

## Respuesta impulsiva de un sistema dinámico (aplicado a piezoeléctricos).

Cátedra: Prof. Capeluto

### Introducción

En procesamiento de señales la **respuesta al impulso** de un **sistema dinámico** es su salida cuando la señal de entrada es de duración muy corta, referida como **impulso**. La función respuesta al impulso describe la reacción de un sistema **en el dominio temporal**.

El impulso se describe matemáticamente como una delta de Dirac o una delta de Kronecker según el sistema sea modelado continuo o discreto, respectivamente. Una delta de Dirac representa el caso límite en que un pulso cuadrado de ancho  $\Delta t$  y altura  $1/\Delta t$  se hace cada vez más angosto, manteniendo constante su área (magnitud del impulso) y, por lo tanto, resultando en una altura extremadamente grande (figura 2). Aunque esto es imposible de tener en un sistema real, resulta ser una idealización muy útil.

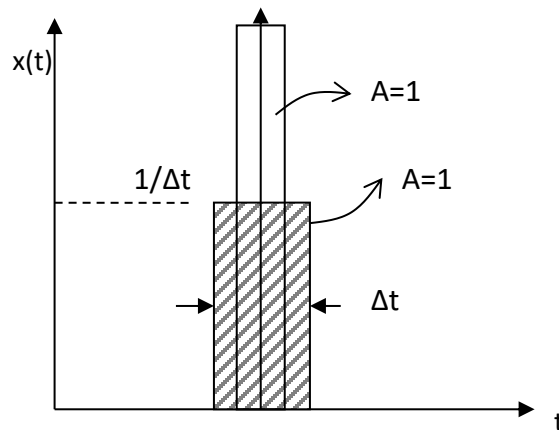
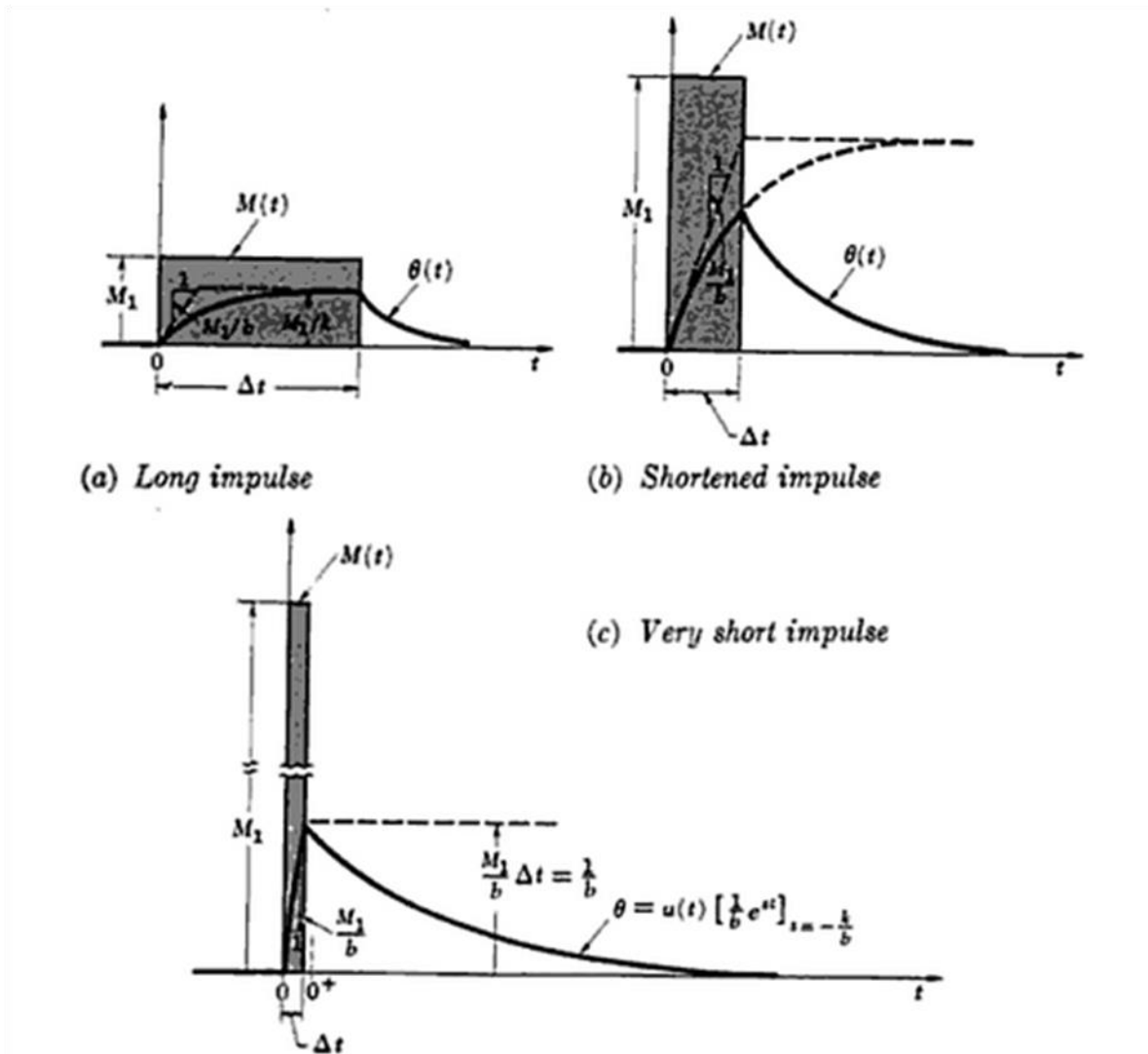


