual al período de la señal

Zero padding





Correlación

Continuo

$$Corr(f,g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau + t)g(\tau)$$

Discreto

$$Corr(f,g)_j = \sum_{k=0}^{N-1} f_{k+j}g_k$$

Teorema de correlación

$$\mathcal{F}(Corr(f,g))(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega)\mathcal{F}^*(g)(\omega)$$

Estimación del espectro de frecuencias

- Distintas convenciones de normalización
- Distintos dominios de frecuencias
- Estimador del periodograma con definición especial en los extremos

$$P(f_k) = \frac{1}{N^2}\left[|C_k|^2 + |C_{N-k}|^2\right]$$

$$f_k = \frac{k}{N\Delta} = 2f_c\frac{k}{N} \qquad C_k = \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{2\pi ijk}$$

$$\sum_{k=0}^{N/2} P(f_k) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} |c_j|^2$$

¿Qué tan bueno es el estimador?

- Filtraciones entre bins de frecuencias
- Varianza para N muy grande?
- Mejoras con combinación de valores o segmentación

$$W(s) = \frac{1}{N^2}\left[\frac{\sin(\pi s)}{\sin(\pi s/N)}\right]$$

Data windowing

Objetivo: Mejorar el estimado del PSD, reduciendo la filtración de frecuencias en bines lejanos

Método: Encontrar ventanas, distintas a la última, tal que la dependencia con s decaiga más rápido

Quiero mejorar

$$W(s) = \frac{1}{N^2}\left[\frac{\sin(\pi s)}{\sin(\pi s/N)}\right]$$

Pero, de dónde sale esta función?

Los datos que yo tomo no son periódicos ni infinitos. Que consecuencias tiene?

Tengo que pensar que mi señal son en realidad los datos multiplicados por una función del tiempo.

w_j La función respuesta, igual a cero salvo en el intervalo donde tomo datos

d_j Los datos tomados

$$C_k = DFT(d_j * w_j) = D_k W_k(s)$$ Los coeficientes del espectro

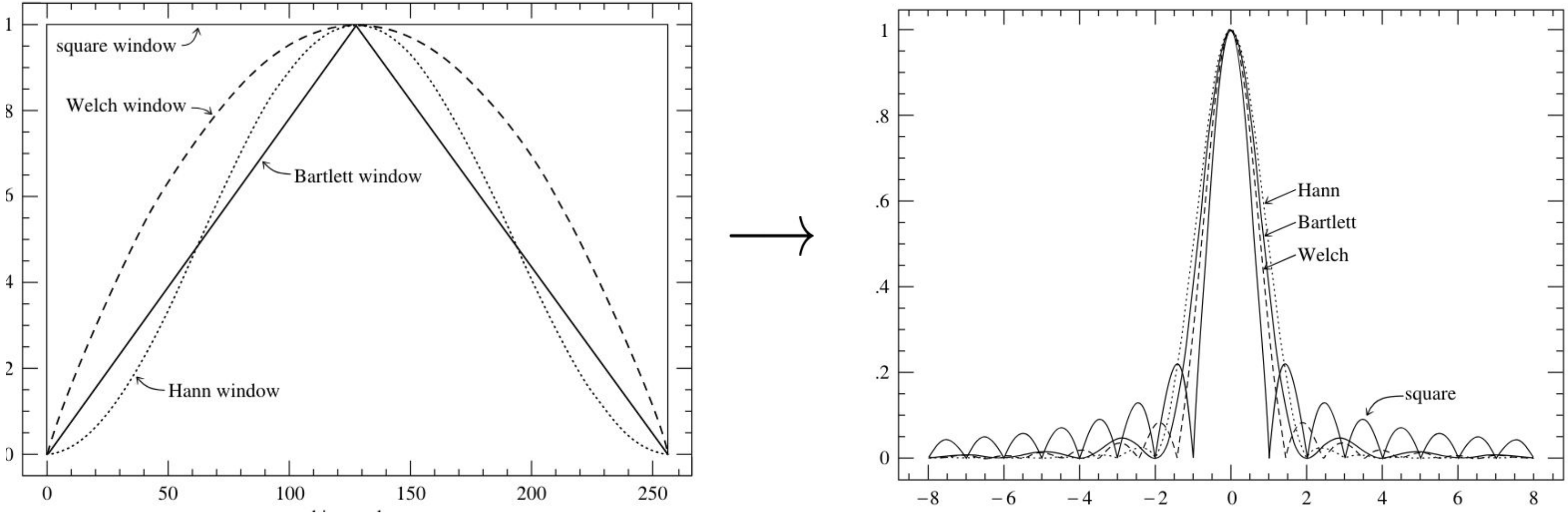
La función W(s) es entonces, para el caso de datos sin ventana (o con ventana cuadrada) la transformada de fourier del un pulso.

Que si hacemos memoria es: $$W(s) = \frac{1}{N^2}\left[\frac{\sin(\pi s)}{\sin(\pi s/N)}\right]$$

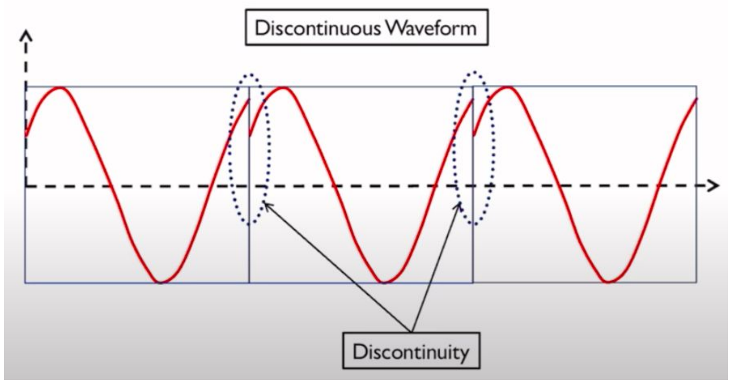
La idea del windowing es multiplicar los datos por una función ventana distinta al pulso cuadrado, una que varíe más sutilmente, ya que entonces tendrá menos contenido espectral

w_j más suave $\longrightarrow$ $W(s)$ menos frecuencias en el espectro $\longrightarrow$ C_k menos filtrado de frecuencias

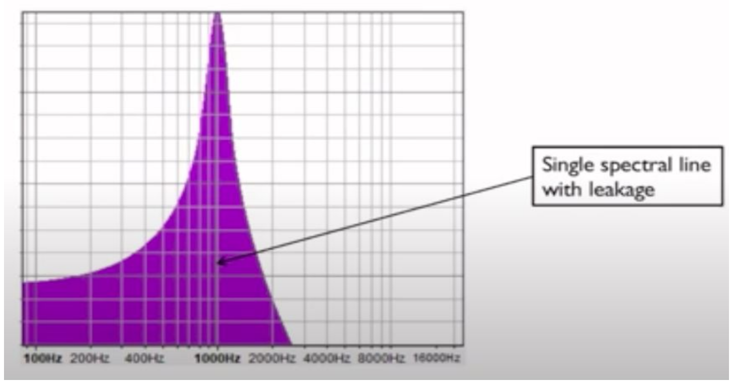
Distintos tipos de ventanas



Otra forma de pensarlo

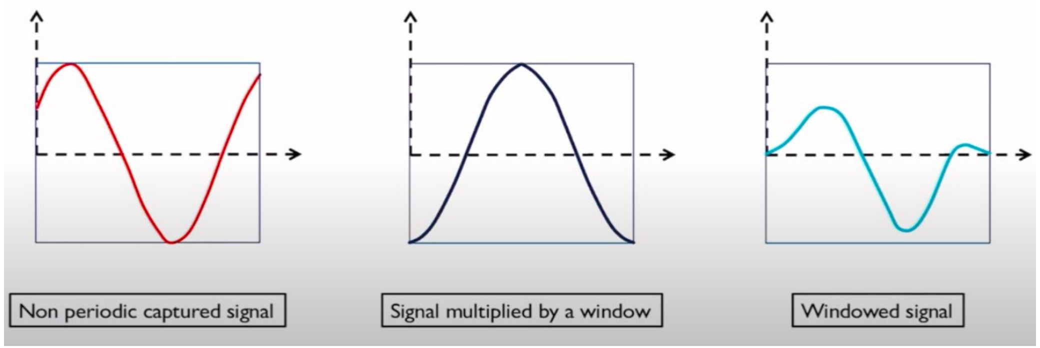


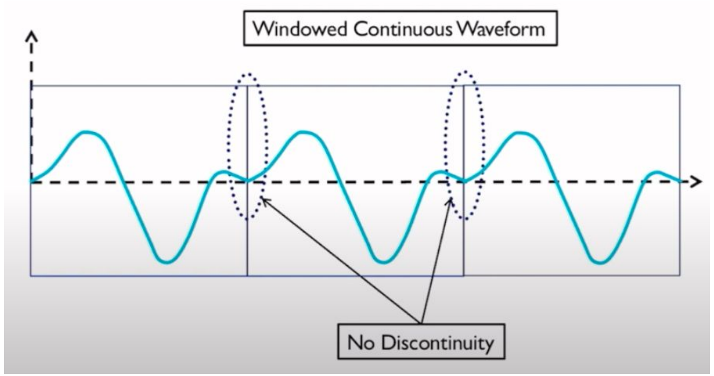
Fourier



Pero mi señal sería un seno, tengo filtrado de frecuencias por la discontinuidad

Con una ventana:





Fourier