Figura 2: Representación de la delta de Dirac.

El concepto está ilustrado en la figura 3, tomada del libro de Cannon, que muestra la respuesta de un sistema hipotético a un impulso unitario  $M_1 \Delta t = 1$ . Este sistema tiene un tiempo de respuesta característico dado por  $\tau_1 = b/k$ , donde  $b$  es el coeficiente de amortiguamiento y  $k$  la constante restitutiva. Cuando el impulso dura mucho tiempo, el sistema tiene tiempo suficiente para llegar al estado estacionario. Cuando la duración del impulso se hace más corta,  $M_1$  crece de tal forma que la magnitud del impulso (área  $M_1 \Delta t = 1$ ) se mantiene constante. Finalmente, en la figura 3(c) la duración del impulso es mucho menor que  $\tau_1$  llevando al sistema rápidamente a la condición inicial. Al concluir el impulso el sistema ya no está forzado y exhibe su movimiento natural (sin forzar) a partir de la condición inicial  $x(0^+)$ .

Lo expuesto hasta ahora puede resumirse de la siguiente manera: La respuesta de un sistema a un impulso unitario es igual a su movimiento natural, con una condición inicial dada por el valor

de la respuesta  $y(t)$  al remover el impulso. Un impulso suficientemente corto genera la condición inicial del sistema y no tiene efecto alguno sobre el mismo.



**Figura 3:** Respuesta de un sistema a un impulso unitario de área  $M_1\Delta t = 1$ .

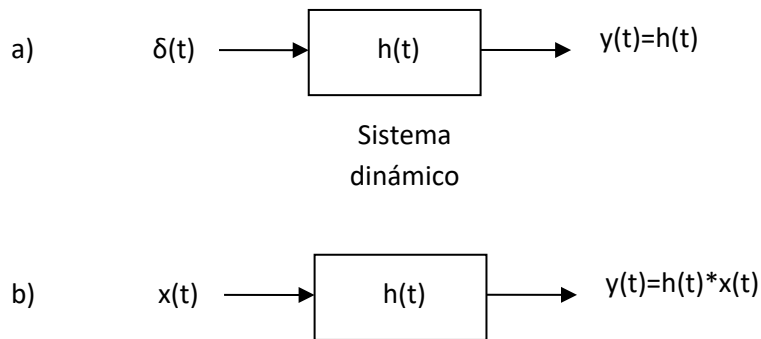
Si se perturba al sistema con una delta de Dirac  $\delta(t)$ , el sistema responde con una respuesta al impulso  $h(t)$  (figura 4(a)). Veremos entonces como se obtiene la respuesta de un sistema en el caso de que la excitación sea una función arbitraria  $x(t)$ .

Supongamos que el sistema dinámico (representado por una “caja negra”) es lineal e invariante en el tiempo (LTI), siendo:

- Lineal: Si  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  dan lugar a las respuestas  $y_1(t)$  y  $y_2(t)$ , la superposición  $a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$  da lugar a la respuesta  $a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$ .

- Invariante temporal: Si  $x(t)$  da a lugar a la respuesta  $y(t)$ , entonces  $x(t-T)$  da a lugar a la respuesta  $y(t-T)$

Cualquier sistema LTI está completamente caracterizado por su respuesta a un impulso. Esto es, se puede conocer la respuesta del sistema para cualquier tipo de excitación.



**Figura 4:** Representación del sistema de estudio. (a) respuesta al impulso  $\delta(t)$ . (b) respuesta a una señal arbitraria.

Esto se entiende fácilmente de la siguiente forma. Supongamos que la señal de excitación es una función  $x(t)$  (figura 5). Definimos un impulso infinitesimal de área es  $A=x(\tau)d\tau$  (o sea, el área bajo la curva  $x(t)$  a tiempo  $\tau$ , de ancho  $d\tau$ ). Podemos escribir a la magnitud del impulso infinitesimal como  $A\delta(t-\tau)=x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ , de modo que la superposición lineal de estos impulsos permite obtener a la función de excitación

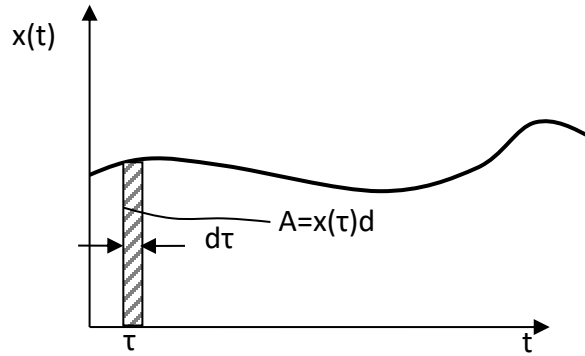
$$\int_{-\infty}^{\infty} A\delta(t-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = x(t)$$

(una función arbitraria puede escribirse como la convolución de sí misma con una delta de Dirac).

Si excitamos al sistema con el impulso infinitesimal  $x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$  conoceremos su respuesta, dado que sabemos, por la propiedad de invariancia temporal, que el sistema responde a  $\delta(t-\tau)$  mediante  $h(t-\tau)$ . Luego, usando la linealidad del sistema obtenemos

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)h(t)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$



**Figura 5:** Función de entrada arbitraria

Hasta ahora describimos al sistema en el dominio temporal. Una descripción análoga puede ser realizada en el dominio de la frecuencia. Sabemos que una señal puede ser escrita en términos de su contenido espectral a través de la transformada de Fourier.

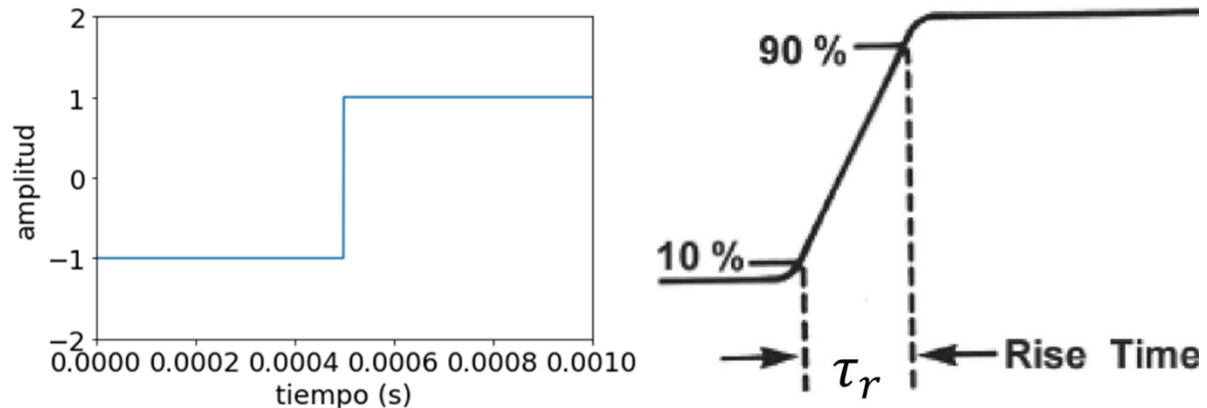
Si la excitación es  $x(t)$  su transformada de Fourier es  $X(\omega)$ , luego la respuesta del sistema en el espacio de frecuencias se obtiene transformando  $y(t) = x(t) * h(t)$ , lo que resulta en  $Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$ . En el caso del impulso  $\delta(t)$  su transformada de Fourier es la constante 1. Esto significa que tiene igual contribución de todas las posibles frecuencias de excitación, lo que lo hace una señal de prueba muy conveniente. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, tal función no es realizable en la práctica.

Por último, la respuesta al impulso puede hallarse fácilmente a partir del cociente entre las señales de excitación y respuesta

$$H(\omega) = Y(\omega)/X(\omega)$$

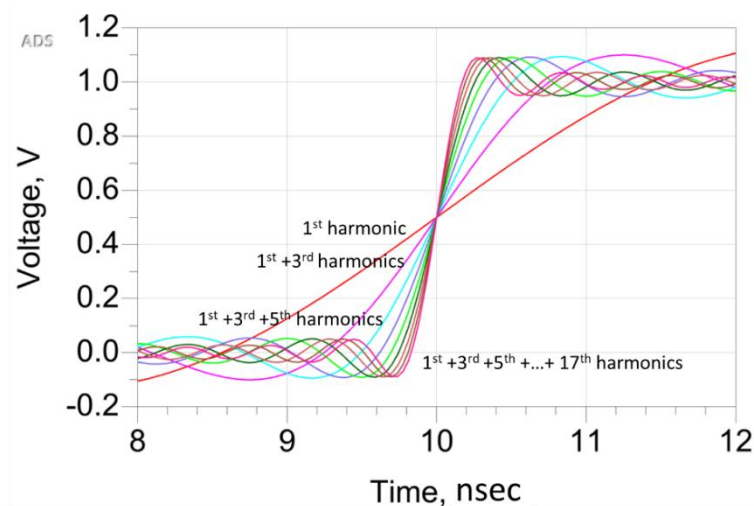
Revisemos el concepto de la  $\delta(t)$  ideal. Acabamos de decir que “ $\delta(t)$  su transformada de Fourier es la constante 1. Esto significa que tiene igual contribución de todas las posibles frecuencias de excitación, lo que lo hace una señal de prueba muy conveniente. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, tal función no es realizable en la práctica.” ¿Entonces, como realizamos la implementación experimental de una  $\delta(t)$ ?

En principio, no necesitamos una señal impulsiva que tenga una respuesta plana en todo el rango espectral, sino que tenga una respuesta plana en las frecuencias que tiene respuesta el sistema. Para que una señal tenga un contenido en frecuencias en un ancho de banda grande, es necesario que tenga flancos abruptos, por ejemplo, como la función escalón que se observa en la figura 6 (a). Una versión más realista de esa función es el escalón de la figura 6(b) que tiene un tiempo característico de subida  $\tau_R$  (o rise time)



**Figura 6:** Función escalón ideal (las escalas son arbitrarias) (a) y función escalón más realista, en donde se marca el tiempo de subida (o rise time) como el tiempo que tarda la señal de cambiar del 10 % al 90% del valor del máximo

En la figura 7 se observan aproximaciones de series de Fourier de un flanco. Como puede apreciarse para conformar un flanco cada vez más empinado ( $\tau_R$  cada vez más chico) se necesitan cada vez más términos de una serie de Fourier. Es intuitivo pensar entonces que el ancho de banda es inversamente proporcional al  $\tau_R$ . Entonces, por ejemplo, un tiempo de  $\tau_R \sim 100$  ns implica un ancho de banda  $BW \sim 10$  MHz, que es más que suficiente para estudiar la respuesta en frecuencias de un piezoeléctrico de frecuencia de resonancia 40 kHz y ancho 4 Hz.



**Figura 7:** Series de Fourier aproximando a un escalón

### Propuesta experimental

**a)** En el montaje experimental del piezoeléctrico (guía standard) identifique cuál es el sistema dinámico.

**b)** Como se mencionó anteriormente, la excitación con una  $\delta(t)$  permite obtener la respuesta al impulso inmediatamente. Sin embargo, esto no es muy viable experimentalmente. ¿Cómo debe elegir los parámetros de una señal cuadrada (*duty cycle*, polaridad, período, etc) introducida por el generador de funciones, de manera de poder obtener la respuesta al impulso del sistema? ¿Cómo se relaciona ésta con la curva de resonancia del piezoeléctrico?

### **Bibliografía**

R.P. Feynman, *The Feynman Lectures on Physics Vol. II*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1987.

E. Rodriguez Trelles, *Temas de Electricidad y Magnetismo*, EUDEBA.

R. H. Cannon, *Dynamics of Physical Systems*, McGraw Hill, 1967.

R.A. Roberts and C.T. Mullis, *Digital Signal Processing*, Addison-Wesley Series in Electrical Engineering.

R. Priemer, *Introductory Signal Processing*, Word Scientific Ed.